

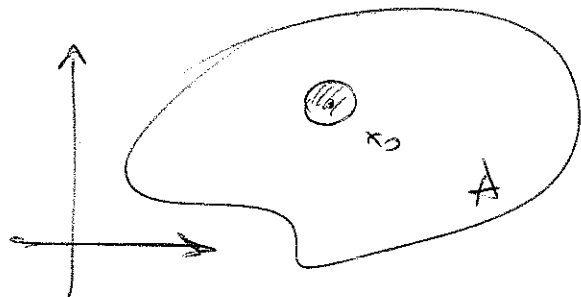
# Funzioni di n variabile

• Qualche grafico

• Def (continuità)  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in A$ ,  
 è continua in  $x_0$  se

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tale che se  $|x - x_0| < \delta$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

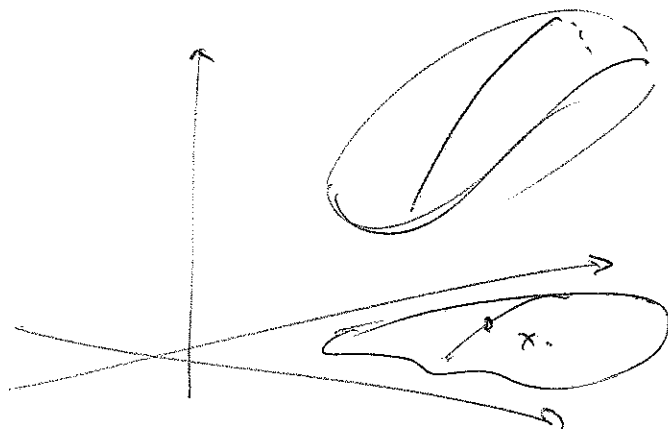
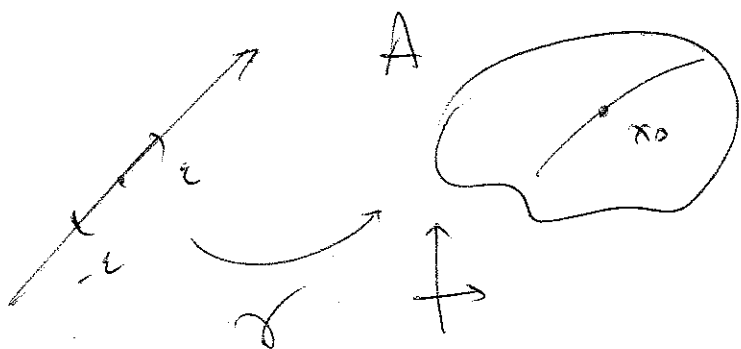


Se  $f$  è continua in  $x_0$

e  $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n A$  ( $\varepsilon > 0$ )

continua con  $\gamma(0) = x_0$

allora  $f \circ \gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  è continua  
 in 0



Se  $f \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  è continue  
 con  $\gamma$  continua,  $\gamma(0) = x_0$   
 non è detto che  $f$  sia continua in  $x_0$ .

Esempio:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

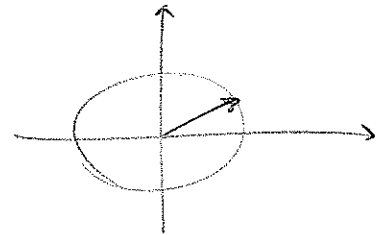
$f$  è continua in  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

Vi chiedo se è continua in  $(0, 0)$ .

Restringo  $f$  ad una retta

$$v = (v_1, v_2) \quad v_1^2 + v_2^2 = 1$$

e considero la retta  $tv$



$$\lim_{t \rightarrow 0} f(tv_1, tv_2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 v_1^2 v_2}{t^4 v_1^4 + t^2 v_2^2} = 0$$

$$\text{se } v_1 = 0 \quad = 0$$

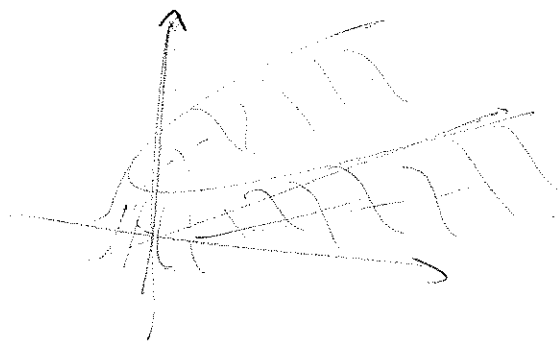
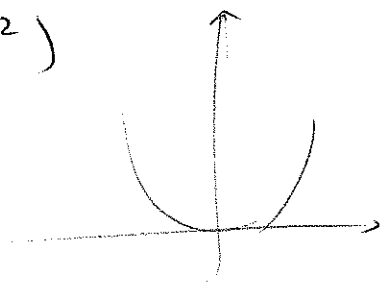
$$\text{se } v_2 = 0 \quad = 0$$

$$\begin{matrix} v_1 \neq 0 \\ v_2 \neq 0 \end{matrix} \quad = 0$$

Quindi  $f$  è continua se ristretto alle rette  
 per l'origine.

Questo non garantisce che  $f$  sia continua in  $x_0$ . Consideriamo la curva  $y = x^2$  parametrizzata da  $\gamma(t) = (t, t^2)$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f \circ \gamma(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4}{t^4 + t^4} = 1/2$$



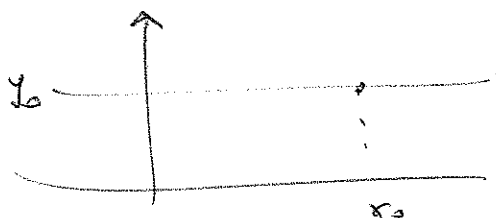
## Derivate parziali

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ ,  $x_0 \in A$ .

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0 + h, x_2^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)}{h}$$

Se considero  $f(x, y)$  e  $(x_0, y_0) \in A$  ( $n=2$ )

La funzione  $x \mapsto f(x, y_0)$  è una funzione di una variabile.



