

Superfici

Si consideri un aperto A connesso per poligonalità,
 $A \subseteq \mathbb{R}^2$, e una applicazione $\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}^3$

Def Si dice che $\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una
superficie regolare se

(a) $\varphi \in C^1(A)$

(b) φ è iniettiva

(c) il rango di $D\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$
è 2 $\forall (x,y) \in A$

L'insieme $S = \varphi(A)$ si chiama sostegno
della superficie φ .

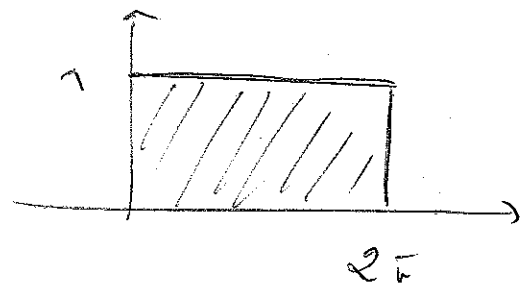
~~Come definire l'area di S ?~~

A volte si definiscono anche superfici compatte $\varphi: K \rightarrow \mathbb{R}^3$

dove K è un compatto chiuso di un aperto A connesso per poligonalità, $A \subseteq \mathbb{R}^2$, con le stesse richieste di prima $(a), (b), (c)$ sempre fatte per $\varphi|_A$

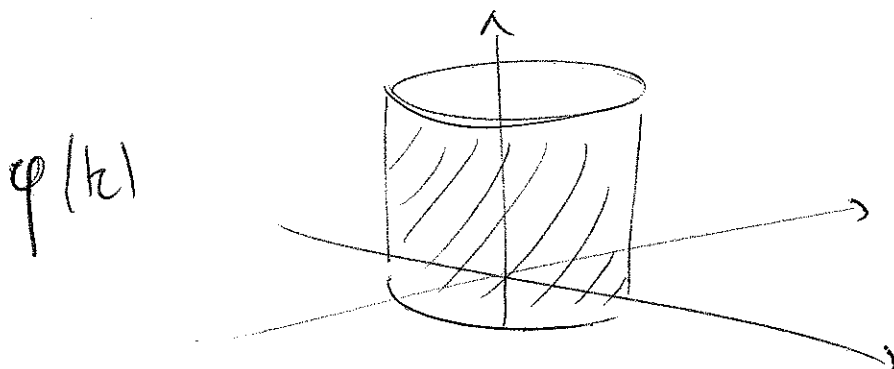
Esempio $\varphi: K \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$K = [0, 2\pi] \times [0, 1]$$



$$\varphi(x, y) = (x \cos x, x \sin x, y)$$

φ non è iniettiva, ma $\varphi|_{(0, 2\pi) \times (0, 1)}$ sì!



