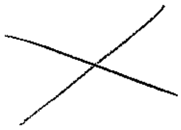
Funzioni implicite

$f(x) = c$ insieme di livello

$f(x,y) = x^2+y^2 = 0$ · un punto

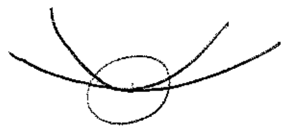
$x^2-y^2 = 0$



due curve incidenti

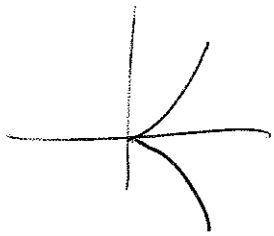
$x^2+y^2 = -1$ $\emptyset$

$(y-x^2)(y-2x^2) = 0$



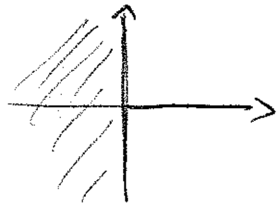
due curve tangenti

$x^3-y^2 = 0$



curve non regolari

$$\begin{cases} 0 & x<0 \\ xy & x \geq 0 \end{cases} = 0$$



insieme che è un piano unito ad una semiretta

In tutti i casi $f(0,0) = 0$

ma l'insieme in cui $f = 0$ può essere molte cose.

Teorema (di Dini o della funzione implicita)

Siano A aperto di $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in A$,
$f : A \to \mathbb{R}$ di classe $C^1(A)$.
Si suppone che

$$f(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad f_y(x_0, y_0) \neq 0 .$$

Allora $\exists$ un intorno I di x_0 e una (unica) funzione $g : I \to \mathbb{R}$, $g \in C^1(I)$, tale che

$$f(x, g(x)) = 0 \qquad x \in I$$

Inoltre

$$g'(x) = - \frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))} \qquad x \in I.$$

1.

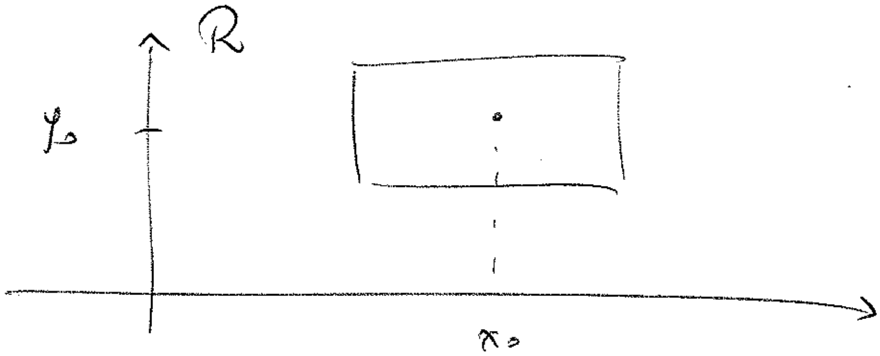
dim $\exists z \circ$ si suppone che $f_y(x_0, y_0) > 0$

Poiché f_y è continua esiste un rettangolo

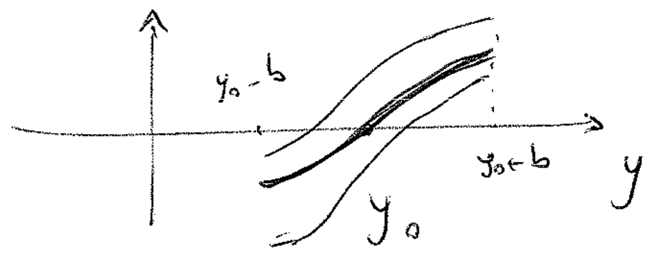
$$R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] = I_1 \times J_1$$

nel quale $f_y > 0$ (grazie al teorema della permanenza del segno).

Questo significa che per ogni $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$



la funzione $J_1 \ni y \mapsto f(x,y)$ è strettamente crescente.



Fissando in particolare $x = x_0$ si ha che

$y \mapsto f(x_0, y)$ è crescente e

siccome $f(x_0, y_0) = 0$ si ha che

$$f(x_0, y_0 - b) < 0 \quad \text{e} \quad f(x_0, y_0 + b) > 0$$

Sempre dal teorema della permanenza del segno esiste un intorno I di x_0, $I = (x_0 - h, x_0 + h)$ con $0 < h < a$, tale che

$$\begin{aligned} f(x, y_0 - b) &< 0 \\ f(x, y_0 + b) &> 0 \end{aligned} \qquad x \in (x_0 - h, x_0 + h)$$

Dalle stretta monotonia di $y \mapsto f(x,y)$ $\forall x \in I_1$,

e in particolare $x \in I$, si ha che

~~$\exists ! y$~~ (teorema degli zeri)

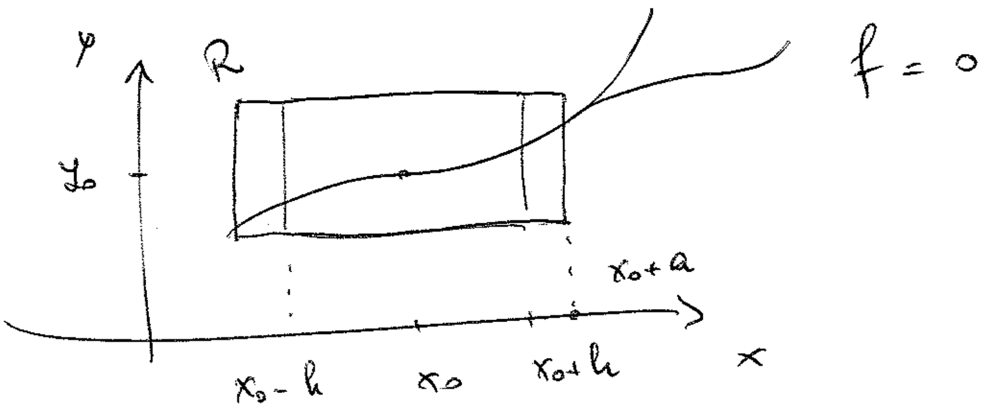
$$\forall x \in I \quad \exists ! \, y \in [y_0 - b, y_0 + b] \text{ tale che}$$

$$f(x,y) = 0.$$

Definiamo $g(x) = y$ per $x \in I$.