Posso quindi derivarlo come una funzione di una variabile. Se chiamiamo

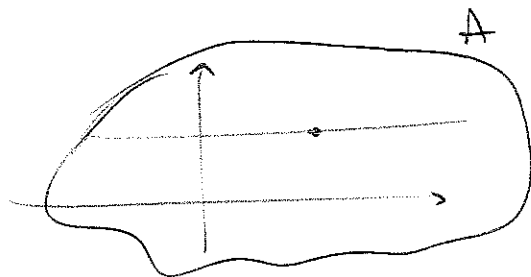
$$g(x) := f(x, y_0)$$

$$g'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Si denota con  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$

l'equivalente a derivare  $f$  ristretta alle curve

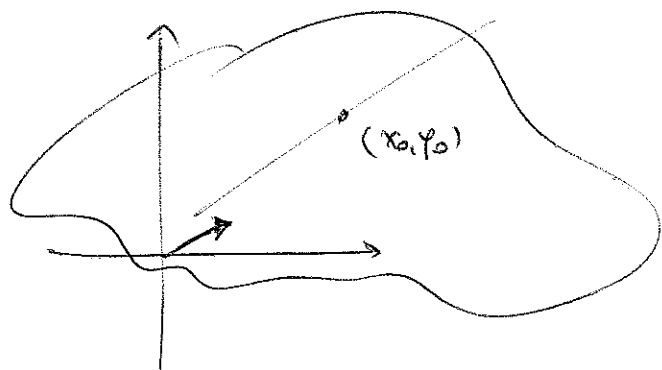


$$(x_0, y_0) + t(1, 0)$$

$$t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

$$f((x_0, y_0) + t(1, 0)) = f(x_0 + t, y_0) = h(t)$$

$$h'(0) = g'(x_0) =: \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$



Se si considera una retta differente

$$(x_0, y_0) + t(v_1, v_2)$$

$$v_1^2 + v_2^2$$

$f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2)$  e si derivate questa funzione si ottiene:

detta  $g(t) = f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2) \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hv_1, y_0 + hv_2) - f(x_0, y_0)}{h} \end{aligned}$$

Se tale limite esiste, finito, si chiama derivata direzionale di  $f$  in  $(x_0, y_0)$  nella direzione  $v$ .

In generale se  $A \in \mathbb{R}^n$  e  $x_0 \in A$  si dice che  $f$  è derivabile in  $x_0$  nella direzione  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $|v| = 1$ , se esiste finito il limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h}$$

e si denota con  $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ .

Se  $v = \cancel{(1, 0, \dots, 0)}$   $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$   
 le derivate direzionali nella direzione  $e_i$   
 si dice anche derivate parziale rispetto  
 alla  $i$ -esima variabile  $x_i$  e si denota  
 con

$$D_{x_i} f(x_0) = D_i f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

Si consideri per esempio  $f(x, y) = 3x^2 \sin y$

Se calcolo le derivate di  $f$

rispetto ad  $(1, 0)$ , cioè  $\frac{\partial f}{\partial x}$ , sto  
 derivando  $\frac{d}{dx} f(x, y_0)$ , per cui

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x \sin y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 \cos y$$

Se  $g(x, y) = (\sin x + \log y)^3$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \cancel{3(\sin x + \log y)^2} 3(\sin x + \log y)^2 \cos x$$

Come per la continuità, anche il fatto  
 che una funzione ammetta le derivate  
 anche lungo tutte le direzioni non  
 garantisce la continuità!

exists in  $(0,0)$

me & mon e  
continue !

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } v_1 = 0 \quad 0 \quad v_2 = 0 \\ \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{v_1^2 v_2}{v_1^2 + v_2^2} = \frac{v_1^2}{v_2} & \text{se } v_1 \neq 0 \end{cases}$$

 ~~$\phi(0,0) = v_1$~~ 

però abbiamo  
gli v.t.o. di  $f$   
non è continua  
in  $(0,0)$ .

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \begin{cases} 0 & \text{se } v_2 = 0 \\ \frac{v_1^2}{v_2} & \text{se } v_2 \neq 0 \end{cases}$$

4.4

Ex Trova gli insiemi massimali di  
definizione delle seguenti funzioni e  
le loro derivate parziali

$$f_1(x, y) = x \log(xy^2)$$

$$f_2(x, y) = \cos \frac{x}{y} + \cos \frac{y}{x}$$

$$f_3(x, y) = \log(x \log y)$$

$$f_4(x, y, z) = \sqrt{x^2 - y^2 + z^2}$$

Calcoli

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0)$$

$$g_1(x, y) = y\sqrt{x}$$

$$g_2(x, y) = y\sqrt{|x|}$$

Verificare per che valgono le relazioni

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

$$f = f_1, f_2, f_3, f_4$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f_4}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f_4}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f_4}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f_4}{\partial z} \right)$$

~~Definizione~~

Diciamo che  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^k$

è si dice derivabile in un punto  $x_0 \in A \subseteq \mathbb{R}^n$

se  $f$  ammette tutte le derivate

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$  in  $x_0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Si dice che  $f$

derivabile in  $A$  se  $f$  è derivabile in ogni

punto  $x_0 \in A$ .  $(C^1)$  Se  $f$  è derivabile in

un punto  $x_0 \in A$  si chiama

gradiente il vettore

$$\nabla f(x_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

Differenziabilità Date  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto,

$x_0 \in A$ , diciamo che  $f$  è differenziabile nel punto  $x_0$  se esiste una applicazione lineare  $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Lh}{|h|} = 0$$

Sia  $n=1$ : se  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  intervallo

$x_0 \in I$ ,  $f$  regolare e piana.

Chi è  $L$ ?

1° fatto) Se  $f$  è differenziabile in  $x_0$  allora è continua in  $x_0$

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) =$$

$$= \lim_{|h| \rightarrow 0} (f(x_0 + h) - f(x_0) - Lh)$$

diviso  
per  $|h|$

2° fatto) Se  $f$  è differenziabile in  $x_0$   
 allora  $f$  è derivabile in ogni direzione  
 $v$ ,  $|v| = 1$ . Basta scegliere

$$h = tv \quad t \in \mathbb{R} \quad |h| = |t|$$

e si ha che

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0) - L(tv)}{|t|} = 0$$

~~$f(x_0 + tv)$~~  quasi

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0) - L(tv)}{t} \right| &= \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0) - L(tv)}{t} = 0 \end{aligned}$$

quasi

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = Lv$$

$$\text{e } \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = Lv$$

Conseguenza: dalle componenti di  $L$

possiamo scrivere 
$$v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$$
  $\begin{matrix} \text{esim} \\ \downarrow \\ \text{part.} \end{matrix}$   

$$e_i = (0, \dots, 0, \underset{\downarrow}{1}, 0, \dots, 0)$$

$$Lv = \sum_{i=1}^n v_i L e_i \quad \text{per cui}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) &= Lv = \sum_{i=1}^n v_i L e_i = \\ &= \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \quad \text{che} \end{aligned}$$

$$\textcircled{*} \left( \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = (v, \nabla f(x_0)) \right) \iff f \text{ differenziabile in } x_0$$

Attenzione! Se  $f$  non è differenziabile

non è detto che valga  $\textcircled{*}$

esempio

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è derivabile (in ogni punto) e  $|v| = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = v_1^2 v_2$$

$\nabla f(x_0) = (0, 0)$  quindi è falso

che  $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = (\nabla f(x_0), v)$

La funzione  $f$  non è differenziabile!