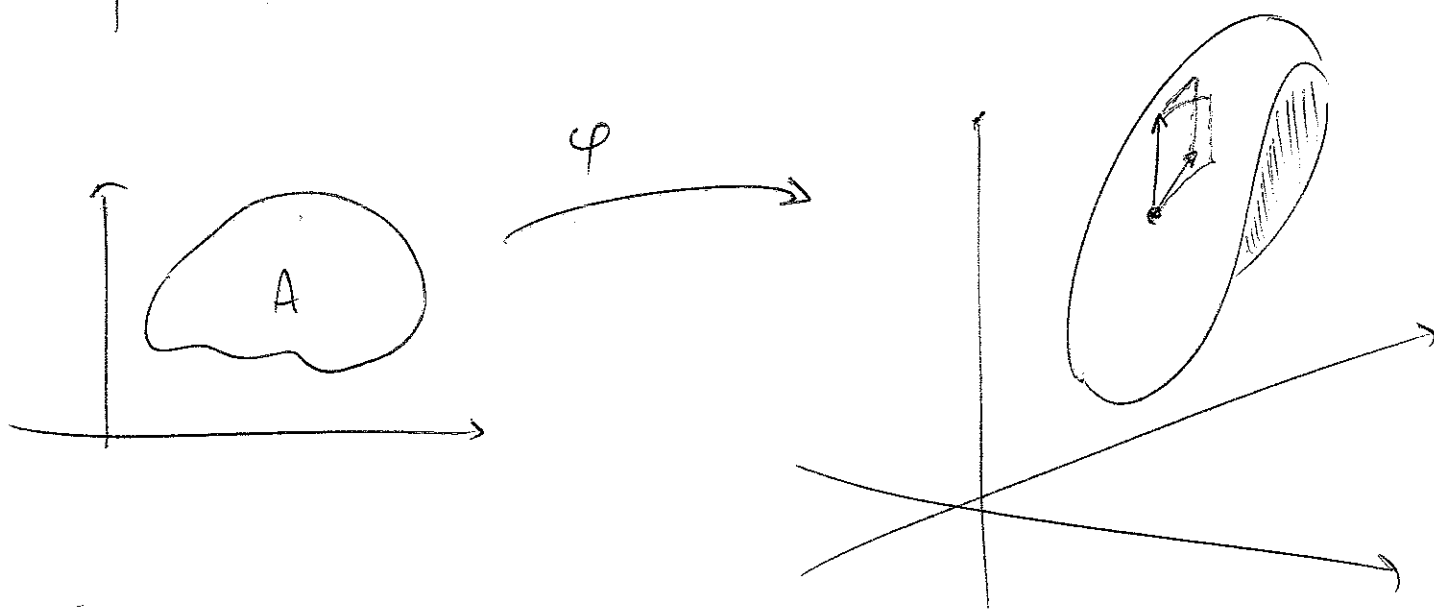
cilindro

La condizione (c) della definizione sta a significare che i due vettori

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \right) \text{ e } \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \right)$$

sono linearmente indipendenti.

Questo ~~pp~~ garantisce l'esistenza di un piano tangente alla superficie



Se due vettori in $\mathbb{R}^3$,

$$a = (a_1, a_2, a_3) \quad \text{e} \quad b = (b_1, b_2, b_3)$$

sono lin. dipendenti $\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.c.}$

$$b = \lambda a$$

Se si considera $a \wedge b =$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

con $b = \lambda a$ si ottiene che $a \wedge b = (0,0,0)$

Se a e b non sono lin. indipendenti

e) $|a \wedge b| \neq 0$. Quindi un altro

modo di dare la condizione (e) è

$$|\varphi_x \wedge \varphi_y| \neq 0$$

dove $\varphi_x(x,y) = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x,y), \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x,y), \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}(x,y) \right)$

$$\varphi_y = \left(\frac{\partial}{\partial y} \quad \dots \quad \dots \right)$$

Il vettore ~~$\varphi_x \wedge \varphi_y$~~ $a \wedge b$ è
ortogonale sia ad a che a b .

(mostri)

Allora c'è può definire il vettore normale
alla superficie in un punto ~~(x_0, y_0)~~ come segue

$P_0 = \varphi(x_0, y_0)$ come segue $\begin{pmatrix} (x_0, y_0) \\ \text{interno a } K \end{pmatrix}$
 ~~φ~~

$$\vec{n}(P_0) = \frac{\varphi_x(x_0, y_0) \wedge \varphi_y(x_0, y_0)}{|\varphi_x(x_0, y_0) \wedge \varphi_y(x_0, y_0)|}$$

Esempio Superfici che sono grafici (già visto)

$$\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

$$\varphi_x(x, y) = (1, 0, f_x(x, y))$$

$$\varphi_y(x, y) = (0, 1, f_y(x, y))$$

$$\varphi_x(x, y) \wedge \varphi_y(x, y) = (-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1)$$

$$\vec{n}(\varphi(x, y)) = \frac{1}{\sqrt{1 + |Df(x, y)|^2}} \begin{pmatrix} -f_x(x, y), -f_y(x, y), 1 \end{pmatrix}$$

Sul bordo della superficie $((x_0, y_0) \in \partial K)$
 ci possono essere problemi a definire la
 normale. Si potrebbe definire come
 limite, ma non è detto che esista
 tale limite (potrebbero essercene 2: ^{Esempio} Nastro di
 Möbius)

$$\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \cos u, \\ \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \sin u, \\ \frac{v}{2} \sin \frac{u}{2} \end{pmatrix}$$

Nastro di
Möbius

$$0 \leq u < 2\pi \quad -1 \leq v \leq 1$$

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = \begin{pmatrix} -\frac{v}{8} \sin u + \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \sin \frac{u}{2} \cos u, \\ \frac{v}{8} \cos u + \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \sin \frac{u}{2} \sin u, \\ -\left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \cos \frac{u}{2} \end{pmatrix}$$

