Calcolo differenziale per funzioni a valori vettoriali.

Sia $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ (A aperto)

Una tale funzione può essere pensata come una k-upla di funzioni $F_1, F_2, .. F_k : A \to \mathbb{R}$.

~~Ovvio che~~ Si possono definire le derivate direzionali, ed in particolare le derivate parziali, come per funzioni scalari semplicemente derivando una componente

$$\frac{\partial F_i}{\partial v}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{F_i(x_0 + tv) - F_i(x_0)}{t}$$

$|v| = 1$

Si può ottenere così una matrice, detta matrice jacobiana, definita da

$$DF(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Si osservi che le righe di tale matrice altro non sono che i gradienti delle F_i.

Diremo che F è di classe $C^1(A)$ se tutte le derivate parziali

$$\cancel{D_j F_i x_0} \quad D_i F_j(x_0) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x_0) \quad \left(= (DF(x_0))_{ij} \right)$$

sono continue ~~per~~ in ogni $x_0 \in A$.

Diremo che F è differenziabile in x_0 se esiste un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ tale che

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{|F(x_0 + h) - F(x_0) - Lh|}{|h|} = 0$$

Oss.: sopra abbiamo un vettore di k componenti, sotto di n

Ragionando componente per componente (sulle F_j) si ottiene che l'applicazione L altro non è che l'applicazione rappresentata dalla matrice jacobiana di F in x_0, cioè

$$L v = DF(x_0) \cdot v = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \cdots & & \frac{\partial F_k}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

e il fatto che F sia differenziabile in x_0 diventa equivalente a dire che

$$F(x) = F(x_0) + DF(x_0) \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

Derivazione per funzioni composte

Siano A aperto di $\mathbb{R}^n$, B aperto di $\mathbb{R}^k$

$F: A \to B$ e $G: B \to \mathbb{R}^m$.

Supponiamo che F sia differenziabile in x_0 e che G sia differenziabile in $y_0 = f(x_0)$.

Allora $H = G \circ F : A \to \mathbb{R}^m$

è differenziabile in x_0 e la sua matrice jacobiana ~~è data~~ ha componenti

$$\frac{\partial H_i}{\partial x_j}(x_0) = \sum_{h=1}^{k} \frac{\partial G_i}{\partial y_h}(y_0)\,\frac{\partial F_h}{\partial x_j}(x_0)$$

$i = 1, \dots m$

$j = 1, \dots n$

Senza dimostrazione

~~dim.~~ $\cancel{H_i(x) = (G(F(x)))_i = G_i \circ F(x)}$

~~già visto per~~ $\cancel{m = 1}$.

quindi

$$DH(x_0) = DG(y_0) \cdot DF(x_0)$$

prodotto tra matrici

$$F(x_1, \dots x_n) = \left(f_1(x_1, \dots x_n), \dots f_k(x_1, \dots x_n)\right)$$

$$G(y_1, \dots y_k) = \left(g_1(y_1, \dots y_k), \dots g_m(y_1, \dots y_k)\right)$$

Vediamo di capire la formula :

se $v \in \mathbb{R}^n$ l'applicazione $DF(x_0)$ agisce su v in questo modo

$$(1)\quad \begin{cases} w_j = (DF(x_0) \cdot v)_j = & j=1,\dots k \\ = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0)\, v_i \end{cases}$$

Se ora applico ad un vettore generico $w \in \mathbb{R}^k$ l'applicazione $DG(y_0)$ si ha

$$(2)\quad \begin{cases} u_h = (DG(y_0) \cdot w)_h = & h=1,\dots m \\ = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial g_h}{\partial y_j}(y_0)\, w_j \end{cases}$$

