Curve

Def Una curva (parametrica) è una funzione
$\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, I intervallo di $\mathbb{R}$, continua

Oss Ciò è equivalente a dire che esistono n funzioni
$\gamma_1, \dots \gamma_n : I \to \mathbb{R}$ e una curva è espresse ~~tramite~~ le funzioni γ_i come segue

dato $t \in I$ $\quad \gamma(t) = \left(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)\right)$

Def Dato $l \in \mathbb{R}^n$ ~~diremo che~~ $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, $t_0 \in \bar{I}$ ~~interno ad I~~

diremo che $\displaystyle\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in I}} \gamma(t) = l$

se $\displaystyle\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in I}} |\gamma(t) - l| = 0$

Oss $|\gamma(t) - l|^2 = (\gamma_1(t) - l_1)^2 + \dots + (\gamma_n(t) - l_n)^2$

quindi dire che $\displaystyle\lim_{t \to t_0} \gamma(t) = l$

equivale a dire che $\displaystyle\lim_{t \to t_0} \gamma_1(t) = l_1$

$\vdots$

$\displaystyle\lim_{t \to t_0} \gamma_n(t) = l_n$

OSS Tutto quello che vale per i limiti di funzioni a valori reali vale di conseguenza anche per le curve (unicità del limite, limite della somma di due funzioni, ecc.)

Ci limiteremo a considerare curve <u>continue</u>, curve cioè per le quali vale

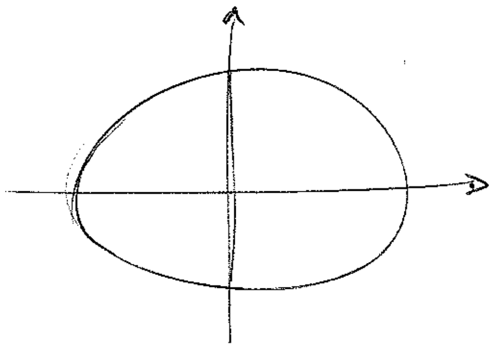
$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in I}} \gamma(t) = \gamma(t_0) .$$

Si chiama <u>sostegno</u> della curva l'immagine di I tramite γ.

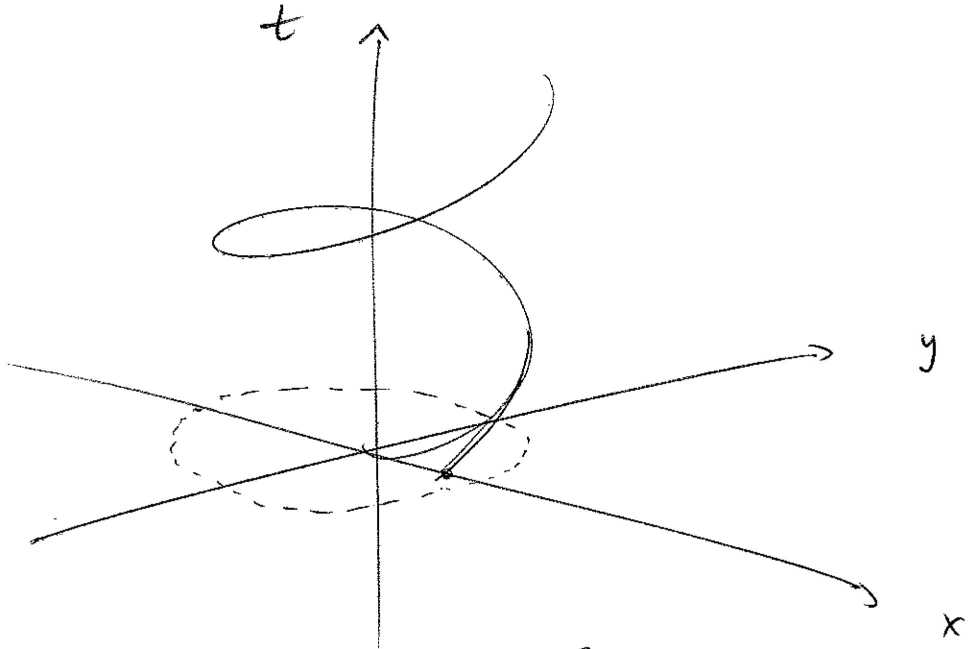
Esempi: $\sigma_1 : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \mapsto (\cos t , \operatorname{sen} t)$$

ha come sostegno

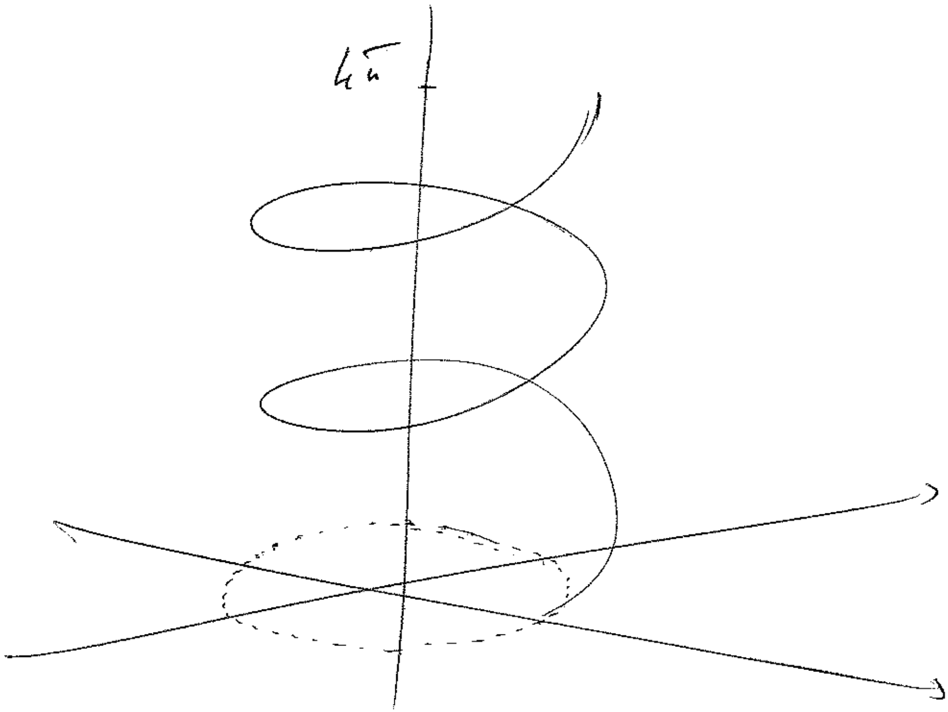


e come grafico



La curva $\sigma_2 : [0, 4\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

ha lo stesso sostegno, ma il seguente grafico



Def Data $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, e $t_0 \in \bar{I}$ diremo

che γ è derivabile in t_0 se

esiste $\displaystyle \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in I}} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$ e $\rightarrow$

ed esso appartiene a $\mathbb{R}^n$.