$\varphi_u \wedge \varphi_v$ è normale alle superficie

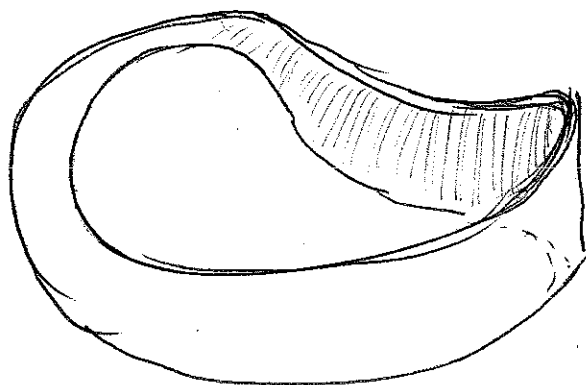
però la terza componente per

$u \rightarrow 0^+$ (e $v=0$) ~~si chiama~~ diventa -1

$u \rightarrow 2\pi^-$ (e $v=0$) diventa $+1$

$$\varphi_u \wedge \varphi_v (0,0) = (0, 0, -1)$$

$$\varphi_u \wedge \varphi_v (2\pi, 0) = (0, 0, 1)$$



$$\text{Siano } \varphi: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\psi: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

due superfici regolari, $\mathcal{H}, \mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^2$ compatti.

Si dice che le due superfici sono equivalenti
se esiste un diffeomorfismo

$$\phi: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H} \quad \text{tale che}$$

$$\varphi(u,v) = \psi(\phi(u,v))$$

Allora il sostegno Σ di φ , cioè l'immagine di τ tramite φ , sarà lo stesso di $\varphi \circ \phi$.

A volte si denota con Σ l'immagine superfice il sostegno Σ , a volte le mappe φ che lo parametrizzano.

Si considerino ora φ, ψ, ϕ come sopra. Si ha:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \frac{\partial \phi_1}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial s} \frac{\partial \phi_2}{\partial u}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}(\phi(u,v)) \frac{\partial \phi_1}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial \varphi}{\partial s}(\phi(u,v)) \frac{\partial \phi_2}{\partial v}(u,v)$$

~~$\varphi_u =$~~ dove

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \right) \quad \left(\begin{array}{c} \text{idem} \\ \text{per } \varphi_v \end{array} \right)$$

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial \varphi_j}{\partial \tau} \frac{\partial \phi_1}{\partial u} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial s} \frac{\partial \phi_2}{\partial u} \quad j=1,2,3$$

$$\varphi_u \wedge \varphi_v(u,v) = (\varphi_\tau \wedge \varphi_s)(\phi(u,v)) \det D\phi(u,v)$$

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = (\varphi_\tau \wedge \varphi_s) \det D\phi$$

Siccome ϕ è un diffeomorfismo si ha che
 $\det D\phi(u,v) \neq 0 \quad \forall (u,v) \in U$ e

in particolare $\det D\phi(u,v) > 0 \quad \forall (u,v) \in U$
oppure $\det D\phi(u,v) < 0$

Diremo che φ e ψ sono orientate
nello stesso modo o hanno la stessa orientazione
se $\det D\phi > 0$, hanno orientazione
opposte se $\det D\phi < 0$.

Infatti per la definizione di $\triangleright$ data precedente,
ovvero si ha che $\varphi_u \wedge \varphi_v$ e $\psi_u \wedge \psi_v$ hanno
la stessa direzione, ma verso opposto.

Def. Una superficie Σ regolare si
dice orientabile se per ogni curva
continua e chiusa $\gamma: [0, b] \rightarrow \Sigma$
si ha che $\triangleright(\gamma(0)) = \triangleright(\gamma(b))$.

da
prima

Se $\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una superficie
replan

e $\gamma: [a, b] \rightarrow A$ una curve

$\Rightarrow$ ~~$\varphi(\gamma(t))$~~ $\varphi \circ \gamma$ è una curve replan
in $\mathbb{R}^3$

$$\frac{d}{dt} (\varphi \circ \gamma)(t) = \cancel{\varphi_{\gamma}(\gamma(t))}$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\varphi_1(\gamma(t)), \varphi_2(\gamma(t)), \varphi_3(\gamma(t)) \right)$$

$$= \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(\gamma(t)) \dot{\gamma}_1(t) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(\gamma(t)) \dot{\gamma}_2(t), \right.$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(\gamma(t)) \dot{\gamma}_1(t) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(\gamma(t)) \dot{\gamma}_2(t),$$