Se in (2) scelgo il vettore w valutato in (1) ho che

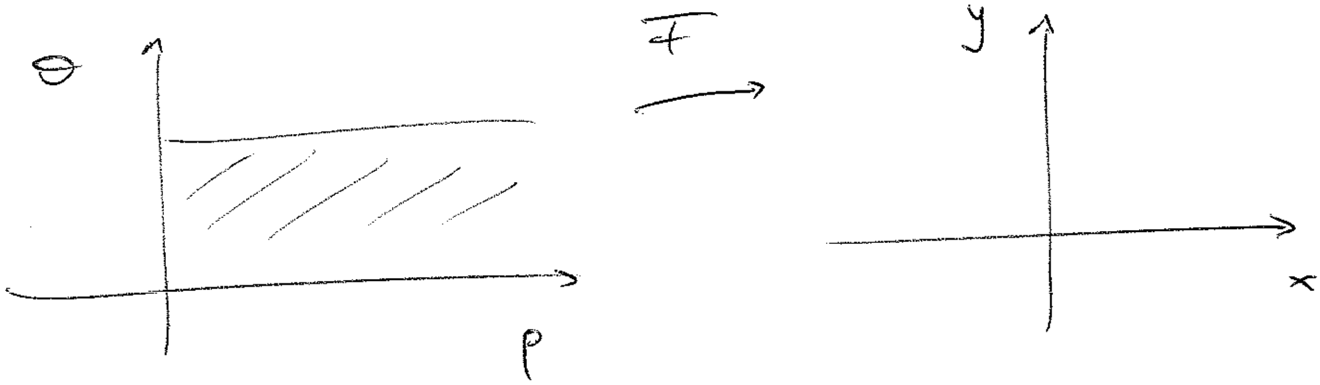
$$u_h = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_h}{\partial y_j}(y_0) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0)\, v_i$$

per cui la formula dell'enunciato.

Attenzione! questa non è una dimostrazione.

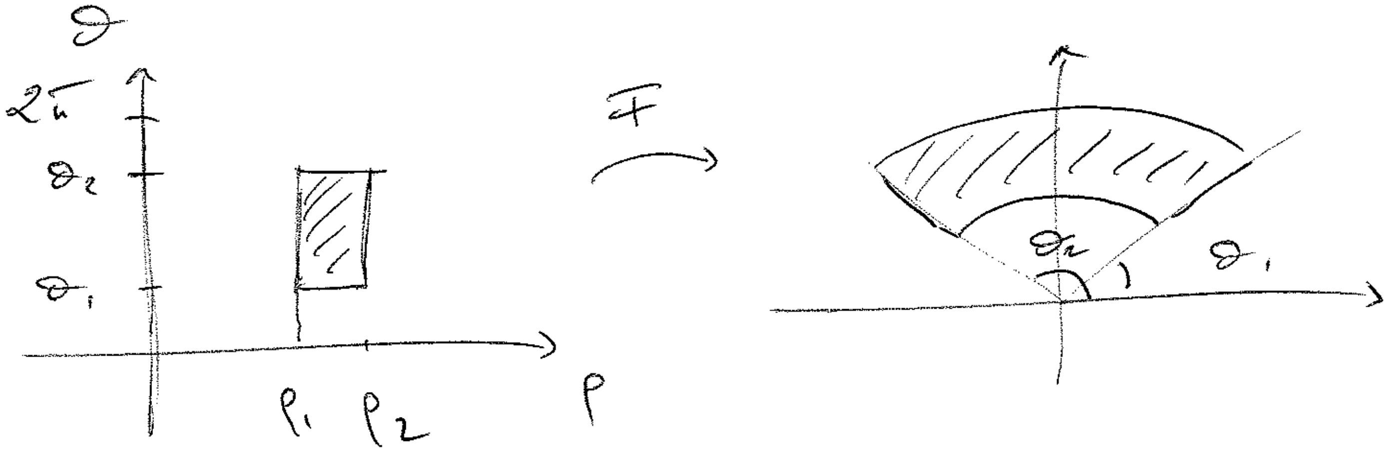
Alcuni esempi standard di cambio di variabili

- coordinate polari (in 2 dimensioni)



$$F : [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(\rho, \theta) \longmapsto (\rho \cos\theta , \rho \operatorname{sen}\theta)$$



$$JF = DF = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \rho \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$|\det DF(\rho,\theta)| = \rho$$

- L'inverse di F è data da

$$F(\rho,\theta) = (x,y) \qquad F^{-1}(x,y) = (\rho,\theta)$$

$$\rho(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\theta(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x} & \text{se } x \geq 0,\ y \geq 0 \\ \pi/2 & \text{se } x=0,\ y>0 \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\pi & \text{se } x<0,\ y>0 \\ 3/2\,\pi & \text{se } y<0,\ x=0 \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x}+2\pi & \text{se } x<0,\ y<0 \end{cases}$$

