

Corso di laurea: Ingegneria gestionale, meccanica e mecatronica
Programma di **Fondamenti di Analisi Matematica II** – a.a. 2009/10
Docente: Fabio Paronetto

Gli argomenti denotati con un asterisco tra parentesi sono stati dimostrati.

- 6.10.2009 Successioni e serie di funzioni. Definizione di convergenza puntuale ed uniforme. Esempi e controesempi. Se una successione di funzioni continue converge uniformemente in un intervallo, il limite è continuo (*). Se una successione $\{f_n\}_n$ converge uniformemente in $[a, b)$ ad una funzione f ed esiste finito il limite $\lim_{x \rightarrow b^-} f_n(x) = \lambda_n$, allora esiste finito $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lambda$ e $\{f_n\}_n$ convergono uniformemente in $[a, b]$ (*).
- 7.10.2009 Teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale (*). Teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata (*). Esempi ed esercizi su successioni di funzioni.
Serie di funzioni: definizione di convergenza puntuale, assoluta, uniforme, totale e legame tra i vari tipi di convergenza. Risultati analoghi alle successioni (passaggio al limite della continuità, passaggio al limite sotto i segni di integrale e derivata per le serie).
- 8.10.2009 Esempi semplici di serie di funzioni. Serie di potenze: definizione; l'insieme di convergenza è sempre un intervallo, definizione di raggio di convergenza. Esempi di insiemi di convergenza.
- 13.10.2009 Richiami su criteri per le serie numeriche. Teorema sulle serie di potenze (*). Calcolo di qualche raggio di convergenza. Studio dettagliato di $\sum_n x^n$ (calcolo della somma, serie delle derivate, serie delle primitive, ecc.). Qualche esempio.
- 14.10.2009 Serie di Taylor: definizione di funzione sviluppabile in serie di Taylor, definizione di funzione analitica, esempio di funzione C^∞ non analitica, qualche sviluppo di Taylor di alcune funzioni elementari. Calcolo di serie di Taylor. Esercizi sulle serie di potenze e di Taylor.
- 15.10.2009 Ancora esercizi sulle serie di potenze. Esercizi sulle serie di Taylor: data una serie trovarne la somma, data una funzione trovarne lo sviluppo di Taylor (casi speciali).
Introduzione alle serie di Fourier: definizione di funzione continua a tratti, regolare a tratti. Teorema della proiezione (in uno spazio vettoriale V dotato di prodotto scalare (\cdot, \cdot) (*).
Funzioni continue a destra, continue a sinistra e funzioni periodiche.

- 20.10.2009 Gli spazi vettoriali $V_+([0, 2\pi))$ e $V_-((0, 2\pi])$ dotati del prodotto scalare $(f, g) = \int f(x)g(x)dx$. Polinomi trigonometrici. Ortogonalità delle funzioni trigonometriche. Serie di Fourier. Teorema della proiezione adattato alle serie di Fourier per funzioni periodiche (*).
- 21.10.2009 Sviluppi in soli seni e in soli coseni (funzioni pari e dispari). Funzioni periodiche di periodo T e coefficienti di Fourier per funzioni definite in $[0, T)$. Teorema sulla convergenza per le serie di Fourier (senza dimostrazione). Forma complessa di una serie di Fourier. Teorema (integrazione delle serie di Fourier) (*) (dimostrazione solo per funzioni continue). Esercizi sulle serie di Fourier.
- 22.10.2009 Esempi di serie di Fourier. Fenomeno di Gibbs (mostrato con un esempio).
Un po' di topologia di \mathbf{R}^n : modulo e sue proprietà, disuguaglianza di Schwarz ($|(x, y)| \leq |x||y|$, $x, y \in \mathbf{R}^n$), intorni sferici, palle in \mathbf{R}^n , bordo o frontiera di un insieme, punti di accumulazione e isolati, insiemi aperti e chiusi e loro caratterizzazioni, insiemi limitati. Poligonali e loro lunghezza, insiemi connessi per poligonali, insiemi convessi, insiemi stellati.
- 27.10.2009 Successioni e insiemi compatti.
Introduzione alle funzioni di più variabili. Funzioni vettoriali (da \mathbf{R} in \mathbf{R}^n), da \mathbf{R}^n in \mathbf{R} , da \mathbf{R}^n a \mathbf{R}^k . Definizione di limite di definizione di continuità per funzioni a valori reali e poi vettoriali, sup, inf, teorema di Weierstrass, teorema dei valori intermedi. Definizione di uniforme continuità e teorema di Heine-Cantor.
- 28.10.2009 Dimostrazione del teorema di Heine-Cantor (*) ed esempi di funzioni uniformemente continue e non in dimensione 1.
Curve: definizione di curva parametrica, di curva continua, derivabile, regolare. Vettore tangente ad una curva, cambi di variabile, curve orientate, curve cartesiane (grafici visti come curve). Integrale di una curva, $|\int_a^b \gamma(t)dt| \leq \int_a^b |\gamma(t)|dt$ (*)
- 29.10.2009 Lunghezza di una curva: suddivisione di un intervallo, definizione tramite il sup della lunghezza delle poligonali inscritte, curve rettificabili. Esempio di una curva continua definita in un compatto e non rettificabile. Teorema: se γ è regolare $l(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|dt$ (*). Parametro d'arco (o ascissa curvilinea). Qualche esempio ed esercizio. Integrale di linea $\int_\gamma f ds = \int_a^b f(\gamma(t))|\dot{\gamma}(t)|dt$ (con $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$). L'integrale $\int_\gamma f ds$ non dipende dalla parametrizzazione della curva (*). Esercizi.