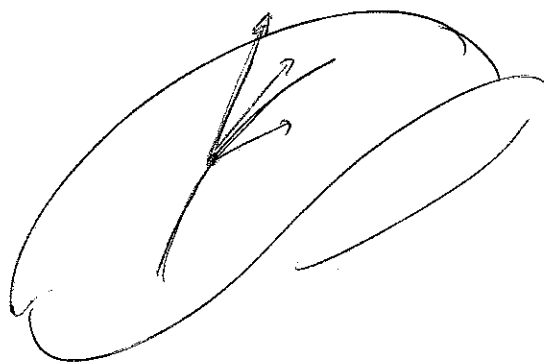
$$\left. \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}(\gamma(t)) \dot{\gamma}_1(t) + \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}(\gamma(t)) \dot{\gamma}_2(t) \right)$$

$$= \varphi_u(\gamma(t)) \dot{\gamma}_1(t) + \varphi_v(\gamma(t)) \dot{\gamma}_2(t)$$

per cui il vettore derivato di $\varphi \circ \gamma(t)$

con $t_0 \in (a, b)$ è un vettore che sta nel piano generato da $\varphi_u(\gamma(t_0))$ e $\varphi_v(\gamma(t_0))$.

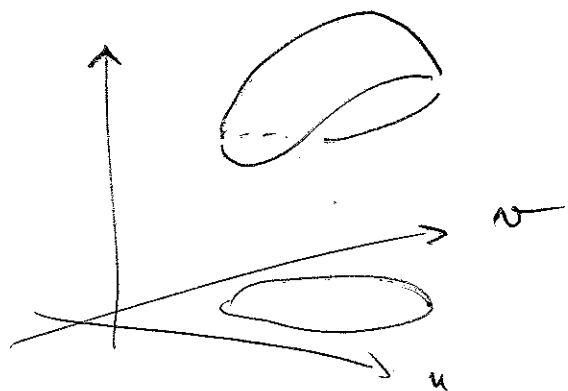
Il piano nel punto $P_0 = \varphi(\gamma(t_0))$ ha equazione parametrica



$$\varphi(t_0) \quad \varphi(u_0, v_0) + \varphi_u(u_0, v_0)(u - u_0) + \varphi_v(u_0, v_0)(v - v_0)$$

Caso particolare : grafici

$$\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v))$$



$$\varphi_u = (1, 0, f_u(u, v))$$

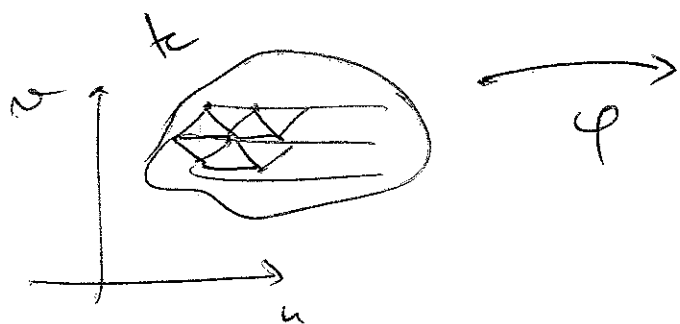
$$\varphi_v = (0, 1, f_v(u, v))$$

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = (-f_u, -f_v, 1)$$

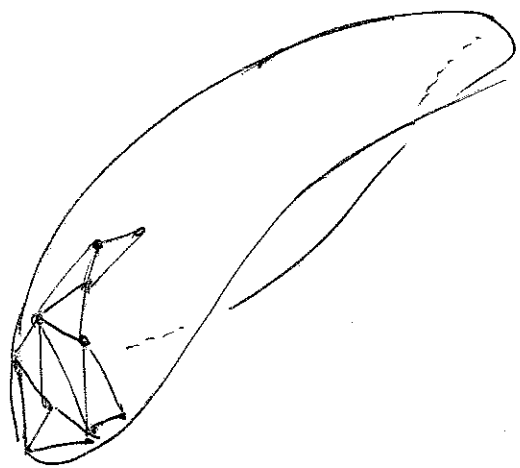
$$\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} (-f_u, -f_v, 1)$$

Area di una superficie

Riprendendo l'idea usata per le curve si potrebbe considerare una triangolazione



e mappando i vertici dei triangoli in $\mathbb{R}^3$ si possono costruire tanti triangolini dei quali sappiamo calcolare l'area.