Oss se $\gamma = (\gamma_1, \dots \gamma_n)$ con $\gamma_i : I \to \mathbb{R}$
$i = 1, \dots n$

si ha che $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t \in I}} \dfrac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} = l \in \mathbb{R}^n$

se e solo se $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{\gamma_i(t) - \gamma_i(t_0)}{t - s} = l_i \in \mathbb{R}$

per $i = 1, \dots n$

$l = (l_1, \dots l_n)$

cioè γ è derivabile in t_0 se e solo se

lo sono $\gamma_1, \dots \gamma_n$.

Il vettore l si chiama vettore tangente

Se $l \neq 0$ alla curva in $\gamma(t_0)$ e si denota

con $\gamma'(t_0)$.

Nomenclatura • una curva si dice regolare

se $\gamma \in C^1(I)$ e $\gamma'(t) \neq 0$

per ogni $t \in I$

• si dice regolare a tratti se

~~$I = [a,b]$, esistono $t_1, \dots t_k$~~, esistono punti distinti $t_1, \dots t_{k-1}$, con $t_1 < t_2 < \dots < t_k$, tali che γ

è ~~regolare in ognuno dei tratti~~ ~~C^1~~

regolare in ognuno dei tratti $[t_{i-1}, t_i]$ $i = 1, \dots k$ dove $I = [t_0, t_k]$

con $\gamma'(t) = 0$ al più per $t \in \{t_1, \dots t_{k-1}\}$

- una curva si dice C^1 a tratti se $\exists\ t_1, \dots t_{k-1}$ interni ad $I = [t_0, t_k]$ tali che γ sia $C^1([t_{i-1}, t_i])$ $i = 1, \dots k$.

- una curva si dice <u>chiusa</u> se, ~~se~~ $I = [a.b]$, si ha $\gamma(a) = \gamma(b)$.

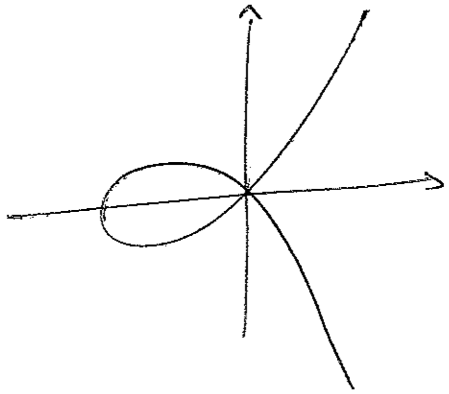
- una curva si dice <u>semplice</u> se $t_1 \neq t_2 \Rightarrow \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ purché almeno uno tra t_1 e t_2 sia interno ad I.

<u>Esempi</u>: la curva σ_1 è chiusa e semplice.

" " σ_2 " " ma non è semplice

La curva $\sigma_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$t \mapsto \big(t(t-1),\ t(t-1)(2t-1)\big)$$



è una curva regolare
non chiusa
non semplice

$$\sigma_3'(t) = \left(2t-1,\ 6t^2-6t+1\right)$$

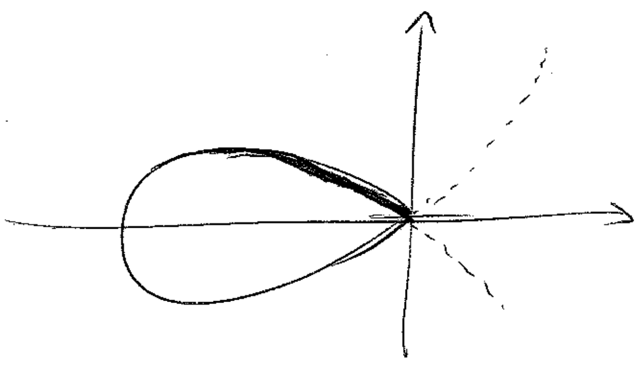
$2t-1=0$ per $t = 1/2$

$6t^2-6t+1=0$ per $t = \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{12}$

$t = \frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{12}$

$|\sigma_3'|(t) \neq 0 \quad \forall t$

Se si restringe σ_3 a $[0,1]$ si ottiene una curva chiusa e semplice

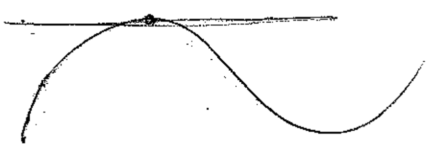


~~Se $\gamma'(t) = 0$ la retta tangente~~

Se γ è regolare esiste la retta tangente alla curva: dato $t_0 \in I$ e $\gamma'(t_0)$ $(\neq 0)$

$\gamma'(t_0)$ è un vettore tangente

$$\tau(t_0) = \frac{\gamma'(t_0)}{|\gamma'(t_0)|}$$ è il versore tangente (vettore tangente di modulo 1)

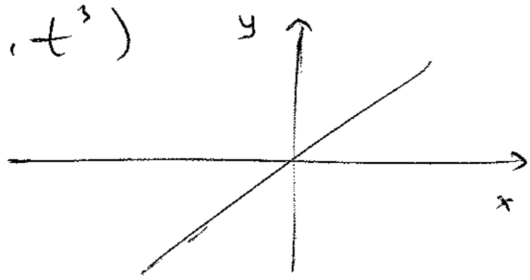


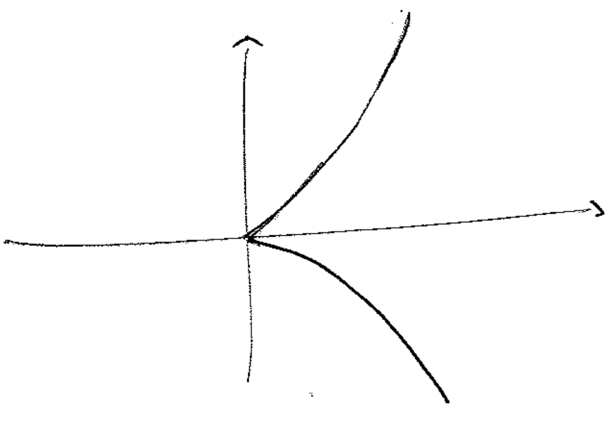
$$r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto \frac{\gamma'(t_0)}{|\gamma'(t_0)|}(t - t_0) + \gamma(t_0)$$

oppure $$r(t) = \gamma'(t_0)(t - t_0) + \gamma(t_0)$$

Se γ non è regolare la retta tangente può esistere oppure no.