Se lo fosse sarebbe  $\otimes$

---

Il differenziale di  $f$  in  $x_0$  si denota

con  $df(x_0)$  o  $df_{x_0}$ .

Si osservi che la relazione ottenuta precedentemente definisce anche un rappresentante per l'applicazione lineare  $df_{x_0}$ , cioè

$$df_{x_0}(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) v_i = (\nabla f(x_0), v)$$

cioè l'applicazione  $L$  della definizione sopra mandando

$$v \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) v_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) v_n$$

Il gradiente quindi rappresenta l'applicazione lineare  $df_{x_0}$ .

Tornando all'esempio precedente

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = v_1^2 v_2$$

non è lineare in  $v$

quindi  $f$  non può  
essere differenziabile in  $(0,0)$

Piano tangente  $\nabla$

dato  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

lo restringo alla

retta  $x = x_0$  e

ho una funzione di una variabile

$$y \mapsto f(x_0, y) =: f_2(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

rappresenta  
la derivata  
di tale funzione

e la retta  $f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$

la retta tangente al grafico di  $f_2$  in  $(x_0, y_0)$ .

Analogamente  $f_1(x) = f(x, y_0)$  ha come retta

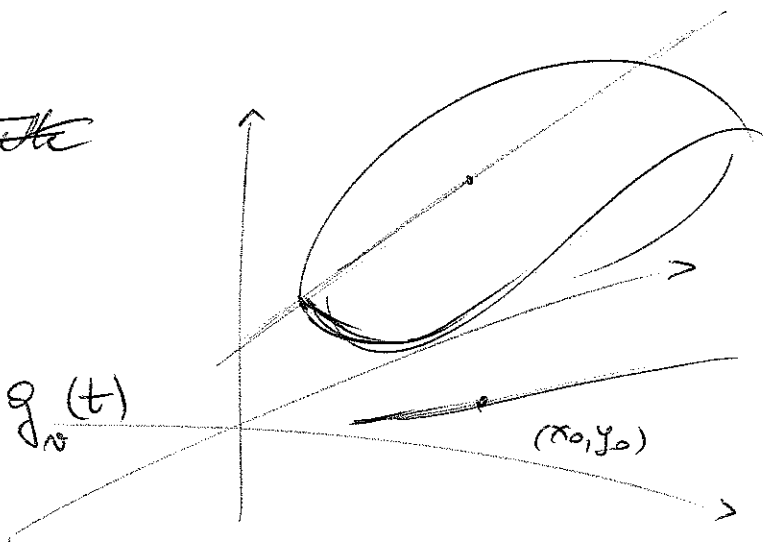
tangente  $f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0)$

La funzione  $(x, y) \mapsto f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$

definisce un piano detto piano tangente al grafico di  $f$ .

Si noti che ~~tutte le rette~~ se si considera

$$h = f((x_0, y_0) + t(v_1, v_2)) = g_v(t)$$



$$g'_v(t) \Big|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$$

La retta tangente al grafico di  $g_v$  è data da

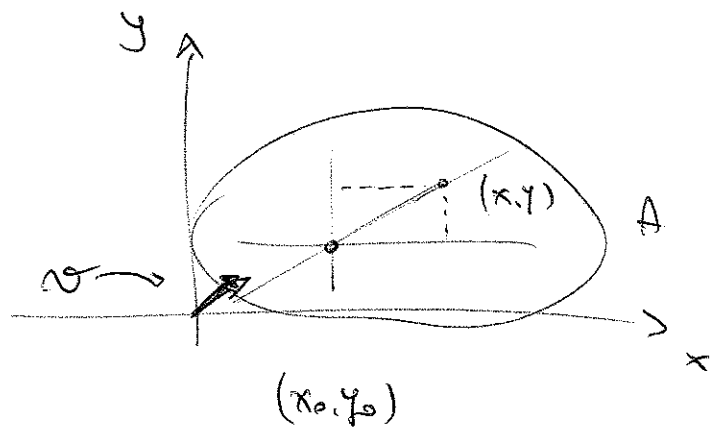
$$h_v(t) = f(x_0, y_0) + t \frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) \quad t \in \mathbb{R}$$

$$g_v(0) + t g'_v(0)$$

e tale retta giace sul piano tangente.

In fatti

$$h_v(t) = f(x_0, y_0) + t \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) v_1 + t \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) v_2$$



$(x, y) \neq$

$$(x - x_0, y - y_0) = (t v_1, t v_2)$$

Per ogni coppia di punti  $(x, y)$  e  $(x_0, y_0)$

considero il vettore  $\frac{(x - x_0, y - y_0)}{|(x - x_0, y - y_0)|}$  lo chiamo  $v$

$$e f = |(x - x_0, y - y_0)| \quad \text{oppure} \quad |(x - x_0, y - y_0)|$$

Per cui se  $f$  è differenziabile sono vero

che  $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = (\nabla f(x_0, y_0), v)$  e che

quindi esiste il piano tangente al grafico di  $f$  in  $(x_0, y_0)$ .

Proposizione Siano  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ ,  
 $x_0 \in A$  e  $f$  differenziabile in  $x_0$ .

Allora  $\nabla f(x_0)$  indica la direzione corrispondente  
alle direzioni ~~della~~ <sup>valore</sup> massima <sup>della</sup> derivata direzionale  
( $-\nabla f(x_0)$  la minima) nel punto  $x_0$ .

