SUCCESSIONI DI FUNZIONI

1. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni
$$f_n(x) = \frac{nx}{n^2+x^2}, \quad x \in R.$$

2. Studiare convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni
$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{2n}{n+x} & x \geq n \\ 1 & 0 \leq x \leq n. \end{cases}$$

3. Studiare convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni
$$f_n(x) = \log\left(1+\frac{x}{n^2}\right), \quad x \geq 0.$$

4. Studiare convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni
$$f_n(x) = \begin{cases} nx & 0 \leq x \leq 1/n \\ -\dfrac{nx}{n-1} + \dfrac{n}{n-1} & 1/n \leq x \leq 1. \end{cases}$$

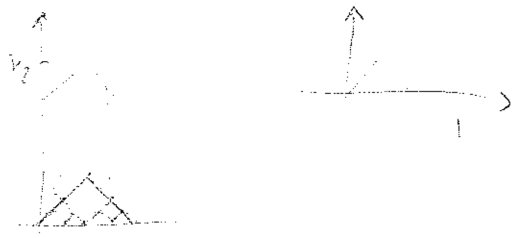
5. Studiare convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni
$$f_n(x) = \sqrt{x^2+\frac{1}{n}}, \quad x \in R.$$

6. Studiare convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni
$$f_n(x) = x(1-x)^n \log n, \quad x \in [0,1].$$

7. Calcolare il seguente limite
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^2}{x+n} \sin nx dx.$$

8. Data la successione di fuzioni
$$g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+n}}, \quad x \in R,$$
studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni
$$f_n(x) = \int_0^x g_n(t)dt.$$

9. Considerando le successioni di funzioni
$$f_n(x) = \sqrt{n}\chi_{[1/(2n),1/n]}(x), \quad g_n(x) = \chi_{[n,n+1]}(x),$$
convincersi che non è sempre vero che
$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)dx = \int \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$



10. **(Funzione di Weierstrass)** Studiare convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni definita per ricorrenza da

$$f_1(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1/2] \\ 1-x & x \in [1/2,1], \end{cases}$$

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} f_n(2x) & x \in [0,1/2] \\ \dfrac{1}{2} f_n(2x-1) & x \in [1/2,1]. \end{cases}$$

11. **(Scala di Cantor)** Studiare convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni definita per ricorrenza da

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}x & x \in [0,1/3] \\ \dfrac{1}{2} & x \in [1/3,2/3] \\ \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2} & x \in [2/3,1], \end{cases}$$

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} f_n(3x) & x \in [0,1/3] \\ \dfrac{1}{2} & x \in [1/3,2/3] \\ \dfrac{1}{3} f_n(3x-2) & x \in [2/3,1]. \end{cases}$$