- 3.11.2009 Qualche altro esercizio sulle curve e sugli integrali di linea.
 Funzioni di più variabili: esempi di funzioni da \mathbf{R}^2 in \mathbf{R} e loro grafici.
 Insiemi di livello. Esempi di insiemi di livello per funzioni definite in \mathbf{R}^2
 e in \mathbf{R}^3 .
- 4.11.2009 Funzioni di n variabili a valori reali: continuità e derivabilità, esempi (se
 f è derivabile in tutte le direzioni non è necessariamente continua (*)).
 Differenziabilità. Se f è differenziabile è continua (*). Se f è differenziabile
 ammette derivate direzionali in ogni direzione (*). Caratterizzazione del
 differenziale.
 Esistenza e definizione del piano tangente.
- 5.11.2009 Direzione di massima pendenza e legame con il gradiente (*). Teorema
 del differenziale totale (*). Funzioni C^1 . Derivazione per funzioni com-
 poste ($f \circ \gamma$ e $g \circ f$ con f di n variabili, γ curva a valori in \mathbf{R}^n , $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$)
 (*).
 Ortogonalità del gradiente alle curve di livello (*). Teorema del valor
 medio (*). Se ∇f è il vettore nullo e f è definita in un insieme connesso
 per poligonali, allora f è costante (*).
 Esercizi ed esempi su limiti in più variabili.
- 10.11.2009 Esercizi ed esempi su limiti in più variabili e studio di continuità, deriv-
 abilità, differenziabilità per funzioni di più variabili.
- 11.11.2009 Punti critici o stazionari. Se x_o è stazionario per f e f è differenziabile
 in x_o allora $\nabla f(x_o) = (0, \dots, 0)$ (*).
 Derivate di ordine superiore al primo. Formula di Taylor per funzioni
 di più variabili con particolare attenzione allo sviluppo fino al 2° ordine.
 Matrice hessiana. Teorema di Schwarz.
 Data una matrice A simmetrica vale $\lambda_{\min}|x|^2 \leq (A \cdot x, x) \leq \lambda_{\max}|x|^2$ dove
 λ_{\min} è il minimo autovalore, λ_{\max} il massimo (*).
- 12.11.2009 Matrici (semi)definite positive, (semi)definite negative, condizione neces-
 saria e condizione sufficiente affinché un punto stazionario sia di minimo
 relativo o di massimo relativo. Legame con gli autovalori. Esempi ed
 esercizi.
- 17.11.2009 Esercizi su massimi e minimi.
- 18.11.2009 Esercizi su massimi e minimi.
- 19.11.2009 Funzioni vettoriali: continuità, differenziabilità, matrice jacobiana, derivazione
 per funzioni composte vettoriali.
 Teorema di Dini (o delle funzioni implicite) nel caso di due variabili reali
 e a valori reali (*). Esempi ed esercizi.