Inoltre nelle direzioni ortogonali al gradiente  
le derivate direzionali sono nulle.

dim: dato  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $|v| = 1$ , si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = (\nabla f(x_0), v)$$

Scegliamo  $\alpha = |\nabla f(x_0)|$  e moltiplichiamo  
 $\nabla f(x_0)$  per  $\alpha v$ . Si ha che

$$|\nabla f(x_0)| \leq (\nabla f(x_0), \alpha v) \leq |\nabla f(x_0)|^2$$
$$< \text{ se } \alpha v \neq \nabla f(x_0)$$
$$= \text{ solo se } \alpha v = \nabla f(x_0)$$

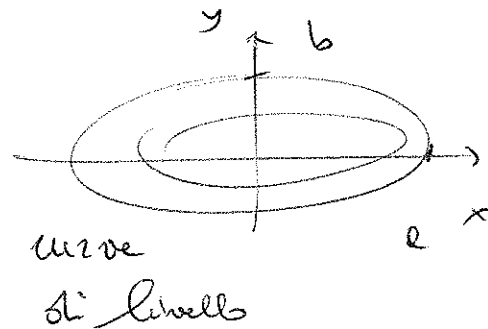
Per cui la quantità è massima per

$$v = \frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}, \text{ minima per } -\frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}$$

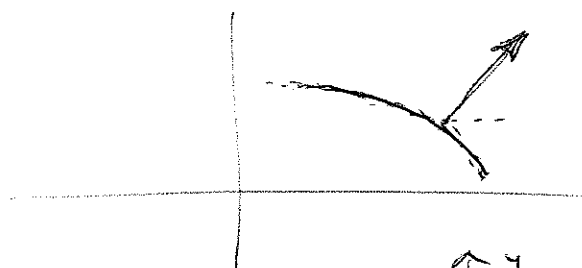
$$\text{e se } v \perp \nabla f(x_0) \quad \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = 0$$

Esempio

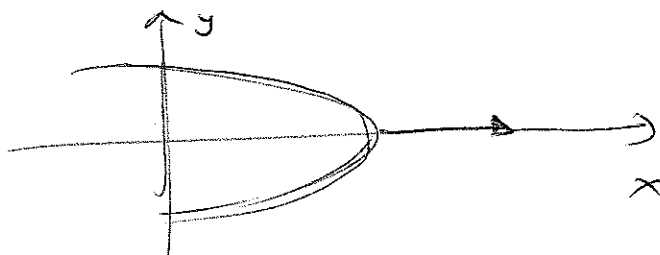
$$f(x,y) = a^{-2}x^2 + b^{-2}y^2$$



$$\nabla f(x,y) = \left( \frac{2}{a^2}x, \frac{2}{b^2}y \right)$$



se  $y=0$



$$a > b > 0$$



$$\frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^2}$$

### Teorema (del differenziale Totale)

Supponiamo che  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ ,  
abbia derivate parziali in un intorno  $B_r(x_0)$   
di  $x_0 \in A$  e che queste siano continue in  $x_0$ .  
Allora  $f$  è differenziabile in  $x_0$ .

dim :  $n=2$  per semplicità

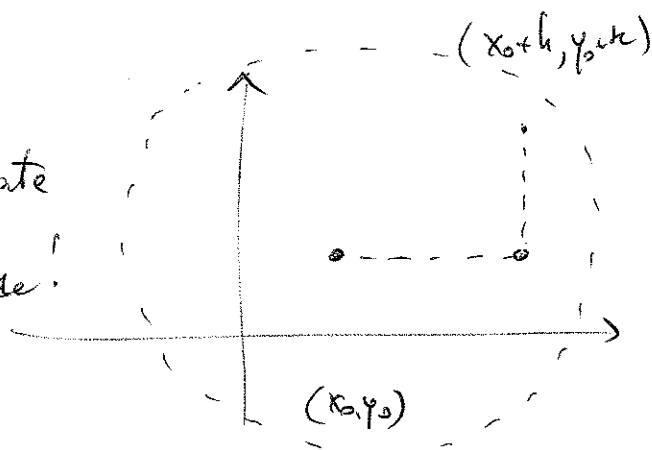
Se  $f$  è differenziabile e  $(x_0, y_0)$  esiste

il gradiente di  $f$  in  $x_0$  e vale

lim  
 ~~$(h,k) \rightarrow (0,0)$~~   
 $(h,k) \rightarrow (0,0)$

$$\frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - \nabla f(x_0, y_0) \cdot (h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

le dérivée  
 existe  
 en un point



$$f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_1, y_0) h$$

la règle  
 $\xi_1$  compris  
 entre  $x_0$  et  $x_0+h$

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, \xi_2) \cdot k$$

Pour ce

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_1, y_0) h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, \xi_2) \cdot k$$

$$\frac{\left[ \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_1, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right] h + \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, \xi_2) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$\leq \left| \frac{\left[ \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_1, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right] h}{h} \right| + \left| \frac{\left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, \xi_2) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] k}{k} \right|$$

Passando al limite per  $h \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow 0$  e  
dalla continuità in  $(x_0, y_0)$  di  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$   
~~si ha che~~ si ottiene la tesi. //

$f \in C^1(A) \Rightarrow f$  differenziabile in  $A$

$f$  differenziabile in  $A \Rightarrow \begin{cases} f \text{ continua in } A \\ f \text{ derivabile in tutte le direzioni} \\ \text{e } \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v \end{cases}$

$f \in C^1(A)$  significa che esistono le derivate  
parziali  $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) \quad \forall x \in A$  e queste sono continue

Teorema Siano  $\gamma: \bar{I} \rightarrow \mathbb{A} \in \mathbb{R}^n$  aperto  
 e  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ . Sia  $t_0$  un punto interno  
 ad  $\bar{I}$ . Si supponga che

$\gamma$  è derivabile in  $t_0$

$f$  è differenziabile in  $x_0 = \gamma(t_0)$ .