~~2 Continuità di g. Vogliamo mostrare che $\forall \bar{x} \in I$ e $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tale che se $|x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(\bar{x})| < \varepsilon$.~~

2. Continuità e derivabilità di g.



Consideriamo $x_1, x_2 \in (x_0 - h, x_0 + h) \subseteq [x_0 - a, x_0 + a]$

$$g(x_1), \; g(x_2) \qquad \begin{aligned} g(x_1) &= y_1 \\ g(x_2) &= y_2 \end{aligned}$$

Dal teorema del valor medio $\exists\ (\xi_1, \xi_2)$

compreso nel segmento $[(x_1, y_1),\ (x_2, y_2)]$

tale che

$$f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) = \nabla f(\xi_1, \xi_2) \cdot (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

e poiché $f(x_j, g(x_j)) = 0$ si ha

$$0 = f_x(\xi_1, \xi_2)(x_2 - x_1) + f_y(\xi_1, \xi_2)\big(g(x_2) - g(x_1)\big) \quad \circledast$$

$$|g(x_2) - g(x_1)| \leq \frac{\max\limits_R |f_x(\xi_1, \xi_2)|}{\min\limits_R |f_y(\xi_1, \xi_2)|} |x_2 - x_1|$$

Poiché f_x è continua ammette massimo su R

" f_y " " e $f_y > 0$ in R

il minimo di f_y in R è positivo, per cui

$\exists\ c$ t.c.

$$\frac{\max\limits_R |f_x|}{\min\limits_R |f_y|} = c$$

per cui g è continua. Sempre da $\circledast$

si ricava

$$\frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} = - \frac{f_x(\xi_1, \xi_2)}{f_y(\xi_1, \xi_2)}$$

Passando al limite $x_2 \to x_1$ si ha che

esiste g' e inoltre

$$g'(x_1) = - \frac{f_x(x_1, g(x_1))}{f_y(x_1, g(x_1))} .$$

Oss Se in un punto (x_0, y_0) si ha che $f_y(x_0,y_0) = 0$ ma $f_x(x_0, y_0) \neq 0$ esisterà una funzione implicita $h(y)$ tale che $f(h(y), y) = 0$.

Oss: da
$$g'(x) = - \frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))}$$

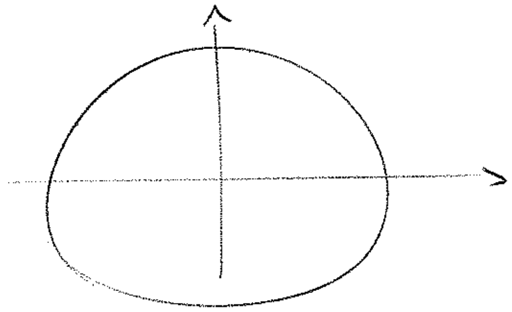
si ha che se f è di classe C^2 anche g è derivabile due volte e

$$g''(x) = \frac{-f_y(f_{xx} + f_{xy} g') + f_x(f_{xy} + f_{yy} g')}{f_y^2}$$

$(f \in C^k \Rightarrow g \in C^k$ e $\dots)$

Esempio $\quad f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

$f(x,y) = 0$



Considerariamo il punto $(0,1) = (x_0, y_0)$

$f(0,1) = 0 \quad$ e $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1) \neq 0$

$\exists$ un intorno I di 0 e una $g : I \to \mathbb{R}$ t.c.

$f(x, g(x)) = 0$, cioè l'insieme di livello zero localmente è il grafico di una funzione g. In questo caso

$$g(x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad x \in (-1, 1)$$

$$g(x_0) = y_0 = 1$$

Possiamo anche sviluppare g calcolando

$$g'(x) = -\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} \qquad g'(0) = 0$$

$f_x(x,y) = 2x$
$f_y(x,y) = 2y$

$$g''(x) = -\frac{1}{4(1-x^2)}\left[+4\sqrt{1-x^2} + \frac{4x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$

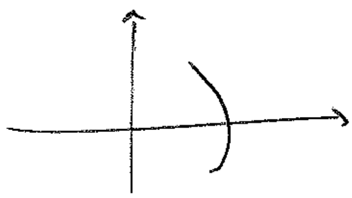
$$= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x^2}{(1-x^2)^{3/2}}$$

$$g''(0) = -1 .$$

Se ci fermiamo al 2° ordine

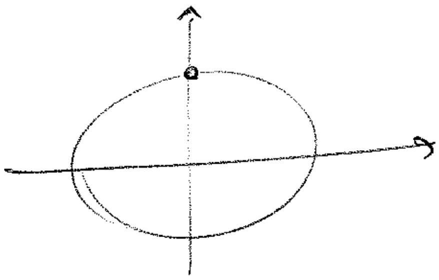
$$g(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