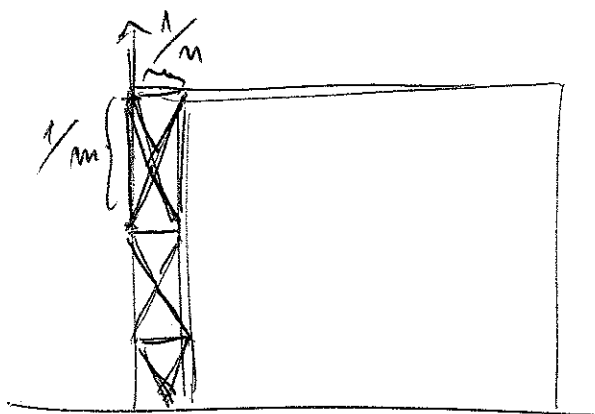


Dopo di che considerare l'estremo ~~superf~~ superiore di tale quantità al variare di tutte le triangolazioni di T .

Sfortunatamente questo metodo può portare a non definire una quantità finita.

Se fissiamo 3 punti in A possiamo considerare il triangolo che ha come ~~vertici~~ vertici le immagini dei tre punti (se non sono allineati) e così considerare una superficie fatta di triangolini.

Dopo di che consideriamo l'area delle somme dei triangolini e prendiamo l'estremo superiore al variare di tutte le triangolazioni. In questo modo però si può ottenere $+\infty$. Ad esempio se la triangolazione è sbilanciata, cioè

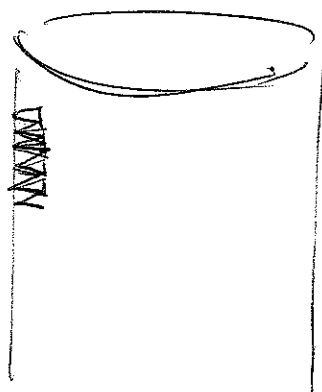


se ad esempio nelle figure e fianco

dati $m, n \in \mathbb{N}$

si ha che $n = m^2$

effetto
fisarmonica



(cilindro)

S. J.

si può produrre una superficie fatta di triangolini le cui aree tendono a $+\infty$ al tendere di m, n a $+\infty$.

Def

Si definisce area di $\varphi: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}^3$ superficie regolare la quantità

$$A(\varphi) = \int_{\mathcal{K}} |\varphi_u \wedge \varphi_v| \, du \, dv$$

Dato $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto $\supset \mathcal{E}$,

$\mathcal{E}$ sostegno di una superficie regolare

$$\varphi: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(\mathcal{K}) = \mathcal{E}$$

si definisce integrale di f su $\mathcal{E}$ la quantità

$$\int_{\mathcal{E}} f \, d\sigma := \int_{\mathcal{K}} f(\varphi(u,v)) |\varphi_u \wedge \varphi_v| \, du \, dv$$

Oss: In realtà possiamo definire

$$A(\Sigma) \text{ come } \int_{\Sigma} |\varphi_u(u,v) \wedge \varphi_v(u,v)| du dv$$

dove φ è una superficie regolare $\varphi: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$
che ha come sostegno Σ .

Infatti se un'altra superficie regolare
 $\psi: H \rightarrow \mathbb{R}^3$ che abbia come sostegno Σ
e che sia equivalente a φ a meno di
un diffeomorfismo $\phi: \Sigma \rightarrow H$.

Abbiamo visto che

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} |\varphi_u(u,v) \wedge \varphi_v(u,v)| &= \\ &= \int_H |\psi_x(\phi(u,v)) \wedge \psi_y(\phi(u,v))| \cdot |\det D\phi(u,v)| \end{aligned}$$