Allora  $f \circ \gamma: \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile  
 in  $t_0$  e vale

$$\frac{d}{dt} (f \circ \gamma)(t_0) = \nabla f(x_0) \cdot \dot{\gamma}(t_0) = \\ = (\nabla f(x_0), \dot{\gamma}(t_0)).$$

Dim:  $f$  diff. in  $x_0 \Rightarrow$

$$f(x) - f(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

$\gamma$  derivabile in  $t_0 \Rightarrow$

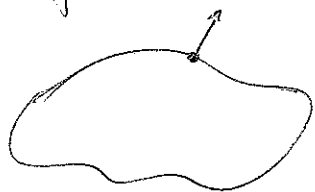
$$\gamma(t) - \gamma(t_0) = \dot{\gamma}(t_0)(t - t_0) + o(|t - t_0|)$$

$$\frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0))}{t - t_0} = \left[ \nabla f(x_0) \cdot (\gamma(t) - \gamma(t_0)) + \right. \\ \left. + o(|\gamma(t) - \gamma(t_0)|) \right] \\ \hline t - t_0$$

~~Q.E.D.~~

$$= \nabla f(x_0) \cdot \dot{\gamma}(t_0) + \frac{0(t-t_0)}{t-t_0}$$

Oss: Supponiamo che  $\Gamma_c$  sia una curva di livello per una funzione  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  parametrizzata da  $\gamma: I \rightarrow \Gamma_c$ . And' derivabile



$$f(\gamma(t)) = c$$

per cui  $0 = \frac{d}{dt} (f \circ \gamma)(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)$

cioè  $\nabla f(x)$  è ortogonale alle curve di livello

Se  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\Gamma_c$  è una superficie

$\nabla f(x)$  è ortogonale alle ~~tutte~~ le rette tangenti

e tutte le curve sulla superficie  $\Rightarrow$  è ortogonale alla superficie

---

Ex calcolare gradiente di una funzione scalare

## Derivazione di una funzione composta

Siano  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ ,  
e  $g: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{I}$  intervallo aperto.

Se  $f$  è differenziabile in  $x_0 \in A$  e  
 $g$  derivabile in  $y_0 = f(x_0) \in \mathcal{I}$  allora

$g \circ f$  è ~~differenziabile~~ differenziabile in  $x_0$

$$\text{e vale } \frac{\partial}{\partial x_j} (g \circ f)(x) = g'(f(x)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$$

dim: analoga alla dimensione 1 ~~(Ex)~~

~~per vedere che  $g \circ f$  è derivabile~~

$$g \circ f(x + te_j) = h(t)$$

$$h'(t) \Big|_{t=0} = g'(f(x)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(x).$$

La differenziabilità è analoga a prima (Ex)

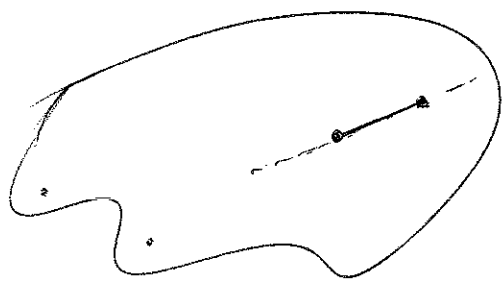
(v. dimostrazione precedente)

## Teorema del Valore Medio

Sia  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ ,  
 differenziabile. Allora per ogni coppia di  
 punti  $x_0, x_1 \in A$  con  $[x_0, x_1] \subseteq A$   
 esiste  $\xi \in [x_0, x_1]$  t.c.

$$f(x_1) - f(x_0) = \nabla f(\xi) \cdot (x_1 - x_0)$$

dim Ex (come  $n=1$ )



$$\gamma(t) = (1-t)x_1 + tx_0$$

$$t \in [0, 1]$$

$$h(t) = f(\gamma(t))$$

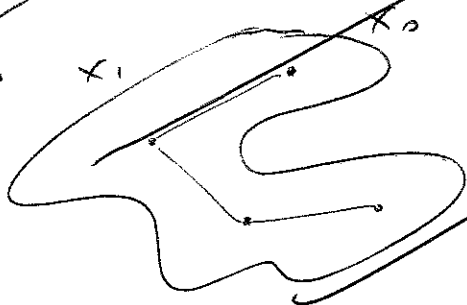
Conseguenza:

~~Teorema~~ Sia  $A$  connesso per poligonalità e aperto.

~~Sia  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  costante.~~

~~Allora  $\nabla f = (0, \dots, 0)$ .~~

dim:  $x_1, x_0$



$$h(t) = f(\gamma_1(t))$$

1°)  $f$  è diff.  $\Rightarrow \nabla f(x) = (0, \dots, 0) \quad //$   
 $\forall x \in [x_0, x_1] \dots$

$\& A$  connesso

1

2

7.12

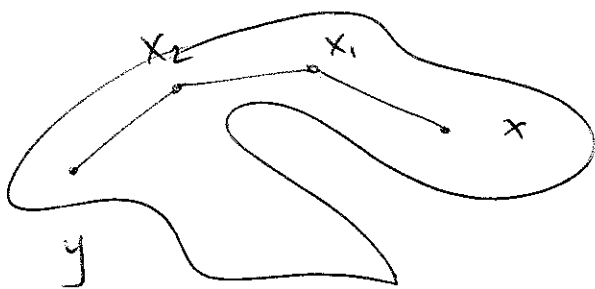
Tedare Sono A aperto di  $\mathbb{R}^n$  connesso

per poligoni e  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile.

Se  $\nabla f(x) = (0, 0, \dots, 0) \quad \forall x \in A$

allora  $f = \text{cost.}$

dim: se presi  $x_0, y_0 \in A$   $f(x) = f(y) \quad \forall$  coppia  
abbiamo fatto

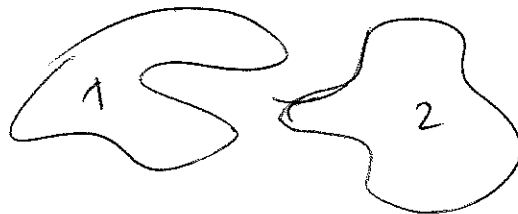


$[x_0, x_1]$

$$f(y) = f(x_0) = f(x_1) = f(x)$$

//

Controesempio



$$\nabla f(x) = (0, \dots, 0)$$

ma  $f \neq \text{cost.}$

Def  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $x_0 \in E$ .

$x_0$  si dice di massimo (minimo) locale

se  $\exists \rho > 0$  tale che

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (f(x_0) \leq f(x))$$

$$\forall x \in B_\rho(x_0) \cap E.$$

$x_0$  è ~~il~~ punto di massimo (minimo) in  $E$

se  $f(x_0) \geq f(x)$  ( $f(x_0) \leq f(x)$ )  $\forall x \in E$ .