<u>Esempi</u>: $\sigma_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$t \longmapsto (t^3, t^3)$$





$\sigma_5 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$t \longmapsto (t^2, t^3)$$

Un'altra parametrizzazione che ha stesso sostegno di σ_4 che ~~sende~~ sia regolare è, ad esempio,

$$\sigma_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto (t, t)$$

Perciò può essere utile considerare classi di curve che si ottengono una dall'altra con un cambiamento di variabile.

Def Due curve $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ e $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ si dicono equivalenti se esiste $\alpha : I \to J$ di classe $C^1(I)$ con $\alpha'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$ tale che

$$\gamma(t) = \varphi(\alpha(t))$$

Commenti 1. α è detto cambiamento di variabile (o parametro) ammissibile

2. Il fatto che $\alpha'(t) \neq 0$ implica che

α' continua

$\alpha' > 0 \ \forall t$ oppure $\alpha'(t) < 0 \ \forall t$

Nel primo caso diciamo che γ e φ hanno la stessa orientazione, nel secondo orientazione opposta.

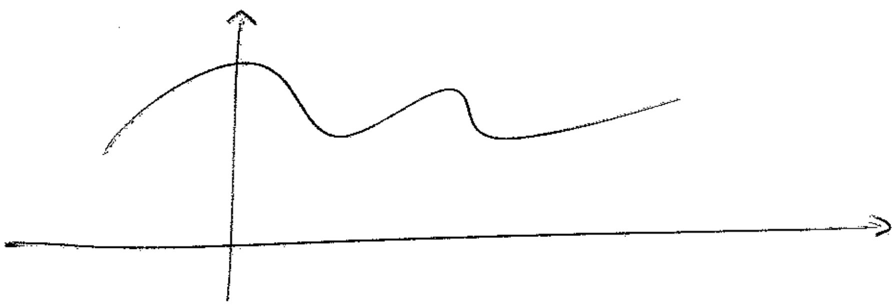
Possiamo così mettere una relazione

di equivalenza sull'insieme delle curve dicendo che due curve sono equivalenti se esiste un cambiamento di variabile ammissibile. All'interno della stessa ~~sotto~~ classe possiamo ~~dividere in due~~ distinguere due sottoclassi, parlando così di <u>curve orientate</u>.

<u>Grafici come curve</u> Un grafico di una funzione

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervallo, può essere il sostegno di una curva, detta cartesiana:

$$I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \mapsto (t, f(t))$$



~~Lunghezza di una curva~~

~~Data la curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$~~

~~Dati due punti x, y~~

Integrale di una funzione a valori vettoriali

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ poniamo per def.

$$\int_a^b \gamma(t)\,dt := \left(\int_a^b \gamma_1(t)\,dt , \; \dots \; \int_a^b \gamma_n(t)\,dt \right)$$

dove $\gamma_j : [a,b] \to \mathbb{R}$ è la j-esima componente di γ.

Teorema (fondamentale del calcolo integrale per funzioni vettoriali)

Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva di classe C^1

Allora
$$\int_a^b \gamma'(t)\,dt = \gamma(b) - \gamma(a).$$

Se γ C^0 $\Rightarrow$ $\Gamma(t) = \int_a^t \gamma(\tau)\,d\tau$ è C^1, $\Gamma' = \gamma$ e inoltre
$$\int_a^b \gamma(\tau)\,d\tau = \Gamma(b) - \Gamma(a)$$

Oss. Valgono, ovviamente, tutte le proprietà dell'integrale ~~...~~ per funzioni scalari

$$\left(\text{linearità}, \quad \int_{[a,b]} = \int_{[a,c]} + \int_{[c,b]} \quad \forall \, c \text{ interno ad } [a,b] \right)$$

...

Meno ovvia è la proprietà enunciata nel seguente lemma.

Lemma Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è integrabile (cioè lo sono le singole componenti) allora

$$\left| \int_a^b \gamma(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |\gamma(t)|\, dt \, .$$

Oss: Si osservi che a sinistra abbiamo un integrale vettoriale, e ~~d~~ destra scalare.

dim: prima di tutto si osservi che $|\gamma|$ è limitata e integrabile (vedi Analisi 1).

Dividendo l'intervallo con una partizione

$$\{ t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_N = b \}$$

Possiamo calcolare le somme di Cauchy - Riemann

$$\sum_{j=1}^{N} |\gamma(t_j)| \, (t_j - t_{j-1}) \xrightarrow[N\to\infty]{} \int_a^b |\gamma(t)| \, dt$$

Considerando $S_N^{(k)} = \sum_{j=1}^{N} \gamma_k(t_j) \, (t_j - t_{j-1}) \qquad k = 1, \dots n$

si ha che $S_N^{(k)} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_a^b \gamma_k(t) \, dt$

$$\left| \left(S_N^{(1)}, \dots S_N^{(n)} \right) \right| \leq \sum_{j=1}^{N} |\gamma(t_j)| (t_j - t_{j-1})$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\left| \left(\int_a^b \gamma_1(t)dt, \dots \int_a^b \gamma_n(t)dt \right) \right| \qquad \int_a^b |\gamma(t)| \, dt.$$

