

Corso di laurea: Ingegneria aerospaziale e meccanica

Programma di **Fondamenti di Analisi Matematica II** – a.a. 2012/13

Docente: Fabio Paronetto

Gli argomenti denotati con un asterisco tra parentesi (e solo quelli) sono stati dimostrati.

1.10.2012 Introduzione al corso.

Spazio a n dimensioni, base e prodotto scalare standard in $\mathbf{R}^n$. Definizione di norma e distanza e loro proprietà. Tre esempi di norme diverse su $\mathbf{R}^n$. Norma euclidea o modulo in $\mathbf{R}^n$.

2.10.2012 Un po' di topologia di $\mathbf{R}^n$: intorni sferici o palle in $\mathbf{R}^n$, insiemi aperti e chiusi e loro caratterizzazioni, punto interno, punto esterno, punto di frontiera. Parte interna, chiusura, frontiera o bordo di un insieme. Esempi. Punto di accumulazione per un insieme, punto isolato. Insiemi limitati, insiemi compatti di $\mathbf{R}^n$. Segmento e poligonale. Insiemi connessi e connessi per poligonalità.

3.10.2012 Insiemi convessi, insiemi stellati. Esempi.

Successioni: definizione di limite; successione convergente, successione limitata. Una successione è convergente se e solo se lo sono tutte le sue componenti (*). Caratterizzazione degli insiemi chiusi, degli insiemi compatti, dei punti di accumulazione, tramite successioni. Definizione di limite per una funzione da $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^k$.

Curve: introduzione, definizione di curva, di sostegno, esempi.

8.10.2012 Esempi di curve: poligonale, circonferenza, ellisse. Curve cartesiane, esempi ed esercizi. Richiamo della definizione di limite e definizione di curva continua, derivabile, C^1 . Curve regolari, regolari a tratti, C^1 a tratti, semplici, chiuse. Esempi vari. Cambi di parametro per le curve, curve equivalenti. Esempi ed esercizi. Coordinate polari.

9.10.2012 Forma polare per le curve nel piano. Esercizi. Curve come luogo di zeri di funzioni di più variabili: in particolare come luogo zeri di funzioni da $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}$ e come intersezione del luogo di zeri di due funzioni da $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}$. Integrale per una funzione a valori vettoriali. Lunghezza di una curva.

10.10.2012 Funzioni assolutamente continue: definizione, controesempi. Le funzioni di una variabile reale continue su di un insieme compatto sono anche

uniformemente continue.

Caratterizzazione della lunghezza per curve C^1 come l'integrale del modulo della derivata prima (*). Parametro d'arco o ascissa curvilinea. Esercizi.

15.10.2012 Integrali curvilinei (di prima specie). Esercizi. Baricentro di una curva. Vettore tangente, velocità, retta tangente e versore tangente. Accelerazione, curvatura e raggio di curvatura nel caso di curve parametrizzate con l'ascissa curvilinea.

16.10.2012 Funzioni di più variabili: qualche grafico, insiemi di livello, funzioni radiali. Esempi. Continuità: definizione, sempio di una funzione continua lungo tutte le rette per un punto, ma che non è continua in tale punto. Una funzione è continua in un punto se e solo se le restrizioni a tutte le curve passanti per quel punto sono continue. Derivabilità: derivate parziali e derivate direzionali. Esempio di una funzione che ammette tutte le derivate direzionali in un punto, ma che in tale punto non è continua.

17.10.2012 Differenziabilità: definizione per funzioni a valori scalari e confronto con la dimensione 1. Conseguenze della differenziabilità: una funzione differenziabile in un punto è continua in quel punto (*); una funzione differenziabile in un punto amette tutte le derivate direzionali in quel punto (*). Altro esempio di una funzione che ammette tutte le derivate direzionali in un punto, ma che in tale punto non è continua. Rappresentazione del differenziale per funzioni da $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}$.

Qualche esercizio su limiti in $\mathbf{R}^n$.

22.10.2012 Piano tangente ad un grafico per funzioni da $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}$. Esempi. Il gradiente in un punto x_o individua la direzione v lungo la quale $\frac{\partial f}{\partial v}(x_o)$ è massima (*). Commenti. Formula di derivazione per $f \circ \gamma$, f funzione di più variabili, γ curva (*). Commenti ed esempi. In particolare: se $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ è differenziabile e gli insiemi di livello di f sono curve allora il gradiente è ortogonale al vettore tangente a tali curve.