- coordinate cilindriche (in dimensione 3)

$$F : [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

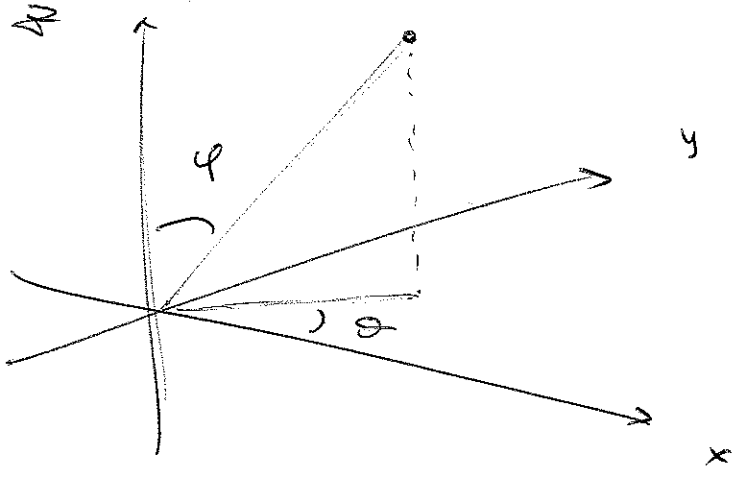
$$F(\rho, \theta, z) = (\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta, z)$$

$$DF = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho \operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\det DF(\rho, \theta, z)| = \rho$$

- coordinate sferiche (dim 3)

$$F : [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$



$$x = \rho \cos\theta \operatorname{sen}\varphi$$

$$y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi$$

$$z = \rho \cos\varphi$$

$$DF = \begin{pmatrix} \cos\theta \ \operatorname{sen}\phi & -\rho \operatorname{sen}\theta \ \operatorname{sen}\phi & \rho \cos\theta \ \cos\phi \\ \operatorname{sen}\theta \ \operatorname{sen}\phi & \rho \cos\theta \ \operatorname{sen}\phi & \rho \operatorname{sen}\theta \ \cos\phi \\ \cos\phi & 0 & -\rho \operatorname{sen}\phi \end{pmatrix}$$

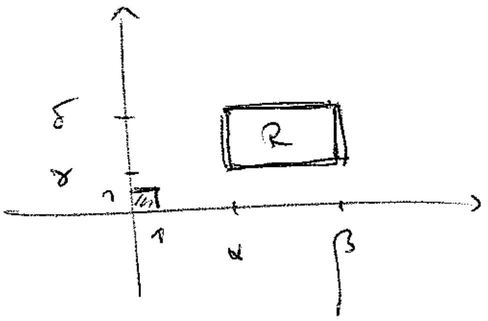
$$|\det DF| = \Big| \cos\phi \left(-\rho^2 \operatorname{sen}\phi \cos\phi\right) + -\rho \operatorname{sen}\phi \left(\rho \operatorname{sen}^2\phi\right) \Big| =$$

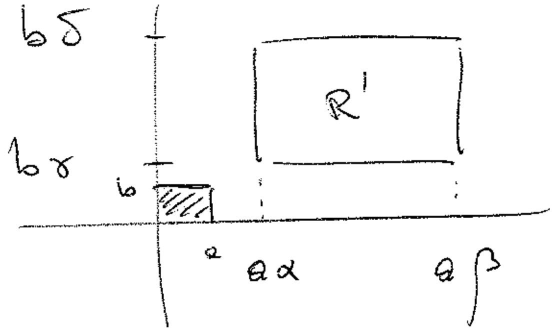
$$= \rho^2 \operatorname{sen}\phi \cos^2\phi + \rho^2 \operatorname{sen}^3\phi =$$

$$= \rho^2 \operatorname{sen}\phi$$

• cambiamento lineare

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad F(x,y) = (ax, by)$$





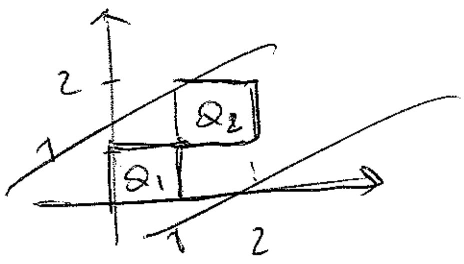
Il rettangolo R viene mandato in R'

$$DF = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \qquad |\det DF| = |ab|$$