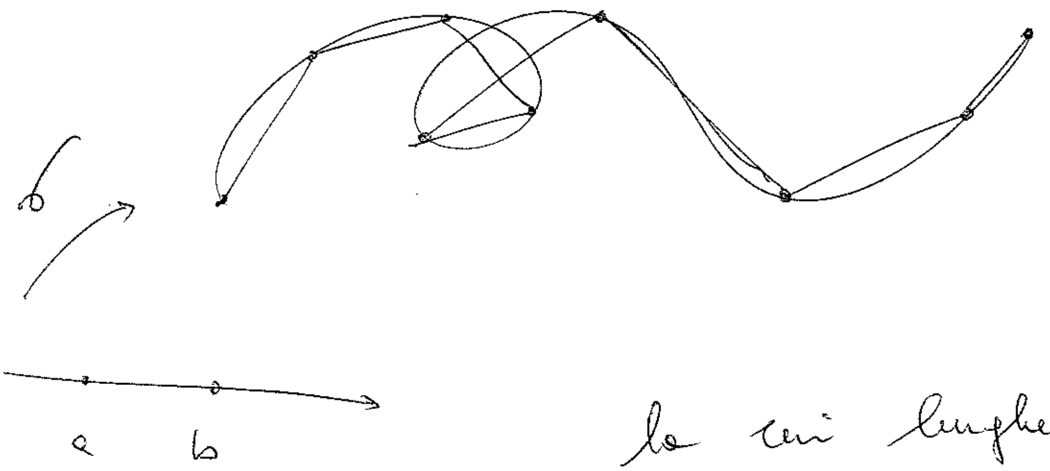
Lunghezza di un arco di curva.

Data una curva $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$

si dice suddivisione di ~~[a,b]~~ I intervallo di $\mathbb{R}$ un insieme finito $\{t_0, t_1, \dots t_n\} \in I$ contenente gli estremi di I se questi gli appartengono e tali che $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$.

Alla suddivisione possiamo far corrispondere una poligonale iscritta alla curva di vertici $\gamma(t_j)$,

$P = \{\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots \gamma(t_n)\}$



Oss

Se anziché τ si considera $\{t_n, \dots t_0\} = \tau'$ si ha che $\ell(\gamma;\tau) = \ell(\gamma;\tau')$

la cui lunghezza ~~...~~

definiamo $\ell(P) := \sum_{j=1}^{n} |[\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)]| = \sum_{j=1}^{n} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|$

$\ell(P) = \ell(\gamma, \tau)$

Date due suddivisioni τ e S si dice che S è più fine di τ se $S \supseteq \tau$.

È facile vedere che se S è più fine di τ allora $\ell(\gamma, \tau) \leq \ell(\gamma, S)$

(EX : considerate $\tau = \{t_0, t_1, \dots t_n\}$ e
$S = \{t_0, t_1, \dots t_k, c, t_{k+1}, \dots t_n\}$)

C.F

Def Una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ si dice rettificabile se

$$\sup \{ l(\gamma, \tau) \mid \tau \text{ suddivisione di } [a,b] \}$$

è finito. In tal caso tale quantità si definisce lunghezza della curva γ. $l(\gamma; [a,b])$.

<u>Esempio</u> Attenzione! Nemmeno se γ è continua su un intervallo compatto necessariamente la lunghezza di γ è finita!

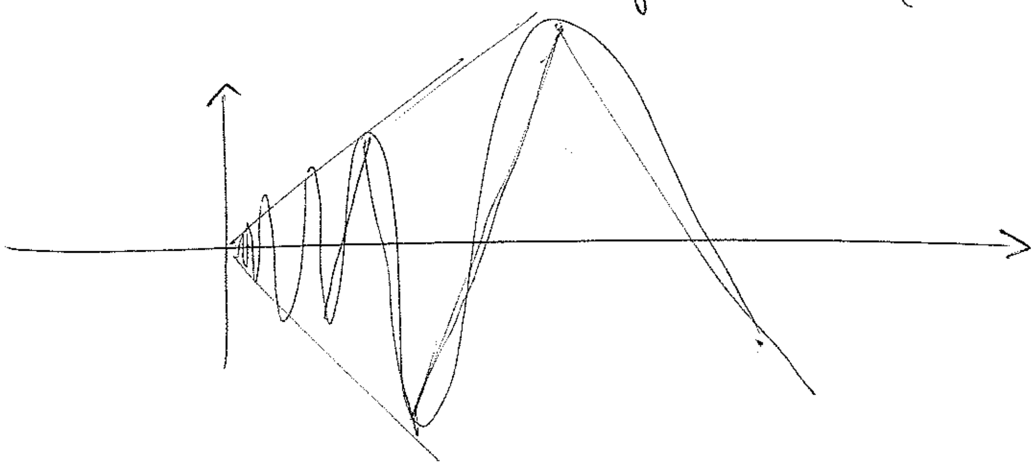
Si consideri

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \begin{cases} t\, e_1 + t \cos\left(\frac{\pi}{t}\right) e_2 & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

γ è continua.

La curva γ è un grafico (è cartesiana



Prendiamo una particolare poligonale inscritta, quella associata alla suddivisione decrescente (è chiaro che è uguale ai fini del calcolo di $l(\gamma)$).

$$\{0, t_n, t_{n-1}, \dots t_1, t_0\}$$

$t_0 = 1 > t_1 > \dots > t_n$ in modo tale che

$\cancel{\cos\left(\frac{\pi}{t_k}\right) = 1 \quad (\text{cioè } t_k =}$

$$\cos\left(\frac{\pi}{t_k}\right) = 1 \quad \text{e} \quad \cos\left(\frac{\pi}{t_{k+1}}\right) = -1$$

$t_0 = 1$ e $\cos \pi = -1$

$t_k = \frac{1}{k+1}$ se k è pari $(k>0)$ $\cos\left(\frac{\pi}{t_k}\right) = -1$

k è dispari $\cos\left(\frac{\pi}{t_k}\right) = 1$

$$l(\gamma, T_n) = \sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{1}{k+1} \cos(\pi(k+1)) - \frac{1}{k} \cos(\pi k) \right|$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k} \right) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

c.8

Infittendo la suddivisione (continuando con le stesse scelte e mandando n all'infinito) si ottiene che

$$\ell(\gamma) \geq \sup_{T_n} \ell(\gamma, T_n) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Proposizione Dato $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, $a, b, c \in I$ con $a < c < b$ si ha che

$$\ell(\gamma; [a,b]) = \ell(\gamma; [a,c]) + \ell(\gamma; [c,b]).$$

(senza dim)

Proposizione Siano I, J due intervalli, $\alpha : J \to I$ di classe C^1 con $\alpha'(t) \neq 0$ $\forall t$ e $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$. Allora

$$\ell(\gamma; I) = \ell(\gamma \circ \alpha; J).$$

dim basta osservare che date $\{t_0, t_1, \dots t_n\}$ una suddivisione di I $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, ~~anche~~ l'insieme $\{\alpha^{-1}(t_0), \dots \alpha^{-1}(t_n)\}$ è una suddivisione (crescente o decrescente) di J. //