Se si considera $f(1,0)$ si ha $f_y(1,0) = 0$ ma $f_x(1,0) \neq 0$. Si può allora esprimere il luogo di zeri come grafico di una funzione $h(y)$



$$h(y) = \sqrt{1-y^2}$$

Oss: lo stesso luogo ~~di~~ zeri può essere luogo di zeri di infinite funzioni



esempi

$$f_1(x,y) = x^2+y^2-1$$

$$f_2(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}-1$$

$$f_3(x,y) = 1-x^2-y^2$$

$$f_4(x,y) = \log(x^2+y^2)$$

$$(x_0,y_0) = (0,1)$$

$$f_i(0,1) = 0 \quad e \quad \frac{\partial f_i}{\partial y}(0,1) \neq 0$$

$$g(x) = \sqrt{1-x^2} \qquad x \in (-1,1)$$

$$g'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 2x \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = 2y$$

$$-\frac{\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,g(x))}{\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,g(x))} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

D.4 bis

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$-\frac{\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,\varphi(x))} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1-x^2}}\,\frac{\sqrt{x^2+1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial f_4}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

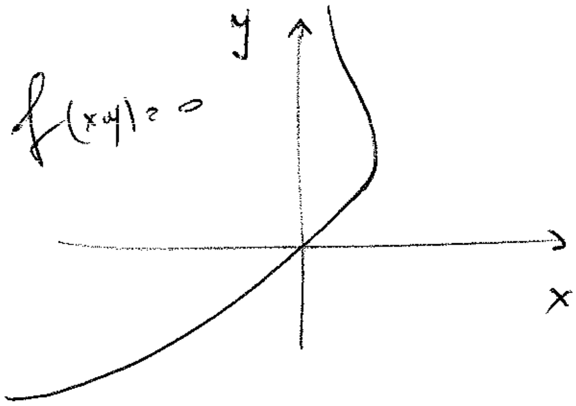
$$-\frac{\partial f_4}{\partial x}(x,g(x)) \cdot \left(\frac{\partial f_4}{\partial y}(x,g(x))\right)^{-1} =$$

$$= -\frac{2x}{x^2+1-x^2}\,\frac{x^2+1-x^2}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Altro esempio: $\quad f(x,y) = xe^y - y$

$$f(x,y) = 0 \qquad f_y(0,0) = -1$$

Posso vedere il luogo degli zeri localmente come grafico di una funzione g



$$f_x(x,y) = e^y$$
$$f_y(x,y) = xe^y - 1$$

$$g(0) = 0 \qquad g'(0) = -\frac{f_x(0,0)}{f_y(0,0)} = 1$$

$$g''(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{f_x(x,g(x))}{f_y(x,g(x))}\right) =$$

$$= \frac{f_y\left(-f_{xx}(x,g(x)) - f_{xy}(x,g(x))\, g'(x)\right) + \left(f_{xy} + f_{yy}g'\right)f_x}{f_y^2(x,g(x))}$$

$$= \frac{-f_y f_{xx} + f_{xy} f_x + f_x f_{xy} - f_{yy} f_x^2 \frac{1}{f_y}}{f_y^2}$$

$$= \frac{-f_y^2 f_{xx} + \cancel{f_{xy} f_y^2} + 2 f_x f_y f_{xy} - f_{yy} f_x^2}{f_y^3}$$

D.5

$$g''(x) = -\frac{f_{xx}(x,g(x))\, f_y^2(x,g(x)) + f_{yy}(x,g(x))\, f_x^2 - 2 f_{xy} f_x f_y}{f_y^3(x,g(x))}$$

per cui $g''(0) = +2$

$f_{xx}(x,y) = 0 \qquad f_{xy}(x,y) = e^y \qquad f_{yy} = x e^y$

$g'''(0) =$

Anche $f_x(0,0) = 1 \neq 0$ per cui $\exists\, h$

t.c. $f(x,y) = f(h(y), y) = 0$

$h(y) = y e^{-y} \qquad h'(y) = e^{-y} - y e^{-y}$

$h''(y) = -e^{-y} - e^{-y} + y e^{-y}$

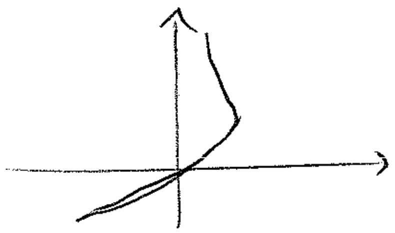
~~$h(y) =$~~ $\qquad h'''(y) = 2e^{-y} + e^{-y} - y e^{-y}$

$h(y) = y - y^2 + \frac{1}{2} y^3 + o(y^3)$

Per calcolare $g'''(x)$ bisognerebbe derivare $g''(x)$ data dall'espressione $\star$.

Per questo caso (visto che siamo fortunati) e abbiamo una espressione esplicita per h si avrà che

il luogo di zeri



è localmente grafico sia di h che di g e si ha

$$g \circ h(y) = y \qquad h \circ g(x) = x$$

(almeno in un intorno di $(0,0)$).

Per cui

$$g'(h(y)) = \frac{1}{h'(y)}$$

$$g''(h(y))\, h'(y) = -\frac{h''(y)}{(h'(y))^2}$$

$$g'''(h(y)) = \frac{-h'''(y)\,(h'(y))^3 + 3\,(h'(y))^2\,(h''(y))^2}{(h'(y))^7}$$

(e ovviamente si può continuare se si sa che g ed h sono derivabili)

da cui

$g(0) = 0$, $g'(0) = 1$, $g''(0) = 2$

$g'''(0) = 9$

$$g(x) = x + x^2 + \frac{3}{2}x^3 + o(x^3)$$

Oss: Se non si riesce ad esplicitare la funzione g si può comunque trovarne uno sviluppo di Taylor usando f (oppure come precedentemente conoscendone esplicitamente l'inversa).