- 24.11.2009 Teorema di Dini nei seguenti casi: funzioni scalari di tre variabili, sistemi di due equazioni scalari di tre variabili, caso generale. Esempi: vettore tangente e normale ad una curva che è grafico, vettori tangenti e normale ad una superficie che è grafico; nel caso tali grafici siano anche luoghi di zeri di una funzione f , legame della normale col gradiente di tale f .
- 25.11.2009 Metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Esercizi.
- 26.11.2009 Altri esercizi sul metodo dei moltiplicatori di Lagrange.
 Integrale di Riemann in più variabili - In dimensione 2: misura di un rettangolo chiuso, insiemi normali (chiusi), definizione di integrale per una funzione definita in un rettangolo e in un insieme normale, formule di riduzione, alcune proprietà dell'integrale, esempio di una funzione non Riemann-integrabile..
 Osservazione: l'integrale di una funzione Riemann-integrabile in un insieme normale E e quello della stessa funzione nella parte interna di E coincidono.
- 1.12.2009 Integrali: continuazione - Integrale su un plurirettangolo e sull'unione di insiemi normali, integrale su un insieme generico, insiemi trascurabili e loro caratterizzazione, esempi di insiemi trascurabili. L'insieme $\mathbf{Q}^2 \cap R$, dove \mathbf{Q}^2 è l'insieme delle coppie di razionali e R un qualunque rettangolo (limitato) non è trascurabile; ciononostante, per ogni δ positivo esiste un plurirettangolo che contiene \mathbf{Q}^2 che ha misura minore di δ .
- 2.12.2009 Integrali tripli: insiemi normali, formule di riduzione. Integrali in n variabili: cenni.
 Integrali generalizzati su domini illimitati. Il significato geometrico del determinante di una trasformazione lineare da \mathbf{R}^2 in \mathbf{R}^2 , in particolare calcolo esplicito dell'area di un parallelogramma, e in generale da \mathbf{R}^n in \mathbf{R}^n . Definizione di diffeomorfismo. Formula per il calcolo del volume di un insieme sotto l'azione di una mappa lineare (o affine) da \mathbf{R}^n a \mathbf{R}^n . Teorema di invertibilità locale. Teorema: formula di integrazione per cambiamento di variabili.
- 3.12.2009 (orario 9.00-11.00, lezione di recupero in vece del 7 gennaio) Alcuni cambi di variabili standard: coordinate polari, coordinate cilindriche e coordinate sferiche. Esercizi su integrali doppi.
- 3.12.2009 Esercizi su integrali doppi e tripli.
- 9.12.2009 Superfici: definizione di superficie regolare, sostegno di una superficie, prodotto vettoriale tra due vettori, definizione di vettore normale ad una superficie. Esempi: superfici che sono grafici, nastro di Möbius. Superfici

orientate. Piano tangente.

Modo intuitivo per approssimare l'area di una superficie. Controesempio di Schwarz (cenni). Modo alternativo per calcolare l'area di un parallelogramma: una interpretazione geometrica del prodotto vettoriale di due vettori.

10.12.2009 Definizione di area e di integrale superficiale. Superfici di rotazione. Esempi ed esercizi.

15.12.2009 Esercizi su integrali di superficie.

Campi vettoriali: introduzione, definizione di integrale di un campo lungo un cammino. L'integrale lungo cammini equivalenti è lo stesso, a meno del segno dell'orientazione del cammino (*). Esempi.

16.12.2009 Campi che sono gradienti. Insiemi connessi per archi. Campi conservativi e primitive di un campo (dette anche potenziali). Caratterizzazione dei campi conservativi (*). Campi chiusi (detti anche irrotazionali). Definizione di curve omotope. Aperti semplicemente connessi. Sugli aperti semplicemente connessi i campi chiusi e C^1 sono conservativi. Esempi e controesempi. Esempi su come ricavare una primitiva.

17.12.2009 Esempi su come ricavare una primitiva di un campo conservativo. Aperti regolari $A \subset \mathbf{R}^2$, orientazione positiva di ∂A Teorema della divergenza: enunciato generale. Formule di Gauss-Green (*).

12.01.2010 Dimostrazione del teorema della divergenza in dimensione 2 e versione alternativa delle formule di Gauss-Green (*).

13.01.2010 Esercizi su calcolo di integrali e flussi di campi attraverso superfici usando il teorema della divergenza.
Teorema di Stokes (*).

14.01.2010 Esercizi.

19.01.2010 Esercizi.

20.01.2010 Esercizi.

21.01.2010 Esercizi.