Chiamiamo $f(u,v)$ tale quantità
e integramole su Σ . Si ha che

$$A(\varphi) = \int_{\Sigma} f(u,v) du dv$$

S.Fbi's

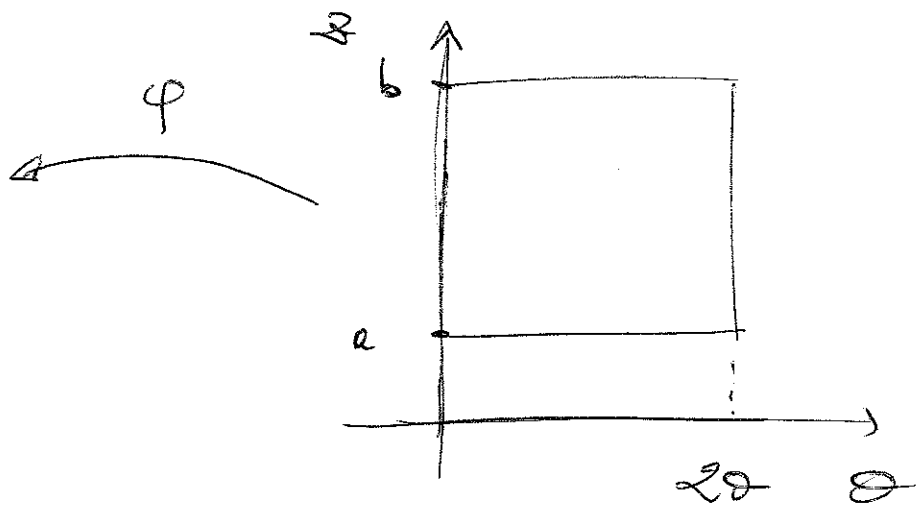
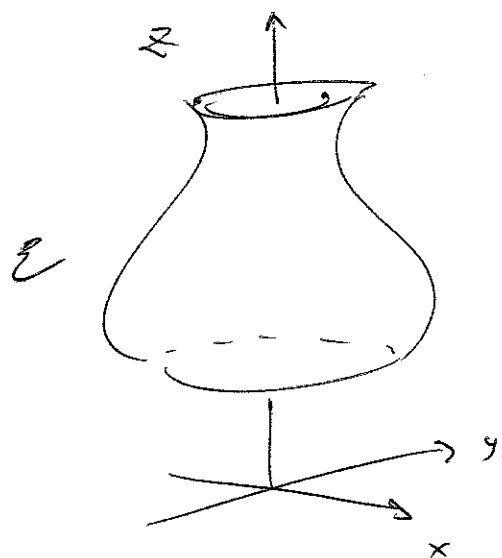
Usando l'espressione a destra di $\otimes$ e notando che $\phi^{-1}: H \rightarrow K$ è un diffeomorfismo si ha che

$$\int_K f(u,v) du dv = \int_{\phi(K)=H} f \circ \phi^{-1}(r,s) |\det D\phi^{-1}(r,s)| dr ds$$

$$= \int_H \left| \psi_r(\phi \circ \phi^{-1}(r,s)) \wedge \psi_s(\phi \circ \phi^{-1}(r,s)) \right| \cdot |\det D\phi(\phi^{-1}(r,s))| \cdot |\det D\phi^{-1}(r,s)| dr ds$$

$$= \int_H |\psi_r(r,s) \wedge \psi_s(r,s)| dr ds = A(\gamma)$$

Esempio Area delle superfici di rotazione



$$\varphi_1(\theta, z) = f(z) \cos \theta$$

$$\varphi_2(\theta, z) = f(z) \sin \theta$$

$$\varphi_3(\theta, z) = z$$

$$f \geq 0$$

$$\varphi_\theta = (-f(z) \sin \theta, f(z) \cos \theta, 0)$$

$$\varphi_z = (f'(z) \cos \theta, f'(z) \sin \theta, 1)$$

$$|\varphi_\theta \wedge \varphi_z| = | (f(z) \cos \theta, f(z) \sin \theta, -f(z) f'(z)) |$$

$$= \sqrt{f^2(z) + f^2(z) (f'(z))^2} = f(z) \sqrt{1 + (f'(z))^2}$$

$$A(z) = 2\pi \int_a^b f(z) \sqrt{1 + (f'(z))^2} dz$$

Esempio Calcolare l'area delle catenoidi

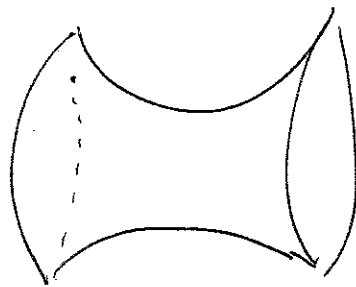
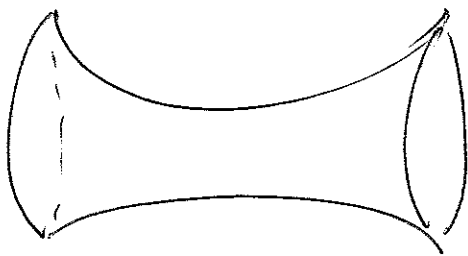
ottenute ruotando le curve dette catenarie

$$f(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$z \in [a, b]$$

$$= \cosh z$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$



$$f'(z) = \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$1 + (f'(z))^2 = 1 + \sinh^2 z = \cosh^2 z$$