Oss: se $f_y(x_0,y_0) \neq 0$ ed $\exists\, g$ t.c. $f(x, g(x)) = 0$

e se anche $f_x(x_0,y_0) \neq 0$ ed $\exists\, h$ t.c. $f(h(y), y) = 0$

$\Rightarrow$ (localmente) $h = g^{-1}$ e $g = h^{-1}$

Caso di funzioni scalari di 3 variabili.

- Se $f : A \to \mathbb{R}$, A aperto di $\mathbb{R}^3$, $(x_0, y_0, z_0) \in A$, f di classe $C^1(A)$.

Si supponga che

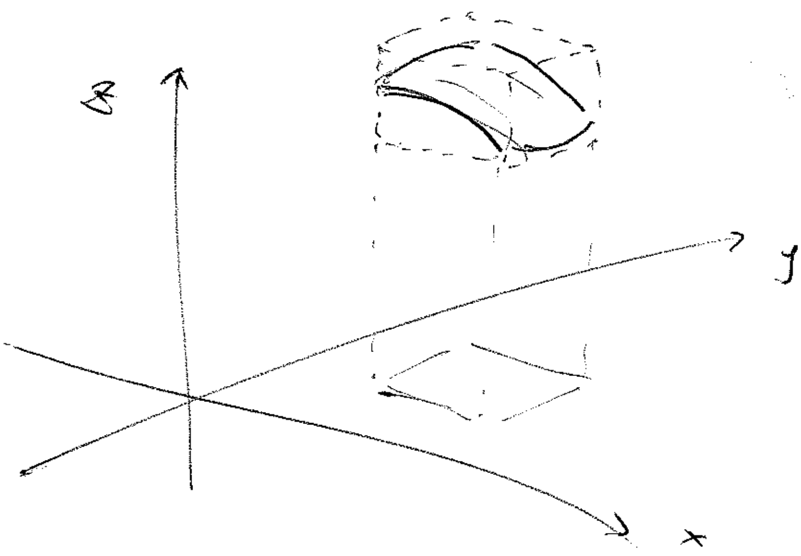
$$f(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad e \quad f_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

Allora esiste un intorno U di (x_0, y_0, z_0) in $\mathbb{R}^3$ tale che

$Z \cap U$ è localmente grafico di una funzione $z = g(x, y)$

Z_f luogo degli zeri di f

$$Z_f = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0 \}$$



Se U ad esempio è $[x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \times [z_0 - c, z_0 + c]$

D.F

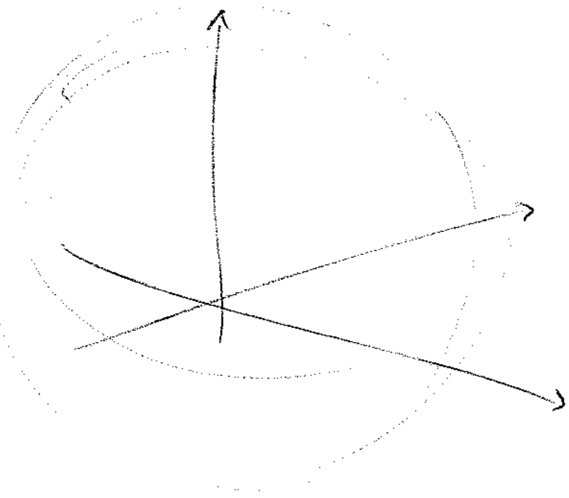
Il luogo degli zeri di f è (localmente) una superficie, grafico di una funzione di due variabili.

(dimostrazione: analoga alla precedente in due dimensioni)

Inoltre g risulta di classe C^1 nell'intorno di (x_0, y_0) e si ha che

$$g_x(x,y) = -\frac{f_x(x,y,g(x,y))}{f_z(x,y,g(x,y))}$$

$$g_y(x,y) = -\frac{f_y(x,y,g(x,y))}{f_z(x,y,g(x,y))}$$



Esempio

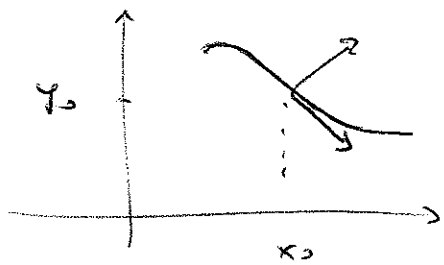
$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$f_z(P_0) = \frac{2}{\sqrt{3}} \neq 0$$

$$g(x,y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

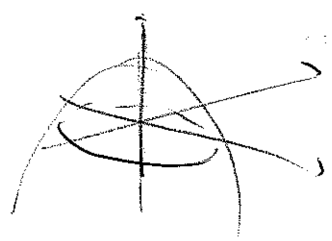
In dimensione 2 $\qquad f(x, g(x)) = 0$



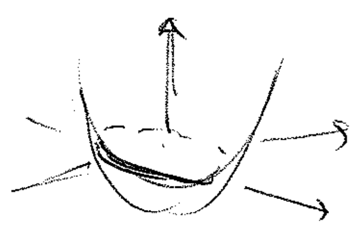
Il ~~vettore~~ versore tangente è quello dato da (uno dei due possibili)

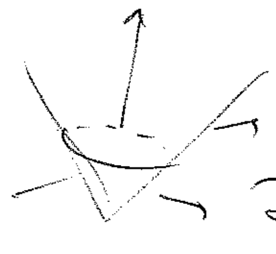
$$\frac{(1, g'(x))}{\sqrt{1 + (g'(x))^2}} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{1+(g'(x))^2}}, \frac{g'(x)}{\sqrt{1+(g'(x))^2}}\right) =: \tau$$



oppure





D.S

Quello normale è dato da (uno dei due)

$$\nu := \left(\frac{-g'(x)}{\sqrt{1+(g'(x))^2}} , \frac{1}{\sqrt{1+(g'(x))^2}} \right)$$