Osservazione Se  $x_0 \in E$  di massimo (locale)

Se  $f$  è derivabile in  $x_0$

Rispetto a tutte le direzioni considero le rette

$$x_0 + tv \quad (t \in \mathbb{R} \quad x_0 + tv \in B_\rho(x_0))$$

e la funzione

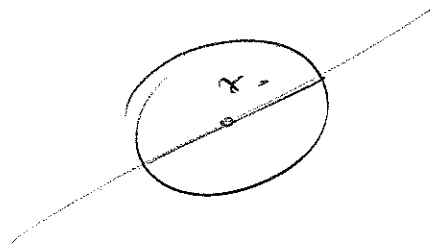
$$g_v(t) = f(x_0 + tv)$$

$$|v| = 1$$

La funzione  $g_v$  ha massimo (locale)

per  $t = 0$

(F. 13)



cio' significa che  $\int_0^1 \omega = 0$ , che

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \quad |v|=1$$

~~Se  $f$  è differenziabile in  $x_0$  si ha~~  
~~che~~  
$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v$$

In particolare per  $v = e_i$ : si ha pure

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad \text{che}$$

$$\nabla f(x_0) = (0, 0, \dots, 0)$$

Adesso se  $x_0$  è di minimo o di massimo locale.

## Derivate di ordine successivo

Se una funzione  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile rispetto a  $x_j$  ci si può chiedere se  $f_{x_j}$  è derivabile a sua volta. Si fissa  $i$ , non necessariamente diverso da  $j$ , e si consideri

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \quad (\text{fare un esempio})$$

Esempio

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$|f(x,y)| \leq \frac{1}{2} |x^2-y^2| \quad \text{se } (x,y) \neq (0,0)$$

$\Rightarrow f$  è continua

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \left[ y(x^2-y^2) + 2x^2y \right] (x^2+y^2) + \\ &= \frac{1}{(x^2+y^2)^2} 2x^2y(x^2-y^2) \end{aligned}$$

$$f_y(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} \left[ (x(x^2-y^2) - 2xy^2)(x^2+y^2) - 2xy^2(x^2-y^2) \right]$$

F.M.

$$f_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} \right| \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} |x| = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f_x(x,y) = 0 \quad \text{def. 1}$$

$$|f_x(x,y)| = \left| \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \left[ (y^3 - 3x^2y)(x^2+y^2) + 2x^2y(x^2-y^2) \right] \right|$$

$$\leq |y| \frac{|3x^2 - y^2|}{(x^2+y^2)^2} + |x| |x^2 - y^2| \leq 4|y| + |x| |x^2 - y^2|$$

idem con  $f_y$  . Totale  $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$

(quindi  $f$  derivabile e differenziabile ! ) .

$$f_y(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \left[ (x^3 - 3xy^2)(x^2+y^2) - 2xy^2(x^2-y^2) \right]$$

$$|f_y(x,y)| \leq \frac{|x^3 - 3xy^2|}{(x^2+y^2)^2} + |y| |x^2 - y^2| \leq$$

$$\leq |x| 4 + |y| |x^2 - y^2|$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$$

## Teorema (di Schwarz)

Sia  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto, e sia  $x_0 \in A$ .

Si suppone che per  $i, j$  fissati tra 1 e  $n$  (interi) le derivate seconde miste

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

in un intorno di  $x_0$  e siano entrambe continue in  $x_0$ . Allora

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0).$$

Oss: in particolare se  $f \in C^2(A) \Rightarrow$

$$\forall i, j = 1, \dots, n \quad \text{e} \quad \forall x_0 \in A \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0).$$

Soluz:  $n=2$  si considerino  $h, k \in \mathbb{R}$

in modo tale che  $(x_0 + h, y_0 + k) \in R$

$$R = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta] \subseteq A \quad (\delta > 0)$$

insieme nel quale esistono le derivate seconde miste

$$\text{Definisco } u(t) = f(x_0+h, y_0+t) - f(x_0, y_0+t)$$

$$\varepsilon > 0$$

$$t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

$$\text{e } v(h) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0)$$

Le funzioni  $u$  e  $v$  risultano derivabili in  $(-\delta, \delta)$ .

Per il teorema di Lagrange  $\exists \xi_2$  compreso tra 0 e  $k$

tale che

$$u(k) - u(0) = \cancel{u'(0)} u'(\xi_2) k \quad \text{cioè}$$

$$\begin{aligned} & f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) + f(x_0, y_0) \\ \textcircled{*} &= \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0+\xi_2) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0+\xi_2) \right] k \end{aligned}$$

Analogamente  $\exists \xi_1$  compreso tra 0 e  $h$  tale che

$$v(h) - v(0) = v'(\xi_1) h \quad \text{cioè}$$

$$\begin{aligned} & f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0) = \\ \textcircled{**} &= \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\xi_1, y_0+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\xi_1, y_0) \right] h \end{aligned}$$

Tornando a  $\oplus$  : se si applica il teorema di Lagrange alla funzione

$$w(t) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + t, y_0 + \xi_2) \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

si ottiene che  $\exists \eta_1$  compreso tra 0 e h tale

$$w(h) - w(0) = w'(\eta_1) h \quad \text{cioè}$$

$$\begin{aligned} \star \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0 + \xi_2) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \xi_2) \right. &= \cancel{\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \eta_1, y_0 + \xi_2)} \\ &= h \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \eta_1, y_0 + \xi_2) \end{aligned}$$

e analogamente  $\exists \eta_2$  compreso tra 0 e k tale

$$\begin{aligned} \star \star \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \xi_1, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \xi_1, y_0) \right. &= \\ &= k \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \xi_1, y_0 + \eta_2) \end{aligned}$$

Mettendo assieme  $\oplus$  e  $\star$  ,  $\left( \begin{smallmatrix} \star \\ \star \end{smallmatrix} \right) \oplus \left( \begin{smallmatrix} \star \\ \star \end{smallmatrix} \right)$  e definendo

aggiungendo i termini si ha che

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \eta_1, y_0 + \xi_2) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \xi_1, y_0 + \eta_2)$$

Quindi h e k e  $\eta_1, \eta_2$  si conclude //

## Differenziale secondo e matrice hessiana

Supponiamo che  $f$  sia di classe  $C^k(A)$ ,  
 $A$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Reiterando il teorema  
di Schwarz e le derivate si ottiene  
che le derivate miste di ordine  $k$  si  
possono scrivere

$$D^p f(x_0) = \frac{\partial^{|p|} f}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}}(x_0)$$

dove  $p = (p_1, \dots, p_n)$  ,  $|p| := p_1 + p_2 + \dots + p_n$   
 $p_j$  sono interi

Per cui fissato un vettore  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $|v|=1$ ,  
 $x_0 \in A$ , si può considerare

