Corso di laurea: Ingegneria gestionale, meccanica e meccatronica
Programma di **Fondamenti di Analisi Matematica II** – a.a. 2009/10
Docente: Fabio Paronetto

Gli argomenti denotati con un asterisco tra parentesi sono stati dimostrati.

6.10.2009 Successioni e serie di funzioni. Definizione di convergenza puntuale ed uniforme. Esempi e controesempi. Se una successione di funzioni continue converge uniformemente in un intervallo, il limite é continuo ($*$). Se una successione $\{f_n\}_n$ converge uniformemente in $[a, b)$ ad una funzione f ed esiste finito il limite $\lim_{x\to b^-} f_n(x) = \lambda_n$, allora esiste finito $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$, $\lim_{x\to b^-} f(x) = \lambda$ e $\{f_n\}_n$ convergono uniformemente in $[a, b]$ ($*$).

7.10.2009 Teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale ($*$). Teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata ($*$). Esempi es esercizi su successioni di funzioni.
Serie di funzioni: definizione di convergenza puntuale, assoluta, uniforme, totale e legame tra i vari tipi di convergenza. Risultati analoghi alle successioni (passaggio al limite della continuità, passaggio al limite sotto i segni di integrale e derivata per le serie).

8.10.2009 Esempi semplici di serie di funzioni. Serie di potenze: definizione; l'insieme di convergenza è sempre un intervallo, definizione di raggio di convergenza. Esempi di insiemi di convergenza.

13.10.2009 Richiami su criteri per le serie numeriche. Teorema sulle serie di potenze ($*$). Calcolo di qualche raggio di convergenza. Studio dettagliato di $\sum_n x^n$ (calcolo della somma, serie delle derivate, serie delle primitive, ecc.). Qualche esempio.

14.10.2009 Serie di Taylor: definizione di funzione sviluppabile in serie di Taylor, definizione di funzione analitica, esempio di funzione C^∞ non analitica, qualche sviluppo di Taylor di alcune funzioni elementari. Calcolo di serie di Taylor. Esercizi sulle serie di potenze e di Taylor.

15.10.2009 Ancora esercizi sulle serie di potenze. Esercizi sulle serie di Taylor: data una serie trovarne la somma, data una funzione trovarne lo sviluppo di Taylor (casi speciali).
Introduzione alle serie di Fourier: definizione di funzione continua a tratti, regolare a tratti. Teorema della proiezione (in uno spazio vettoriale V dotato di prodotto scalare $(\cdot, \cdot)$ ($*$).
Funzioni continue a destra, continue a sinistra e funzioni periodiche.

20.10.2009 Gli spazi vettoriali $V_+([0, 2\pi))$ e $V_-((0, 2\pi])$ dotati del prodotto scalare $(f, g) = \int f(x)g(x)dx$. Polinomi trigonometrici. Ortogonalità delle funzioni trigonometriche. Serie di Fourier. Teorema della proiezione adattato alle serie di Fourier per funzioni periodiche $(*)$.

21.10.2009 Sviluppi in soli seni e in soli coseni (funzioni peri e dispari). Funzioni periodiche di periodo T e coefficienti di Fourier per funzioni definite in $[0, T)$. Teorema sulla convergenza per le serie di Fourier (senza dimostrazione). Forma complessa di una serie di Fourier.

22.10.2009 Teorema (integrazione delle serie di Fourier) $(*)$ (dimostrazione solo per funzioni continue). Esercizi sulle serie di Fourier.

22.10.2009 Esempi di serie di Fourier. Fenomeno di Gibbs (mostrato con un esempio).
Un po' di topologia di $\mathbf{R}^n$: modulo e sue proprietà, disuguaglianza di Schwarz ($|(x, y)| \leqslant |x||y|$, $x, y \in \mathbf{R}^n$), intorni sferici, palle in $\mathbf{R}^n$, bordo o frontira di un insieme, punti di accumulazione e isolati, insiemi aperti e chiusi e loro caratterizzazioni, insiemi limitati. Poligonali e loro lunghezza, insiemi connessi per poligonali, insiemi convessi, insiemi stellati.

27.10.2009 Successioni e insiemi compatti.
Introduzione alle funzioni di più variabili. Funzioni vettoriali (da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R^n}$), da $\mathbf{R^n}$ in $\mathbf{R}$, da $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^k$ Definizione di limite di definizione di continuità per funzioni a valori reali e poi vettoriali, sup, inf, teorema di Weiestrass, teorema dei valori intermedi. Definizione di uniforme continuità e teorema di Heine-Cantor.