Se scriviamo $g'(x) = - \dfrac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))}$

si ottiene

$$\nu = \left(\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x)) \sqrt{1 + \frac{f_x^2}{f_y^2}}} , \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{f_x^2}{f_y^2}}} \right)$$

$$= \left(\frac{f_x}{\frac{f_y}{|f_y|} \sqrt{f_x^2 + f_y^2}} , \frac{|f_y|}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}} \right)$$

se $f_y(x_0, y_0) > 0$ $\qquad \nu = \dfrac{\nabla f(x,y)}{|\nabla f(x,y)|}$

se $f_y(x_0, y_0) < 0$ $\qquad \nu = - \dfrac{\nabla f(x,y)}{|\nabla f(x,y)|}$

Analogamente in dimensione 3:

sappiamo che se $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

e f è costante su una curva allora

il gradiente è ortogonale a tale curva.

Osserviamo che in realtà è ortogonale

alla superficie (in questo caso insieme

di livello 0) data localmente come

grafico, perché ortogonale a tutte le curve in S

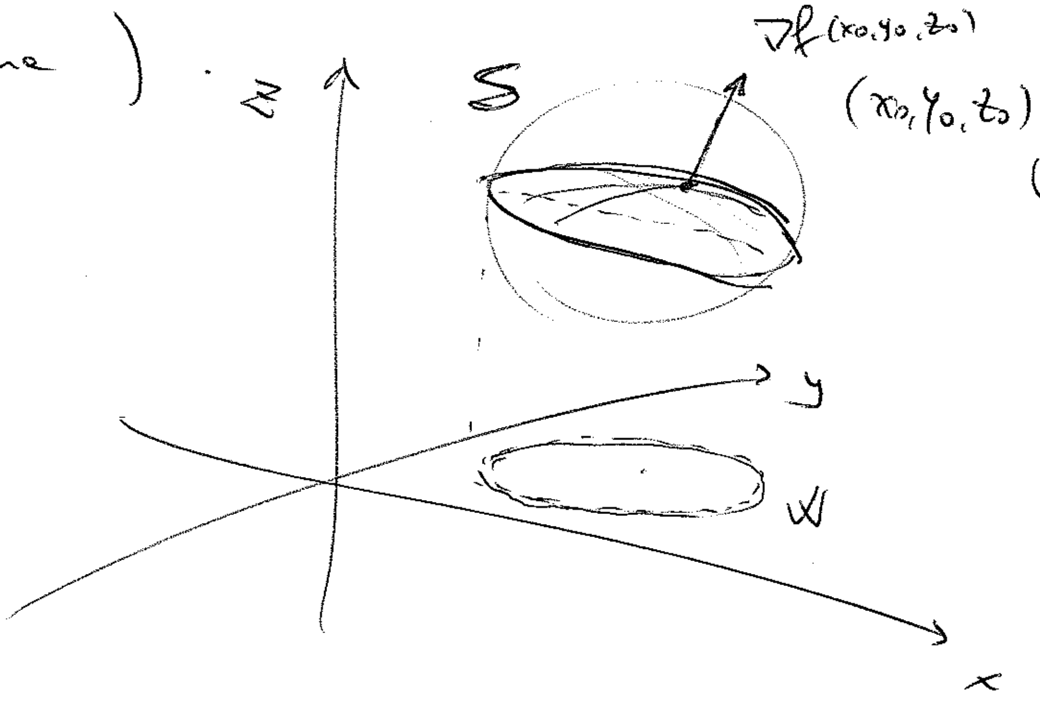
Supponiamo che $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ e $f_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

e che si possa vedere $Z_f \cap U$ come grafico

di una funzione g ($Z_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = 0\}$

e U un intorno di (x_0, y_0, z_0) che esista

per il teorema).



D.9

Se vediamo $S = Z_f \cap U$ come grafico si ha che

$$f(x, y, g(x,y)) = 0 \quad e$$

$$S = \text{grafico di } g : W \longrightarrow \mathbb{R}$$

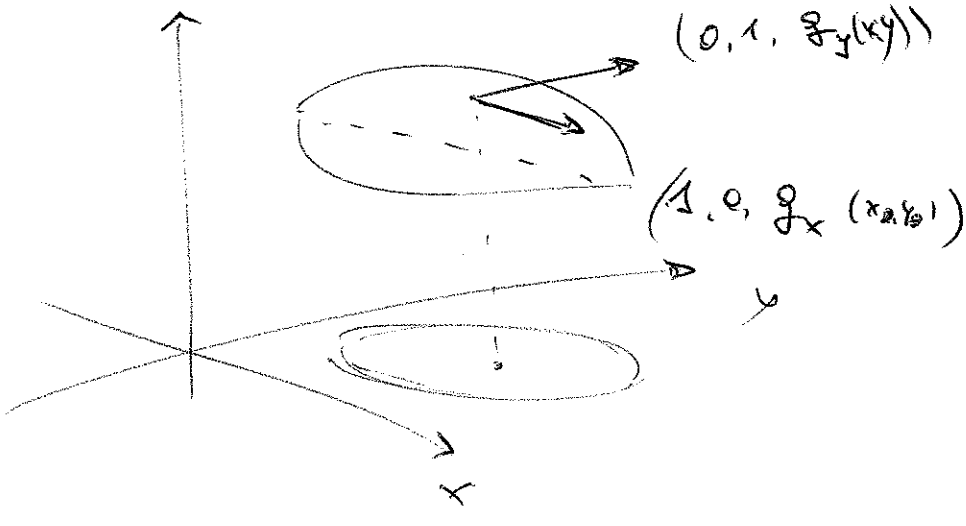
$(x,y) \mapsto (x, y, g(x,y))$ $\quad (x,y) \in W$ è una parametrizzazione di S

$$\tau_1 = (1, 0, g_x(x_0,y_0))$$
$$\tau_2 = (0, 1, g_y(x_0,y_0))$$

vettori tangenti alle ~~piano~~ superficie S in (x_0, y_0, z_0)