$\bar{f}(t) = f(x_0 + tv)$  e scrivere

la formula di Taylor all'ordine  $k$

per  $\bar{f}$  in  $t=0$

$$\overline{f}(t) = \overline{f}(0) + \overline{f}'(0)t + \dots + \frac{\overline{f}^{(k)}(0)}{k!} t^k +$$

$$\overline{f}(0) = f(x_0)$$

$$+ o(t^k)$$

$$\overline{f}'(t) = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \sum_{i=1}^n D_i f(x_0) v_i =$$

~~scribble~~

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + tv) v_i$$

$$\overline{f}''(t) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0 + tv) v_i v_j$$

⋮

$$\overline{f}^{(k)}(t) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x_0 + tv) v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_k}$$

Calcolando per  $t=0$  queste quantità si ha:

$$f(x_0 + tv) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) v_i +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) v_i v_j + \dots +$$

$$+ \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_p \\ |p| \leq k}} \frac{D^p f(x_0)}{p!} v^p +$$

$$+ o(t^k)$$

$$v^p := v_1^{p_1} \cdot v_2^{p_2} \dots v_n^{p_n}$$

F. 17

Se  $x = x_0 + tv$  si ottiene

$$f(x) = \sum_{|p| \leq k} \frac{D^p f(x_0)}{p!} (x-x_0)^p + o(|x-x_0|^k)$$

dove  $D^0 f \equiv f$

In particolare con  $k=2$  si ottiene

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) (x-x_0)_i + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) (x-x_0)_i (x-x_0)_j + o(|x-x_0|^2)$$

~~Il differenziale secondo, denotato con  $d^2 f_{x_0}$ ,  
è una forma <sup>quadratica</sup> ~~bilineare~~ che associa  
ad una coppia di vettori  $v, w \in \mathbb{R}^n$~~

Il differenziale secondo di  $f$  in  $x_0$   
è una forma bilineare (che associa ad una  
coppia di vettori  $v, w \in \mathbb{R}^n$  la quantità

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) v_i w_j)$$

Se  $f \in C^2(A)$  la matrice, detta  
matrice hessiana di  $f$ , è sicuramente  
simmetrica e  $f$  è differenziabile due volte,  
ma si potrebbe avere  $f$  differenziabile due  
volte in un punto e le derivate seconde  
misurate in tale punto uguali senza che  
 ~~$f \in C^2$~~  le derivate seconde siano continue!

Ad ogni modo se  $f \in C^2(A)$  il differenziale  
secondo è rappresentato dalla ~~matrice~~ matrice  
le cui entrate sono

$$(Hf(x_0))_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) \quad (\text{matrice hessiana})$$

Possiamo scrivere la formula di Taylor al 2° ordine  
in forma più compatta:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + \left( Hf(x_0) (x - x_0), x - x_0 \right) + \\ &\quad + o(|x - x_0|^2) \\ &= f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + \left( D^2 f(x_0) (x - x_0), x - x_0 \right) + o(|x - x_0|^2) \end{aligned}$$

Teorema Siano  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ ,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$   
 di classe  $C^2$  in  $A$ ,  $x_0 \in A$  stazionario  
 per  $f$ . Allora

i) • se  $x_0$  è un punto di minimo relativo  
 si ha  $(Hf(x_0) v, v) \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$

ii) • se  $(Hf(x_0) v, v) > 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, |v| \neq 0$   $\Rightarrow x_0$  è di  
 minimo relativo.

dim: i) Sia  $B_r(x_0) \subseteq A$  e si consideri

$$\overline{f}(t) = f(x_0 + tv) \quad \text{con } t \in (-r, r)$$

$$|v| = 1$$

In particolare  $\overline{f}$  ha minimo relativo in  $t=0$

$\Rightarrow \overline{f}''(0) \geq 0$ . Calcolando  $\overline{f}''(t)$  si ha

$$\overline{f}'(t) = \nabla f(x_0 + tv) \cdot v$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + tv) v_i$$

$$\overline{f}''(t) = \sum_{i=1}^n \nabla \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + tv) \right) \cdot v \quad v_i$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0 + tv) v_i v_j$$

Esercizio Date una matrice  $a = (a_{ij})_{i,j=1}^n$   
 $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$

Trovare max e min di

$(a \cdot x, x)$  con  $|x| = 1$  (compatto!)

$$\frac{(a \cdot x, x)}{|x|^2} \quad x \neq 0$$

$$f(x) = \frac{\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f(x) = \frac{1}{|x|^4} \left[ 2|x|^2 \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j - 2x_k (a \cdot x, x) \right]$$

$$= \frac{1}{|x|^2} \left[ 2 \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j - 2x_k f(x) \right]$$

$$\nabla f(x) = (0, \dots, 0) \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = 0 \quad \forall k=1, \dots, n$$

e viceversa  $a \cdot x = f(x) x$

Cio' significa che  $f(x)$  deve essere

un autovettore  $x$  e il suo relativo autovettore. Poiché l'insieme  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x|=1\}$  è chiuso e limitato ed  $f$  è continua  $f$  ammette massimo e minimo in  $S$ .

Quindi esistono  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$  tali che

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in S.$$

Per tali vettori si ha che

$\lambda_1 = f(x_1)$  e  $f(x_2) = \lambda_2$  sono autovalori.

~~quindi~~ ~~necessario~~ Sia ora  $\lambda$  un autovalore di  $a$ ,  $\exists \bar{x} \in \mathbb{R}^n, |\bar{x}| \neq 0$ , tale che

$$a \cdot \bar{x} = \lambda \bar{x}$$

$$f(\bar{x}) = \frac{(a \bar{x}, \bar{x})}{|\bar{x}|^2} = \lambda \frac{|\bar{x}|^2}{|\bar{x}|^2} = \lambda$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2.$$

Di conseguenza  $\lambda_1$  è il minimo autovalore di  $a$  e  $\lambda_2$  è il massimo " di  $a$ .