$$f(z) \sqrt{1 + (f'(z))^2} = \cosh^2 z$$

$$2\pi \int_a^b \frac{1}{4} (e^{2z} + e^{-2z} + 2) dz =$$

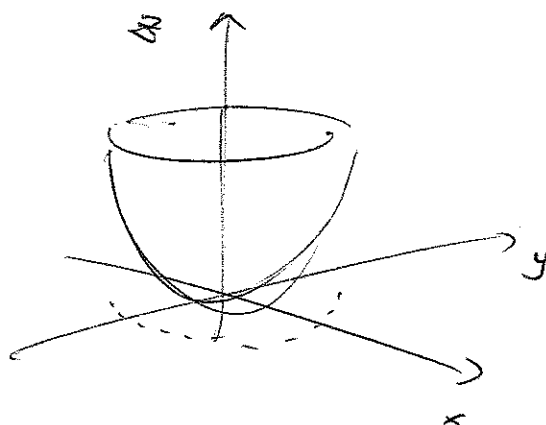
~~a~~

$$= \frac{1}{8} (e^{2b} - e^{-2b} - e^{2a} + e^{-2a}) + \frac{1}{2} (b - a)$$

Esercizio Calcolare l'area delle porzioni di grafico del paraboloide

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$(x,y) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$$



Come ^{superficie} ~~solito~~ di rotazione

$$f(z) = \sqrt{z} \quad \text{con } z \in [0, r^2]$$

$$f'(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{z}}$$

$$\begin{aligned} f(z) \sqrt{1 + (f'(z))^2} &= \sqrt{\frac{1}{4z^2} + 1} \sqrt{z} = \\ &= \sqrt{z + \frac{1}{4z}} = \sqrt{\frac{4z^2 + 1}{4z}} \dots \end{aligned}$$

Valutiamo invece $\varphi(u,v) = (u, v, u^2 + v^2)$

$$\varphi_u = (1, 0, 2u)$$

$$\varphi_v = (0, 1, 2v)$$

$$\begin{aligned} |\varphi_u \wedge \varphi_v| &= |(2u, -2v, 1)| \\ &= \sqrt{1 + 4(u^2 + v^2)} \end{aligned}$$

$$\int_{C_R} \sqrt{1 + 4(u^2 + v^2)} \, du \, dv$$

dove
 C_R cerchio di
 raggio R

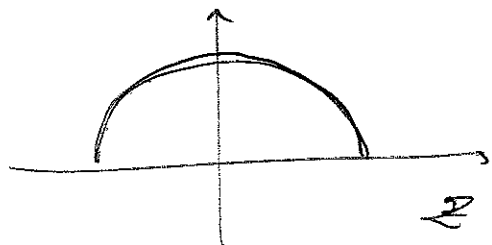
Allo le coordinate piani

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^R dp \, p \sqrt{1 + 4p^2} =$$

$$= 2\pi \frac{1}{12} (1 + 4p^2)^{3/2} \Big|_0^R =$$

$$= \frac{\pi}{6} [(1 + 4R^2)^{3/2} - 1]$$

Ex Superficie della sfera



$$f(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$$

$$f'(z) = \frac{1}{2\sqrt{R^2 - z^2}} \quad (-2z)$$

$$f(z) \sqrt{1 + (f'(z))^2} = \sqrt{R^2 - z^2} \sqrt{1 + \frac{4z^2}{4(R^2 - z^2)}} =$$

$$= \sqrt{r^2 - z^2} \sqrt{1 + \frac{z^2}{r^2 - z^2}} =$$

$$= \sqrt{r^2 - z^2} \sqrt{\frac{r^2 - z^2 + z^2}{r^2 - z^2}} = \cancel{r} r$$

$$2\pi \int_{-r}^r r^{\cancel{z}} dz = 4\pi r^2$$

oppure

$$\phi: [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\vartheta, \varphi) \mapsto (r \sin \varphi \cos \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \varphi)$$

$$\phi_{\vartheta} = (-r \sin \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \cos \vartheta, 0)$$

$$\phi_{\varphi} = (r \cos \varphi \cos \vartheta, r \cos \varphi \sin \vartheta, -r \sin \varphi)$$

$$\phi_{\vartheta} \wedge \phi_{\varphi} = \begin{pmatrix} -r^2 \sin^2 \varphi \cos \vartheta, -r^2 \sin^2 \varphi \sin \vartheta, \\ -r^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \vartheta, -r^2 \sin \varphi \cos \varphi \cos^2 \vartheta \end{pmatrix}$$