(piano tangente dato da

$$g_x(x_0,y_0)\cdot(x - x_0) + g_y(x_0,y_0)(y - y_0) + g(x_0,y_0)$$



Un vettore normale al piano tangente è dato da un vettore ortogonale a tutti i vettori del piano tangente, ma è sufficiente che lo sia a $(1, 0, g_x(x,y))$ e a $(0, 1, g_y(x,y))$ con $(x,y) \in W$.

$\boxed{\text{~~Normalizziamo~~}}$ Cerco un vettore $n(x,y)$ t.c.

$$\begin{cases} n_1 + n_3 g_x = 0 \\ n_2 + n_3 g_y = 0 \end{cases} \qquad \left(\leftrightarrow \begin{cases} (n, \tau_1) = 0 \\ (n, \tau_2) = 0 \end{cases} \right)$$

Scelgo $n_3 = 1$ per semplicità e ottengo

$$n(x,y) = \left(-g_x(x,y), \; -g_y(x,y), \; 1 \right)$$

Se normalizziamo n ~~tutti i vettori si ottiene~~ :

$$\frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla g|^2}} \left(-g_x(x,y), \; -g_y(x,y), \; 1 \right) =: \nu(x,y)$$

e usando $\displaystyle g_x(x,y) = - \frac{f_x(x,y,g(x,y))}{f_z(x,y,g(x,y))}$

$$g_y(x,y) = -\frac{f_y(x,y,g(x,y))}{f_z(x,y,g(x,y))} \qquad \text{si ha}$$

$$\nu(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\nabla f(x,y,g(x,y))}{|\nabla f(x,y,g(x,y))|} & f_z > 0 \\[2ex] -\dfrac{\nabla f(\dots)}{|\nabla f(\dots)|} & \text{se } f_z(x,y,g)<0 \end{cases}$$

∇f è ortogonale alle superfici di livello

Se abbiamo un sistema

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

si può pensare che (in condizioni buone) questo sistema sia soddisfatto sull'intersezione di due superfici e quindi da punti che stanno su una curva e si può ragionevolmente pensare che si possa esprimere in dipendenza da una sola delle tre variabili.

$$F(x_0,y_0,z_0) = G(x_0,y_0,z_0) = 0$$

Supponiamo che $F_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0$

allora esiste f tale che (localmente)

$$F(x,y,f(x,y)) = 0 \qquad (x,y) \in U$$

Se chiamiamo $\phi(x,y)$ la funzione

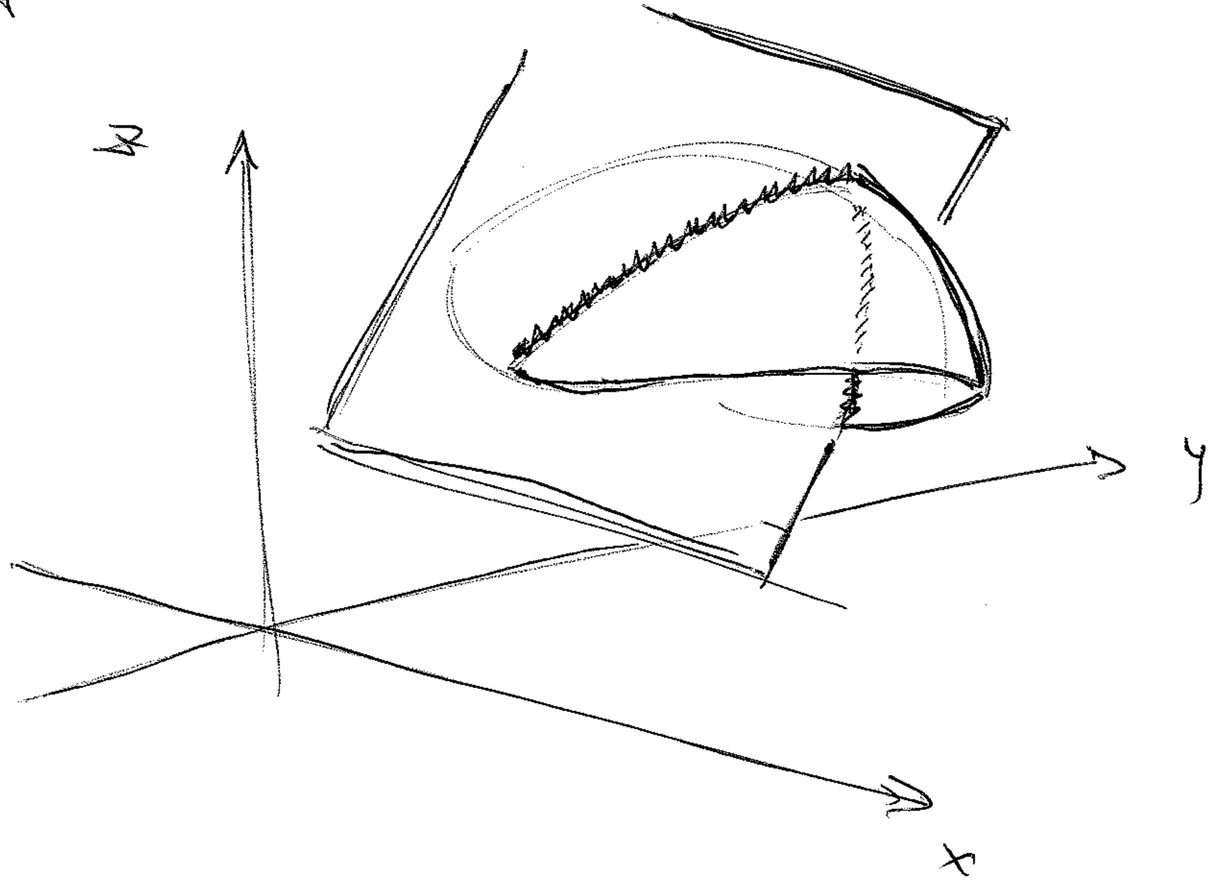
$$G(x,y,f(x,y)) \quad \text{con } \phi(x_0,y_0) = 0, \text{ e}$$