<u>Teorema</u> Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva regolare. Allora

$$l(\gamma; [a,b]) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt .$$

<u>dim</u>: data una poligonale P inscritta a γ associata ad una suddivisione $T = \{t_0, t_1, \dots t_n\}$ di $[a,b]$ si ha che

$$|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| = \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t) dt \right| \leq \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\dot\gamma(t)| dt$$

Sommando su j

$$l(P) = l(\gamma; T) = \sum_{j=1}^{n} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\dot\gamma(t)| dt = \int_a^b |\dot\gamma(t)| dt,$$

e passando al sup su P si ottiene

$$l(\gamma; [a,b]) \leq \int_a^b |\dot\gamma(t)| dt .$$

Per quanto riguarda la disuguaglianza opposta si fissi $\varepsilon > 0$ arbitrariamente. Poiché ogni componente di $\dot\gamma$ è uniformemente continua in $[a,b]$ (Heine - Cantor) si può trovare $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$

tale che se $|t-s| < \delta \Rightarrow |\dot{\gamma}(t) - \dot{\gamma}(s)| < \varepsilon$.

Scegliamo quindi una suddivisione

$T = \{t_0, t_1, \dots t_n\}$ in modo tale che $|t_j - t_{j-1}| < \delta$

$\forall j$ tra 1 e n.

Si ha $|\dot{\gamma}(t) - \dot{\gamma}(t_{j-1})| < \varepsilon$
$\forall t \in [t_{j-1}, t_j]$. Quindi

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} |\dot{\gamma}(t)|\, dt \leq$$

$$\leq \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(|\dot{\gamma}(t_{j-1})| + \varepsilon \right) dt =$$

$$= \underbrace{|\dot{\gamma}(t_{j-1})|\, (t_j - t_{j-1})}_{\cancel{= \left|\int_{t_{j-1}}^{t_j} \dot{\gamma}(t_{j-1})\, dt\right|}} + \varepsilon\, (t_j - t_{j-1})$$

~~di conseguenza~~

$$\cancel{\int_a^b |\dot{\gamma}(t)|\, dt \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\varepsilon + |\dot{\gamma}(t_{j-1})| \right) (t_j - t_{j-1})}$$

$$\cancel{= \varepsilon(b-a) + \sum_{j=1}^{n} \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \dot{\gamma}(t_{j-1})\, dt \right|}$$

Si osservi che

$$|\dot{\gamma}(t_{j-1})|\, (t_j - t_{j-1}) = \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \dot{\gamma}(t_{j-1})\, dt \right| =$$

$$= \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left[\dot{\gamma}(t) + \left(\dot{\gamma}(t_{j-1}) - \dot{\gamma}(t) \right) \right] dt \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \dot{\gamma}(t) \, dt \right| + \varepsilon \, (t_j - t_{j-1})$$

Sommando su j si ottiene

$$\int_a^b |\dot{\gamma}(t)| \, dt \leq \sum_{j=1}^{n} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| + 2\varepsilon \, (b-a)$$

$$= \ell(\gamma, [a,b]) + 2\varepsilon \, (b-a).$$

Poiché ciò vale $\forall \varepsilon > 0$ si conclude. //

Parametro d'arco o ascissa curvilinea

Definiamo la quantità, data $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, γ regolare

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\dot{\gamma}(\tau)| \, d\tau \qquad t_0 \in [a,b]$$

Questa esprime la lunghezza ~~della curva~~,
s dell'arco di curva ~~di~~ al variare di
τ tra t_0 e t -

Se si è in grado di calcolare tale
quantità in maniera esplicita e poi
di invertirla (esprimendo t come funzione
di s) è possibile riparametrizzare la
curva rispetto al parametro s , detto
parametro d'arco o ascissa curvilinea.

La particolarità di tale parametro è che
s coincide esattamente con lo spazio percorso
dall'ideale punto mobile che segue la curva.

Questo fa sì che la derivata della
curva parametrizzata con l'ascissa curvilinea
abbia sempre lunghezza 1 .

Infatti

$$\frac{d}{ds}(\gamma \circ t)(s) = \left(\frac{d}{dt}\gamma\right)(t) \cdot \frac{dt}{ds}(s)$$

$$\frac{d}{ds} t(\bar{s}) = \frac{1}{\frac{d}{dt} s(\bar{t})}$$

dove

$\bar{s} = s(\bar{t})$

$\bar{t} = t(\bar{s})$

$$s'(t) = |\gamma'(t)|$$

per cui $$\frac{d}{ds}(\gamma \circ t)(s) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$

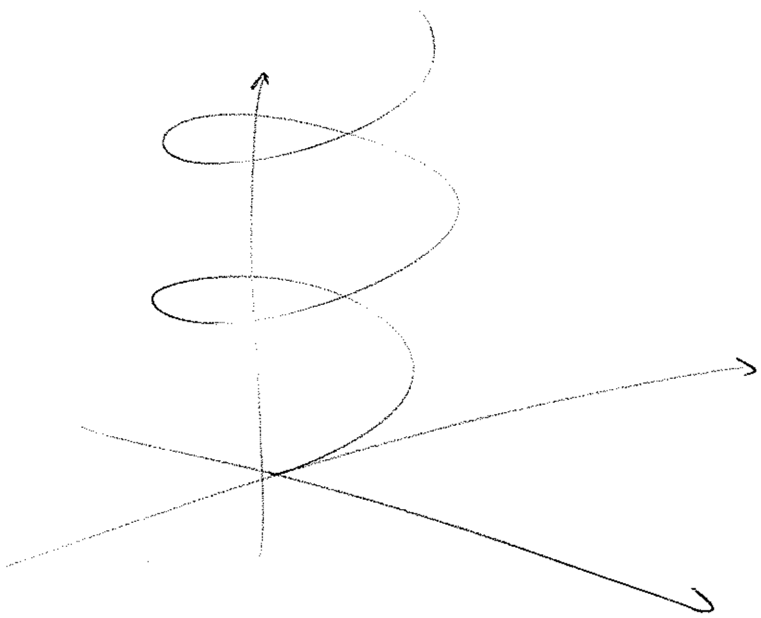
che ha modulo 1

(se γ è regolare $|\gamma'(t)| \neq 0 \quad \forall t$).