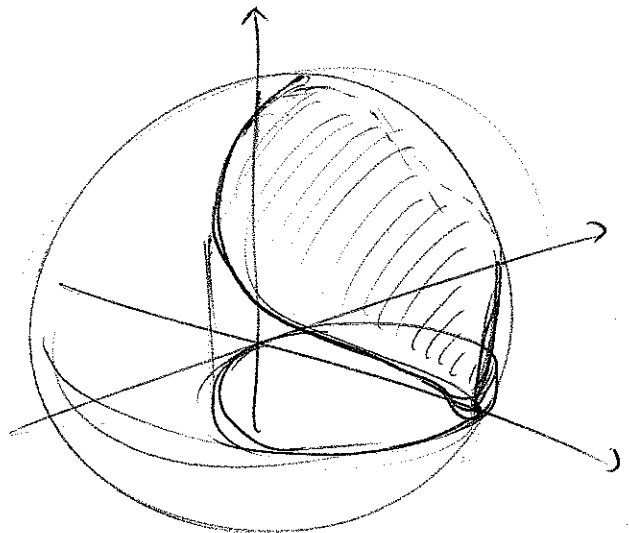
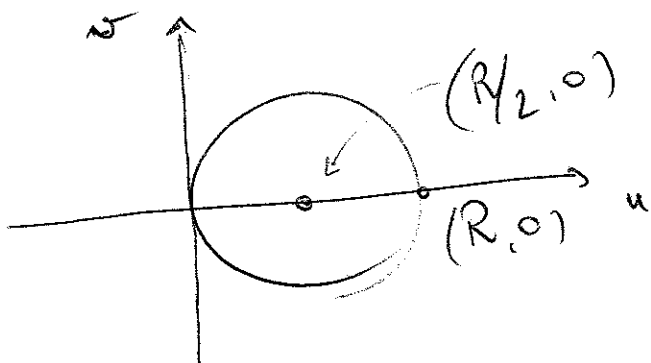
$$|\phi_{\vartheta} \wedge \phi_{\varphi}| = r^2 \sin \varphi$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\varphi \quad r^2 \sin\varphi = \quad \left(\begin{array}{l} \text{Ex proven} \\ \text{con le} \\ \text{coordinate} \\ \text{cilindriche} \end{array} \right)$$

$$= r^2 2\pi (-\cos\varphi) \Big|_0^{\pi} = 4\pi r^2$$

Ex Calcolare l'area delle superficie
interne alle sfere di raggio R porzione
del cilindro di equazione

$$\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$$



$$\mathbf{f}(u, v) = \left(u, v, \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \right)$$

definite in $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq Ru\} = \mathcal{K}$

$$\left(u^2 + \frac{R^2}{4} - Ru\right) + v^2 = \frac{R^2}{4}$$

$$u^2 + v^2 = Ru$$

$$\int_K |f_u \wedge f_v| \, du \, dv$$

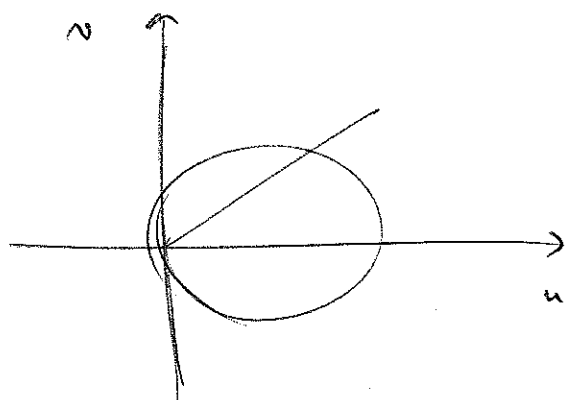
$$f_u = \left(1, 0, \frac{-u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \right)$$

$$f_v = \left(0, 1, \frac{-v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \right)$$

$$f_u \wedge f_v = \left(\frac{u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}, \frac{v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}, 1 \right)$$

$$|f_u \wedge f_v|^2 = \frac{u^2 + v^2}{R^2 - u^2 - v^2} + 1 = \frac{R^2}{R^2 - u^2 - v^2}$$

Passando alle coordinate polari si ha



$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$p^2 = R p \cos \theta$$

$$p = 0 \quad p = R \cos \theta$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{R \cos \theta} dp \, p \frac{R}{\sqrt{R^2 - p^2}} =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \, R \left(-\sqrt{R^2 - p^2} \right) \Big|_{p=0}^{p=R \cos \theta} =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R \left(\sqrt{R^2} - \sqrt{R^2 - R^2 \cos^2 \theta} \right) d\theta =$$

$$= \pi R^2 - R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \cos^2 \theta} d\theta =$$

$$= \pi R^2 - R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin \theta| d\theta =$$

$$= (\pi - 2) R^2$$