Records Date una matrice  $A$  una

matrice  $A$  si dice definita positiva se  
(negativa)

$$(Ax, x) > 0 \quad \forall x \neq (0, \dots, 0)$$
$$(< 0)$$

Semidefinita positiva (semidefinita negativa) e

$$(Ax, x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$
$$(\leq 0)$$

La matrice  $A$  (simmetrica) può essere scritta  
come

$$A = S \Lambda S^T$$

$S$  matrice ortogonale ( $S^T = S^{-1}$ )

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{di autovalori di } A$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{tr } A = \text{tr } \Lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_n \\ \det A = \det \Lambda = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n \end{array} \right.$$

Le ~~matrice~~ forme quadratiche si dice  
indefinite se  $\exists x_1, x_2$  tali che

$$(a, x_1, x_1) > 0$$

$$(a, x_2, x_2) < 0$$

Dall'esercizio precedente si ricava che  
per  $a$  simmetrica si ha che

$$\lambda_{\min} |x|^2 \leq (a, x, x) \leq \lambda_{\max} |x|^2$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n$$

$\lambda_{\min}$  il più piccolo autovalore

$\lambda_{\max}$  " " grande "

e)  $a$  è def. positiva se tutti gli autovalori  
sono positivi:

è def. negativa se tutti gli autovalori  
sono negativi:

è indefinita se  $\lambda_{\min} < 0, \lambda_{\max} > 0$

è semidef. positiva se  $\lambda_{\min} = 0$

è " negativa se  $\lambda_{\max} = 0$

per di  $f''(0) = (Hf(x_0) \cdot v, v) \geq 0$

ii)  $x_0$  stazionario per cui  $\nabla f(x_0) = (0, \dots, 0)$   
 Le formule di Taylor al 2° ordine fornisce

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2} (Hf(x_0) \cdot (x - x_0), x - x_0) + o(|x - x_0|^2)$$

Sia  $m$  il più piccolo autovalore  
 di  $Hf(x_0)$  - ~~Recht~~ Per definizione

$\exists \epsilon > 0$  tale che se  $x \in B_\epsilon(x_0)$

$$|o(|x - x_0|^2)| < \frac{1}{2} m |x - x_0|^2 \quad x \in B_\epsilon(x_0)$$

Per cui

$$f(x) - f(x_0) \geq \frac{1}{2} m |x - x_0|^2 + o(|x - x_0|^2) >$$

$$> \frac{1}{2} m |x - x_0|^2 - \frac{1}{2} m |x - x_0|^2 = 0$$

$\forall x \in B_\epsilon(x_0)$

che  $f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in B_\epsilon(x_0)$

Analogamente si dimostra che, sotto le stesse ipotesi del teorema precedente,

- $x_0$  pto di max rel. si ha che

$$(\nabla f(x_0) \cdot v, v) \leq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

- e  $(\nabla f(x_0) \cdot v, v) < 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$

con  $v \neq (0, \dots, 0) \Rightarrow x_0$  è di max rel.

---

~~Definizione~~ Ricordo :

date una matrice  $A$  denotiamo con

$A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}$  i suoi minori principali,

dove  $A^{(k)}$  è la matrice  $k \times k$  ottenuta

considerando gli elementi  $a_{ij}$   $i, j = 1, \dots, k$

$$A = \left( \begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} & & \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{k1} & \dots & \dots & a_{kk} & \dots & \dots & & \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & & & & & \vdots & a_{nn} & \end{array} \right)$$

Teorema Data una matrice  $A$   $n \times n$

$A$  è def. pos. sse  $\det(A^{(k)}) > 0 \quad k=1, \dots, n$

$A$  è def. negativa sse  $(-1)^k \det(A^{(k)}) > 0 \quad k=1, \dots, n$   
(cioè se  $-A$  è def. positive)

$A$  è semidef. pos. sse  $\det(A^{(k)}) \geq 0 \quad k=1, \dots, n$   
e  $\det A = 0$

$A$  è semidef. neg. sse ~~det~~  $-A$  è semidef. pos.

Senso 2°

Un punto critico (o punto stazionario) per  $f$ ,  
cioè un punto  $x_0$  per cui  $\nabla f(x_0) = (0, \dots, 0)$   
si dice di sella se non è né di minimo,  
né di massimo relativo.

Esempio

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$(0,0)$  di min

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y) = -x^2 - y^2$$

$(0,0)$  di max

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

$(0,0)$  di sella

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Dai risultati e dalle considerazioni precedenti possiamo enunciare in maniera equivalente:

$x_0$  pto di min. rel.  $\Rightarrow D^2f(x_0)$  semidef. pos.

o equivalentemente

$$i=1, \dots, n \quad \lambda_i \geq 0 \quad \lambda_i \text{ aut di } D^2f(x_0)$$

$x_0$  pto di max rel.  $\Rightarrow D^2f(x_0)$  semidef. negative

o equiv.

$$\lambda_i \leq 0 \quad \forall i, \quad \lambda_i \text{ aut}$$

$D^2f(x_0)$  def positive  
o equiv  $\lambda_i > 0 \quad \forall i$   $\Rightarrow x_0$  pto di min rel.

$D^2f(x_0)$  def negative  
o equiv.  $\lambda_i < 0 \quad \forall i$   $\Rightarrow x_0$  pto di max rel.

$D^2f(x_0)$  indefinita  
o equivalentemente  $\Rightarrow x_0$  pto di sella

$\exists$  autovettore  $\lambda_1 < 0$

$\exists$  "  $\lambda_2 > 0$

SS In dimensione 2 la cosa è immediata  
(per  $n \geq 3 \dots$ ). Avendo due soli autovalori

$$\det A = \lambda_1 \lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \quad \left( \begin{array}{l} \det A \text{ è invariante} \\ \operatorname{tr} A \text{ " " "} \end{array} \right)$$

$$\det A^{(1)} = \lambda_1$$

Se  $\lambda_1 \lambda_2 < 0$  la forma quadratica  
è indefinita

Se  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$  ho due possibilità

Posso procedere in due modi:

$$\text{— se } a_{11} > 0 \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\text{allora } \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$$

$$\text{se } a_{11} < 0 \Rightarrow \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$$

$$\text{— } \operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\text{se } \operatorname{tr} A > 0 \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0$$

$$\text{se } \operatorname{tr} A < 0 \quad \lambda_1, \lambda_2 < 0$$

2 problemi nascono se uno degli autovalori  
è nullo !

Esempio :  $f(x,y) = x^4 + y^4$   $(0,0)$  di min  
 $D^2 f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$f(x,y) = -x^4 - y^4$   $(0,0)$  di max

$f(x,y) = x^4 - y^4$   $(0,0)$  di sella

Nell'ultimo caso però :

$$f(x,0) = x^4$$

$$f(0,y) = -y^4$$

il punto è di sella !