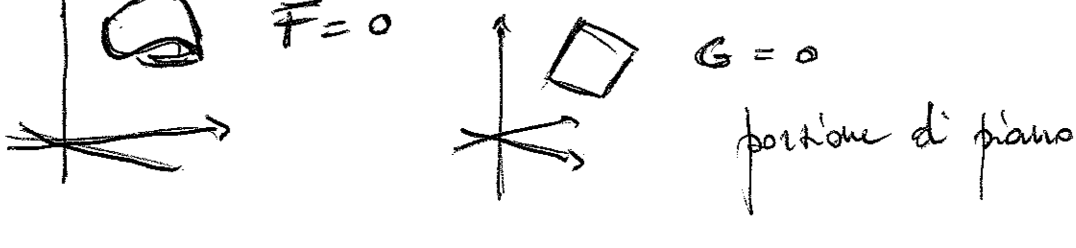
si assume che $\phi_y(x_0,y_0) \neq 0$

allora esisterebbe un intorno I di x_0 tale che per $x \in I$ è definita una funzione g tale che

$$\phi(x, g(x)) = 0$$

e quindi l'intersezione Z_F con Z_G può essere vista come grafico di una funzione di una variabile





Teorema (di Dini (caso generale))

Consideriamo una funzione F definita in un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ e indichiamo con $(x,y) = (x_1, \dots x_m, y_1, \dots y_n)$ le variabili.

~~Denotiamo per semplicità~~ $F : A \to \mathbb{R}^n$.

Supponiamo che F sia di classe $C^1(A)$ e poniamo (per semplicità di notazione)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

Si osservi che la matrice Jacobiana di F

è una matrice $(m+n) \times n$ e la matrice $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ è quadrata $(n \times n)$.

<u>Enunciato</u> Con F come enunciato precedentemente se risulta che, dato $(x_0, y_0) \in A$,

$$F(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad \det\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \neq 0$$

allora esistono un intorno U di x_0, $U \subseteq \mathbb{R}^m$, un intorno V di y_0, $V \subseteq \mathbb{R}^n$, ed un'unica funzione $f : U \to V$ tali che

$\forall x \in U \ \exists!\, y \in V$ tale che

$y = f(x)$ e quindi

$$F(x, f(x)) = 0$$

(il luogo di zeri di F, Z_F, localmente è un grafico).

Inoltre $f : U \to \mathbb{R}^n$ è di classe $C^1(U)$ e risulta

$$Df(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))\right)$$

senza dim

Invertibilità locale

Data una funzione $f : A \to B$, con A e B aperti di $\mathbb{R}^n$, ci chiediamo quando la funzione è invertibile, di classe C^1 e con inversa di classe C^1, almeno localmente.

Def Dati due aperti di $\mathbb{R}^n$, A e B, e $f : A \to B$ di classe C^1, $x_0 \in A$, diremo che f è un diffeomorfismo ~~locale~~ ~~U e le sue immagini $f(U) \subseteq B$~~ in x_0 se esiste $U \subseteq A$, $x_0 \in U$, tale che

$f_{|_U} : U \to f(U)$ sia invertibile con inversa di classe C^1.

Teorema (invertibilità locale) Dati A e B aperti di $\mathbb{R}^n$ e $f : A \to B$ di classe $C^1(A)$, $x_0 \in A$. Se risulta

$$\det \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = \det Df(x_0) \neq 0$$

allora f è un diffeomorfismo locale in x_0.

Senza dim (si usa il teorema delle funzioni implicite applicato a

$$F(x,y) = y - f(x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} = -Df$$

che ha determinante non nullo).

Ex Verificare che l'equazione

$$f(x,y) = 0$$

definisce implicitamente una funzione $g(x)$ ($y = g(x)$) con

1) $f(x,y) = x e^{y} + y e^{x}$

in un intorno di $(0,0)$

Scrivere lo sviluppo al 2° ordine per g.

2) $f(x,y) = e^{x-y} + x^2 + y^2 - e(x+1) - 1$

in un intorno di $(0,-1)$.

Provare che 0 è un punto di minimo locale per g

Ex Verificare che, detto Γ_c l'insieme di livello c della funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3+y^3-3xy$, è, almeno localmente, una curva regolare per ogni $c\in\mathbb{R}$, tranne al più due valori. Trovare i due valori.