Esempio : $\gamma : [0, T] \to \mathbb{R}^3$

$$t \mapsto (r \cos t,\ r \operatorname{sen} t,\ \alpha t)$$

$r, \alpha > 0$



$$\gamma'(t) = (-r \operatorname{sen} t,\ r\cos t,\ \alpha)$$

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{r^2+\alpha^2}$$

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{r^2+\alpha^2}\, d\tau = t\sqrt{r^2+\alpha^2}$$

$$t(s) = \frac{s}{\sqrt{r^2+\alpha^2}} \qquad s \in [0, T\sqrt{r^2+\alpha^2}]$$

$$(\gamma \circ t)(s) = \left(r\cos\frac{s}{\sqrt{r^2+\alpha^2}},\ r\operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{r^2+\alpha^2}},\ \frac{\alpha s}{\sqrt{r^2+\alpha^2}} \right)$$

$$= \tilde{\gamma}(s)$$

$$|\tilde{\gamma}'(s)| = 1$$

$$\cancel{s(t) = t\sqrt{r^2+\alpha^2}}$$

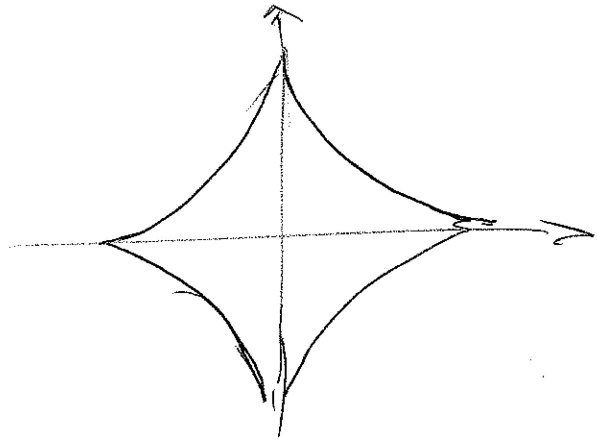
$$\int_0^{T\sqrt{r^2+\alpha^2}} \underbrace{|\tilde{\gamma}'(s)|}_{=1}\, ds = T\sqrt{r^2+\alpha^2}$$

• EX Calcolare la lunghezza della curva

$$\gamma(t) = (\cos^3 t \,,\ \text{sen}^3 t) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$\dot{\gamma}(t) = (-3\cos^2 t \ \text{sen}\, t \,,\ 3\ \text{sen}^2 t \cos t)$$

γ è regolare a tratti



$$\cos^3 t = (\cos^2 t)^{3/2} =$$

$$= (1 - \text{sen}^2 t)^{3/2} =$$

$$= \left(1 - (\text{sen}^3 t)^{2/3}\right)^{3/2}$$

sen $t > 0$
cos $t > 0$

$$x^{2/3} = 1 - y^{2/3} \qquad x^{2/3} + y^{2/3} = 1$$

$$\boxed{|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = 1}$$

$$\ell(\gamma) = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{9 \cos^2 t \ \text{sen}^2 t} \ dt =$$

$$= 4 \cdot 3 \int_0^{\pi/2} \cos t \ \text{sen}\, t \ dt =$$

$$= 12 \ \frac{\text{sen}^2 t}{2} \Big|_0^{\pi/2} = 6$$

C. 12

$$y = \left(1 - x^{2/3}\right)^{3/2}$$

$$\left(x,\ \left(1 - x^{2/3}\right)^{3/2}\right)$$

$$y'(x) = \frac{3}{2}\left(1 - x^{2/3}\right)^{1/2} \frac{2}{3}\, \frac{1}{\sqrt[3]{x}} =$$

$$= \frac{\left(1 - x^{2/3}\right)^{1/2}}{x^{1/3}}$$

$$1 + (y'(x))^2 = 1 + \frac{1 - x^{2/3}}{x^{2/3}} = \frac{1}{x^{2/3}}$$

$$4 \cdot \int_0^1 \frac{1}{x^{1/3}}\, dx = 4 \quad \frac{3}{2} x^{2/3} \Big|_0^1 = 6$$

$$s(t) = \int_0^t 3 \cos\tau \operatorname{sen}\tau \, d\tau = \frac{3}{2} \operatorname{sen}^2\tau \Big|_0^t$$

$t \in (0, \pi/2)$

$$= \frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 t$$

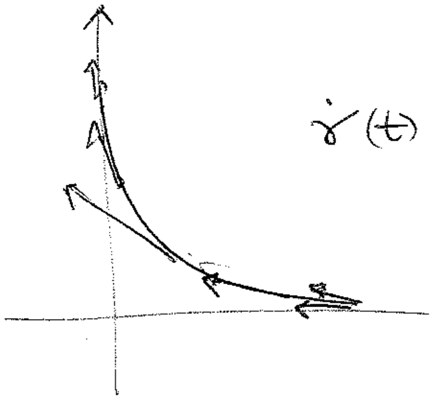
$$\sqrt{\frac{2}{3} s(t)} = \operatorname{sen} t$$

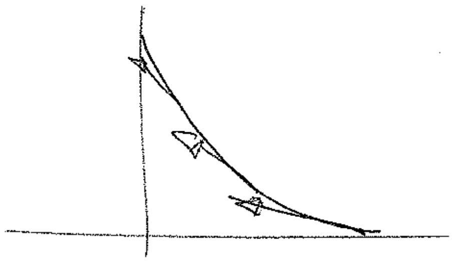
$$t(s) = \operatorname{arcsen} \sqrt{2/3\, s}$$

$$\left(\cos^3 \operatorname{arcsen} \sqrt{\frac{2}{3} s} \;,\; \operatorname{sen}^3 \operatorname{arcsen} \sqrt{\frac{2}{3} s} \right)$$

(4) Usando $\cos \alpha = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}$ per $\underline{\cos \alpha > 0}$

$$\left(\left(1 - \frac{2}{3} s\right)^{3/2}, \left(\frac{2}{3} s\right)^{3/2} \right) = \tilde{\gamma}(s)$$