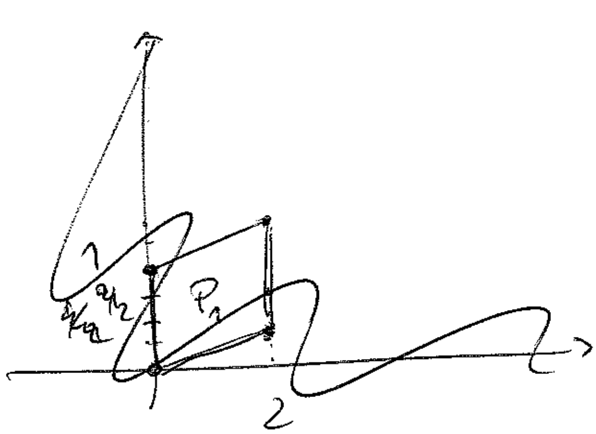
Se $a>0$, $b>0$ $\quad |\det DF| = ab > 0$

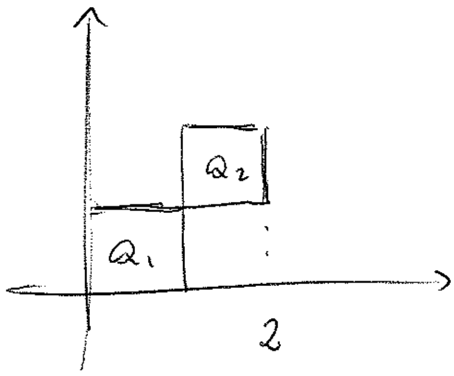
Se consideriamo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

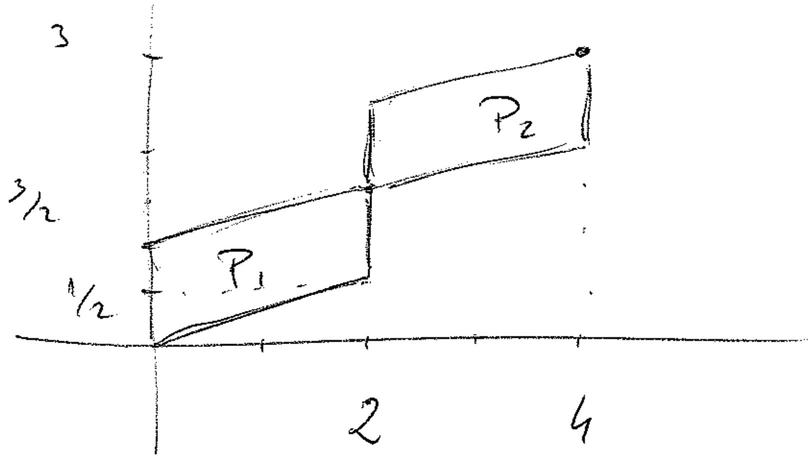
$$(x,y) \mapsto \left(2x, \tfrac{1}{2}x + y\right)$$



Il quadrato di vertici
(1,1), (2,1), (2,2), (1,2)
viene mandato nel
parallelogramma di fianco





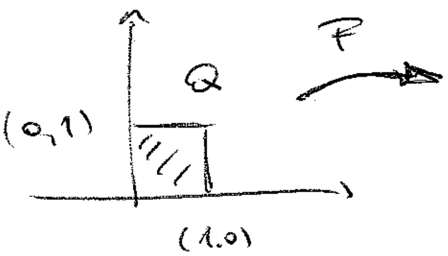


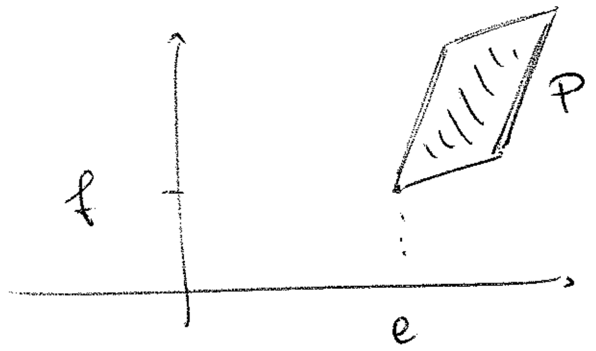
$$|\det DF| = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Area $Q_1 = 1$

Area $P_1 = 2$

- $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad F(x,y) = (ax+by+e,\ cx+dy+f)$





$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$|\det DF| = |ad - bc| = \text{Area}(P)$$

Se $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$Fx = Ax + b \qquad A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$$

$$b = (b_1, \dots b_n)$$

$$DF(x) = A$$

Dato $Q = [0,1]^n$ che ha volume 1

denotiamo con $P = F(Q)$.

Area di P è $|\det A|$ (si vedrà più avanti)