28.10.2009 Dimostrazione del teorema di Heine-Cantor $(*)$ ed esempi di funzioni uniformemente continue e non in dimensione 1.
Curve: definizione di curva parametrica, di curva continua, derivabile, regolare. Vettore tangente ad una curva, cambi di variabile, curve orientate, curve cartesiane (grafici visti come curve). Integrale di una curva, $|\int_a^b \gamma(t)dt| \leqslant \int_a^b |\gamma(t)|dt$ $(*)$

29.10.2009 Lunghezza di una curva: suddivisione di un intervallo, definizione tramite il sup della lunghezza delle poligonali inscritte, curve rettificalbili. Esempio di una curva continua definita in un compatto e non rettificabile. Teorema: se γ è regolare $l(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|dt$ $(*)$. Parametro d'arco (o ascissa curvilinea). Qualche esempio ed esercizio. Integrale di linea $\int_\gamma f\, ds = \int_a^b f(\gamma(t))|\dot{\gamma}(t)|dt$ (con $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$). L'integrale $\int_\gamma f\, ds$ non dipende dalla parametrizzazione della curva $(*)$. Esercizi.

3.11.2009 Qualche altro esercizio sulle curve e sugli integrali di linea.
Funzioni di più variabili: esempi di funzioni da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$ e loro grafici. Insiemi di livello. Esempi di insiemi di livello per funzioni definite in $\mathbf{R}^2$ e in $\mathbf{R}^3$.

4.11.2009 Funzioni di n variabili a valori reali: continuità e derivabilità, esempi (se f è derivabile in tutte le direzioni non è necessariamente continua $(*)$). Differenziabilità. Se f è differenzibile è continua $(*)$. Se f è differenzibile ammette derivate direzionali in ogni direzione $(*)$. Caratterizzazione del differenziale.
Esistenza e definizione del piano tangente.

5.11.2009 Direzione di massima pendenza e legame con il gradiente $(*)$. Teorema del differenziale totale $(*)$. Funzioni C^1. Derivazione per funzioni composte ($f\circ\gamma$ e $g\circ f$ con f di n variabili, γ curva a valori in $\mathbf{R}^n$, $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$) $(*)$.
Ortogonalità del gradiente alle curve di livello $(*)$. Teorema del valor medio $(*)$. Se ∇f è il vettore nullo e f è definita in un insieme connesso per poligonali, allora f è costante $(*)$.
Esercizi ed esempi su limiti in più variabili.

10.11.2009 Esercizi ed esempi su limiti in più variabili e studio di continuità, derivabilità, differenziabilità per funzioni di più variabili.

11.11.2009 Punti critici o stazionari. Se x_o è stazionario per f e f è differenziabile in x_o allora $\nabla f(x_o) = (0,\dots,0)$ $(*)$.
Derivate di ordine superiore al primo. Formula di Taylor per funzioni di più variabili con particolare attenzione allo sviluppo fino al 2° ordine. Matrice hessiana. Teorema di Schwarz.
Data una matrice A simmetrica vale $\lambda_{\min}|x|^2 \leqslant (A\cdot x, x) \leqslant \lambda_{\max}|x|^2$ dove $\lambda_{\min}$ è il minimo autovalore, $\lambda_{\max}$ il massimo $(*)$.

12.11.2009 Matrici (semi)definite positive, (semi)definite negative, condizione necessaria e condizione sufficiente affinché un punto stazionario sia di minimo relativo o di massimo relativo. Legame con gli autovalori. Esempi ed esercizi.

17.11.2009 Esercizi su massimi e minimi.

18.11.2009 Esercizi su massimi e minimi.

19.11.2009 Funzioni vettoriali: continuità, differenziabilità, matrice jacobiana, derivazione per funzioni composte vettoriali.
Teorema di Dini (o delle funzioni implicite) nel caso di due variabili reali e a valori reali $(*)$. Esempi ed esercizi.

26.11.2009	Teorema di Dini nei seguenti casi: funzioni scalari di tre variabili, sistemi di due equazioni scalari di tre variabili, caso generale. Teorema di invertibilità locale.
25.11.2009	
26.11.2009	
1.12.2009	
2.12.2009	
3.12.2009	
9.12.2009	
10.12.2009	
3.12.2009	