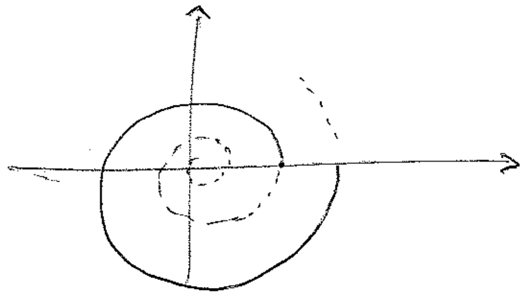
$$\tilde{\gamma}'(s) = \left(-\frac{3}{2} \left(1 - \frac{2}{3} s\right)^{1/2} \frac{2}{3}, \left(\frac{2}{3} s\right)^{1/2} \right)$$

$$\left| \tilde{\gamma}'(s) \right|^2 = 1 - \frac{2}{3} s + \frac{2}{3} s = 1$$

Ex $\quad \gamma(t) = \left(e^t \cos t \,,\, e^t \operatorname{sen} t \right)$

spirale logaritmica $\qquad t \in [0, 2\pi]$

calcolarne la lunghezza



$$\gamma'(t) = \left(e^t(\cos t - \operatorname{sen} t) \,,\, e^t(\operatorname{sen} t + \cos t) \right)$$

$$|\dot\gamma(t)| = e^t \left(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t - 2 \operatorname{sen} t \cos t + \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 2 \operatorname{sen} t \cos t \right)^{1/2}$$

$$= e^t \sqrt{2}$$

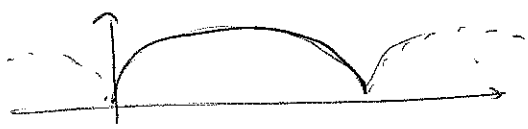
$$\int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, e^t \, dt = \sqrt{2}\left(e^{2\pi} - 1 \right)$$

$$s(t) = \int_0^t |\dot\gamma(\tau)| \, d\tau = \sqrt{2}\left(e^t - 1 \right)$$

$$e^t = \frac{s(t)}{\sqrt{2}} + 1$$

$$t(s) = \log\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \right)$$

Ex arco di cicloide



$$\gamma(t) = \big(a\,(t - \operatorname{sen} t)\,,\ a\,(1 - \cos t) \big)$$

$$t \in (0, 2\pi)$$

$$\dot\gamma(t) = \big(a\,(1 - \cos t)\,,\ a \operatorname{sen} t \big)$$

$$|\dot\gamma(t)| = a\sqrt{1 + \cos^2 t - 2\cos t + \operatorname{sen}^2 t}$$

$$= \sqrt{2}\, a \sqrt{1 - \cos t} =$$

$$= \sqrt{2}\, a \sqrt{1 - \cos^2 \frac{t}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2}} = 2a \left|\operatorname{sen} \frac{t}{2}\right|$$

$$\cos t = \cos 2\left(\frac{t}{2}\right) = \cos^2 \frac{t}{2} - \operatorname{sen}^2 t/2$$

con $t \in (0, 2\pi)$ $\quad \operatorname{sen} \frac{t}{2} > 0$

$$\int_0^{2\pi} 2a \operatorname{sen} \frac{t}{2}\, dt = 2 \cdot 2a \left(-\cos \frac{t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 8a$$

$\cancel{\dot\gamma(0) = (a, a)}$

$\cancel{\frac{s}{2a} = \operatorname{sen} t/2}$

$\cancel{t(s) = 2 \operatorname{arcsen}\left(\frac{s}{2a}\right)}$

$\cancel{s(t) = 2a \operatorname{sen} \frac{t}{2}}$

$$s(t) = \int_0^t |\dot\gamma(\tau)|\,d\tau = 4a\left(-\cos\frac{\tau}{2}\right)\Big|_0^t =$$

$$= 4a\left(1-\cos\frac{t}{2}\right)$$

$$\frac{1}{4a}\,s(t) = 1 - \cos t/2$$

$$\cos\frac{t}{2} = 1 - \frac{s}{4a}$$

$$t = 2\arccos\left(1-\frac{s}{4a}\right)$$

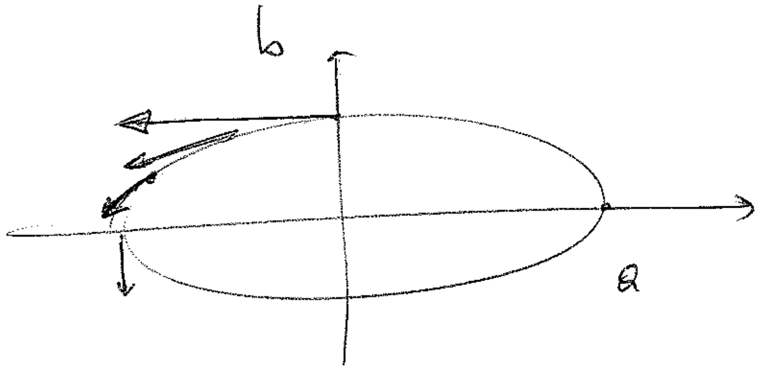
- $(\cosh t, \operatorname{senh} t, t)$ $\quad t \in (a,b)$ $\quad$ lunghezza
- $(t, 3t^2, 6t^3)$
- arco di parabola $\quad x - \frac{y^2}{2} - 5 = 0$

  (un po' di calcoli) $\quad -2 \le y \le 2$
- $y = \log x \quad x \in \left[\frac{3}{4}, \frac{4}{3}\right]$

• $\gamma(t) = (a \cos t, \; b \,\mathrm{sen}\, t)$

$a, b > 0$

$t \in [0, 2\pi]$ — è regolare

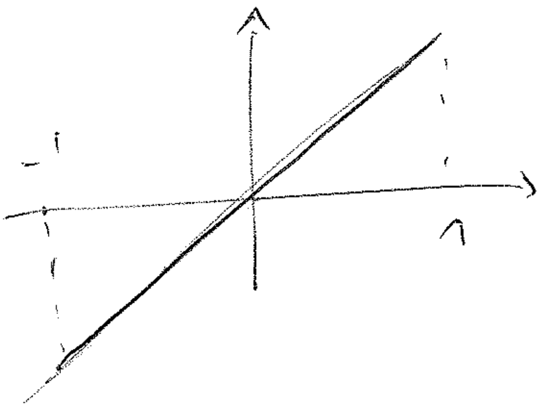


Non si muove con velocità costante!

$$|\dot{\gamma}(t)| = |(-a \,\mathrm{sen}\, t, \; b \cos t)| =$$
$$= \sqrt{a^2 \,\mathrm{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t}$$

• Non si riesce a calcolare la lunghezza con integrazioni elementari.

Provare per credere.