Ex Verificare che, data $f(x,y,z) = \operatorname{arctg} z + xz - y^3 - 1$, l'equazione $f(x,y,z) = 0$, definisce implicitamente una funzione $g(x,y)$ e il luogo di cui è localmente il grafico di g nel punto $(0,-1,0)$.

Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di g in tale punto.

Massimi e minimi vincolati

Supponiamo di voler minimizzare (o massimizzare) una funzione F in un insieme che è dato come luogo di zeri di una funzione G.

Se $G : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile e

$$|\nabla G(x)| \neq 0 \qquad \forall\, x \in A$$

allora localmente il luogo degli zeri è il grafico di una funzione di $n-1$ variabili, funzione regolare.

Poiché l'insieme $V = \{G = 0\}$ è un insieme di livello il gradiente di G è ortogonale all'insieme V.

Se $x_0 \in V$ è un punto di minimo (o di massimo) locale per F limitatamente e V si ha che per ogni curva

$\gamma : (-\delta, \delta) \to V$ $\quad$ γ regolare

$\gamma(0) = x_0$

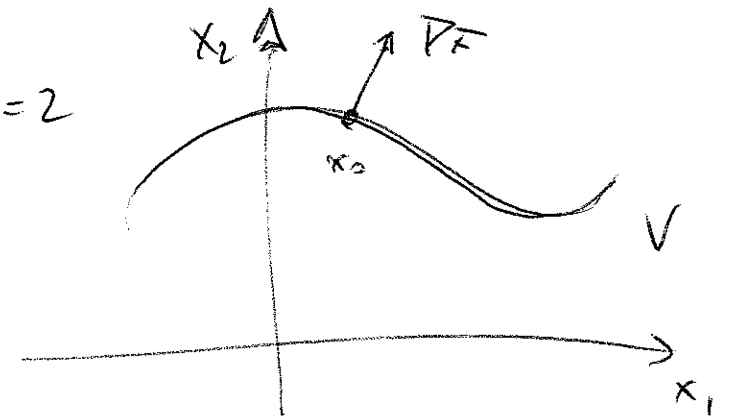
$F(\gamma(0)) \leq F(\gamma(t)) \quad \forall t \in (-\delta, \delta)$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}(F \circ \gamma)(0) = 0$

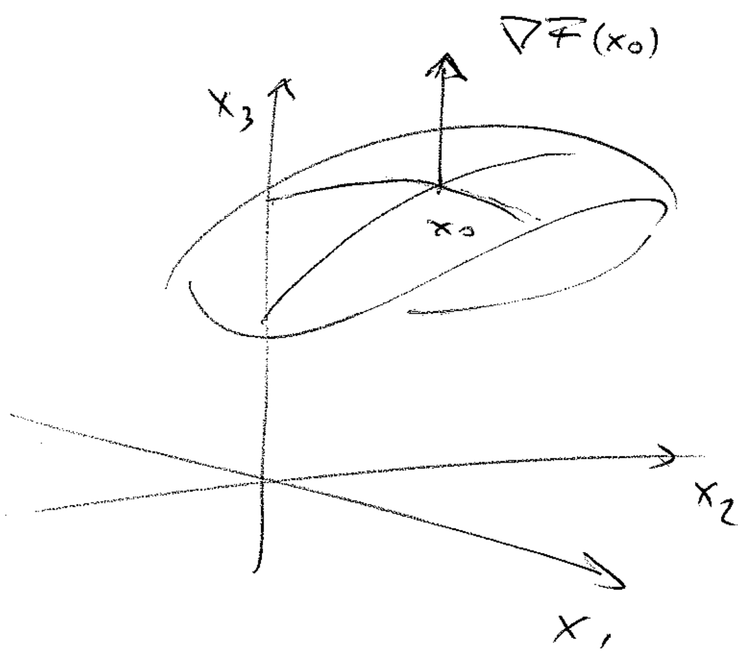
ma $\frac{d}{dt}(F \circ \gamma)(t) = \nabla F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$

quindi $\nabla F(x_0) \perp$ Sostegno di γ

$n = 2$



$n = 3$



Conclusione: sia $\nabla F(x_0)$ che $\nabla G(x_0)$ sono ortogonali al vincolo (al piano tangente al vincolo se $n = 3$, alla retta tangente se $n = 2$; in generale all'iperpiano tangente al vincolo che ha dimensione $n-1$).

Di conseguenza $\nabla F(x_0)$ e $\nabla G(x_0)$ stanno sulla stessa retta e quindi sono paralleli.

Esiste quindi $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c.

$$
\circledast \quad \begin{cases} \nabla F(x_0) + \lambda \nabla G(x_0) = 0 \\ x_0 \in V, \text{ cioè } G(x_0) = 0 \end{cases}
$$

Il punto x_0 può essere allora cercato tra i punti che soddisfano $\circledast$ in tutto $\mathbb{R}^n$.

Teorema (dei moltiplicatori di Lagrange)

Sia V il luogo degli zeri di una funzione $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e sia F una funzione di classe C^1 definita in un intorno di V. I punti di massimo e minimo, anche locali, di F in V sono punti stazionari liberi per la funzione di $n+1$ variabili

$$H(x_1, \dots x_n, \lambda) = F(x_1, \dots x_n) + \lambda G(x_1, \dots x_n)$$

Se il vincolo è dato dall'intersezione di più luoghi di zeri

$$\begin{cases} G_1(x_1, \dots x_n) = 0 \\ \vdots \\ G_k(x_1, \dots x_n) = 0 \end{cases}$$

il minimo e il massimo vanno ricercati tra i punti stazionari di

$$H(x_1, \dots x_n, \lambda_1, \dots \lambda_k) = F(x) + \lambda_1 G_1(x) + \dots + \lambda_k G_k(x)$$