$\gamma(t) = (t^3, t^3)$

$t \in [-1, 1]$

$$\ell(\gamma) = 2\sqrt{2} = \int_{-1}^{1} \sqrt{18 t^4}\, dt$$
$$= 3\sqrt{2} \int_{-1}^{1} t^2 \, dt$$

γ regolare a tratti, ma non regolare

Cerco il parametro d'arco

$$s(t) = \int_{-1}^{t} |\dot{\gamma}(\tau)|\, d\tau =$$

$$= \sqrt{2}\ \tau^3 \Big|_{-1}^{t} = \sqrt{2}\ (t^3 + 1)$$

$$t(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{2}} - 1 \right)^{1/3}$$

$$s : [-1, 1] \longrightarrow [0, 2\sqrt{2}]$$
$$t \mapsto \sqrt{2}\ (t^3 + 1)$$

$$t : [0, 2\sqrt{2}] \longrightarrow [-1, 1]$$
$$s \longmapsto \left(\frac{s}{\sqrt{2}} - 1 \right)^{1/3}$$

$$\tilde{\gamma}(s) := \gamma(t(s)) = \left(\frac{s}{\sqrt{2}} - 1 ,\ \frac{s}{\sqrt{2}} - 1 \right)$$

$$\frac{d}{ds} \tilde{\gamma}(s) = \left(1/\sqrt{2} ,\ 1/\sqrt{2} \right)$$

si muove
di velocità
costante
di modulo 1

Oss: $\tilde{\gamma}$ è regolare anche se γ non lo era

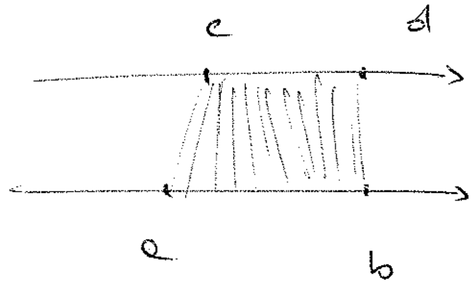
Abbiamo visto che un cambio di parametro è una mappa biettiva $\alpha : I \to J$, I, J intervalli di $\mathbb{R}$, con $\alpha \in C^1$ e $\alpha'(t) \neq 0 \ \forall t$.

Oss: $\alpha'(t) \neq 0 \Rightarrow \alpha'(t) > 0 \ \forall t \in I$

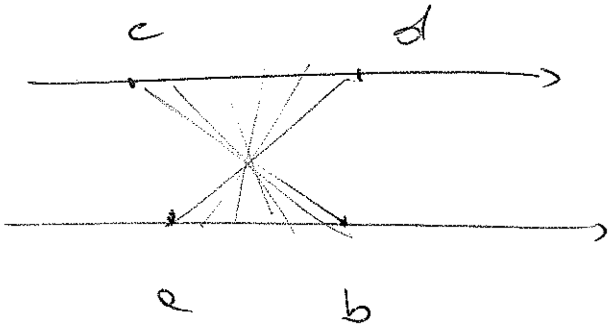
oppure $\alpha'(t) < 0 \ \forall t \in I$

se $I = [a, b] \qquad J = [c, d]$

$\alpha' > 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha(a) = c \\ \alpha(b) = d \end{array}$



$\alpha' < 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha(a) = d \\ \alpha(b) = c \end{array}$



Esempi

Teorema $\int_\gamma f \, ds$ è indipendente dalla parametrizzazione di γ.

Cioè se γ e φ sono due curve equivalenti e regolari

$$\int_\gamma f \, ds = \int_\varphi f \, ds$$

Oss: In particolare la lunghezza di una curva regolare non dipende dalla parametrizzazione anche se γ e φ orientate diversamente!

dim Ex $\quad (\gamma = \varphi \circ \alpha)$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f(x,y) = x^2 + 3y$

$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} \qquad \gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$

$$f \circ \gamma(t) = \cos^2 t + 3 \operatorname{sen} t$$

$$|\dot\gamma(t)| = 1$$

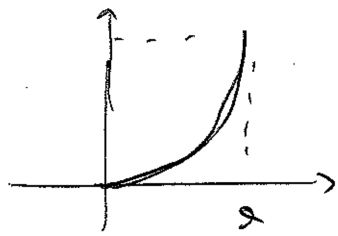
$$\int_\gamma f \, ds = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + 3 \operatorname{sen} t) \, dt$$

se $\gamma_\alpha : [0, \alpha] \to \mathbb{R}^n$

$\gamma_\alpha(t) = \left(\cos \frac{2\pi}{\alpha} t, \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\alpha} t \right)$

Ex Verificare che $\int_{\gamma_\alpha} f \, ds$ è indipendente da α

Ex Calcolare la lunghezza dell'arco di parabola $y = \frac{1}{2}x^2$ $x \in [0, a]$



(a lato) $\gamma(t) = \left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$

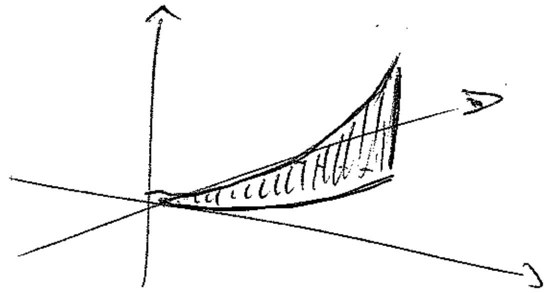
$$\dot{\gamma}(t) = (1, t)$$

$$\ell(\gamma) = \int_0^a |\dot{\gamma}(t)|\, dt = \int_0^a \sqrt{1+t^2}\, dt$$

Calcolare poi l'integrale di linea

$$\int_\gamma f\, d\ell \qquad f(x,y) = x$$

$$\int_0^a t\sqrt{1+t^2}\, dt =$$



$$= \frac{1}{3}\left(1+t^2\right)^{3/2}\Big|_0^a =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(1+a^2\right)^{3/2} - 1\right]$$

$\int_\gamma f\,ds$ dove γ circonferenza di raggio 1 e centro $(0,0)$

e $f(x,y) = x^2 - 2y$

$|\dot\gamma(t)| = 1 \qquad f(\gamma(t)) = \cos^2 t - 2 \operatorname{sen} t$

$$\int_\gamma f\,ds = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t - 2 \operatorname{sen} t)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \pi$$

Idem se considero solo $f(x,y) = x^2$