23.10.2012 Ancora esercizi sui limiti.

24.10.2012 Teorema del differenziale totale (*). Esercizi su continuità, derivabilità, differenziabilità di una funzione.

29.10.2012 Derivabilità di funzioni composte. Teorema del valor medio (*). Se f differenziabile ha gradiente nullo in un aperto connesso allora è costante (*). Condizioni necessarie per gli estremi: se un punto x_o , interno al dominio di definizione di una funzione f , è di estremo locale (di minimo

o di massimo locale) e f è differenziabile in tale punto allora $\nabla f(x_o)$ è il vettore nullo (*).

Esercizi su massimi e minimi.

30.10.2012 Esercizi su massimi e minimi.

31.10.2012 Esercizi su massimi e minimi. Data una matrice A simmetrica vale $\lambda_{\min}|x|^2 \leq (A \cdot x, x) \leq \lambda_{\max}|x|^2$ dove $\lambda_{\min}$ è il minimo autovalore, $\lambda_{\max}$ il massimo (*).

Derivate di ordine superiore al primo. Teorema di Schwarz. Differenziale secondo. Matrice hessiana. Forme quadratiche: definite positive, definite negative, semi-definite positive, semi-definite negative.

5.11.2012 Formula di Taylor per funzioni di più variabili fino al 2° ordine. Caratterizzazione delle matrici definite positive e definite negative tramite i determinanti dei minori principali. Se x_o è un punto di minimo locale allora $\langle H_f(x_o) \cdot v, v \rangle \geq 0$ per ogni vettore v ; se $\langle H_f(x_o) \cdot v, v \rangle > 0$ per ogni vettore v non nullo allora x_o è un punto di minimo stretto; se x_o è un punto di massimo locale allora $\langle H_f(x_o) \cdot v, v \rangle \leq 0$ per ogni vettore v ; se $\langle H_f(x_o) \cdot v, v \rangle < 0$ per ogni vettore v non nullo allora x_o è un punto di massimo stretto (*).

Esercizi sulla natura di punti critici per funzioni di due o tre variabili.

6.11.2012 Teorema della permanenza del segno.

Funzioni implicite: teorema del Dini per funzioni scalari di due variabili (*). Esempi ed esercizi.

7.11.2012 Esercizi sulle funzioni implicite per funzioni scalari di due variabili.

Funzioni di più variabili vettoriali: continuità, differenziabilità, matrice jacobiana, formula di Taylor al primo ordine. Derivazione per funzioni composte: matrice jacobiana della composizione di due funzioni (*).

Teorema delle funzioni implicite: caso generale.

12.11.2012 Alcuni casi particolari del teorema delle funzioni implicite - Caso in cui il luogo degli zeri è una curva in $\mathbf{R}^2$, caso in cui è una superficie in $\mathbf{R}^3$, caso in cui è una curva in $\mathbf{R}^3$ (sistemi di due equazioni). Esempi.

13.11.2012 Ancora esempi riguardo il teorema delle funzioni implicite.

Moltiplicatori di Lagrange: esempi del caso di una curva in $\mathbf{R}^2$, di una superficie in $\mathbf{R}^3$, di una curva in $\mathbf{R}^3$. Teorema nel caso generale senza dimostrazione. Esercizi.

14.11.2012 Esercizi con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

19.11.2012 Integrale per funzioni di più variabili - In dimensione 2: misura di un rettangolo chiuso, definizione di funzione integrabile su un rettangolo, definizione di funzione integrabile su un dominio D limitato di $\mathbf{R}^2$, insieme misurabile secondo Peano-Jordan in $\mathbf{R}^2$, misura di Peano-Jordan in $\mathbf{R}^2$. La misura di Peano-Jordan due-dimensionale di una curva semplice è nulla. Esempi.

20.11.2012 La lezione è saltata.

21.11.2012 Esempio di un insieme non misurabile secondo Peano-Jordan (e di una funzione non integrabile) e la cui frontiera non ha misura nulla: l'insieme $\mathbf{Q}^2 \cap [0, 1]^2$, dove $\mathbf{Q}^2$ è l'insieme delle coppie di razionali, non è misurabile secondo Peano-Jordan; ciononostante, per ogni δ positivo esiste un insieme che contiene $\mathbf{Q}^2$ che ha misura minore di δ .

Insiemi normali (chiusi) nel piano, formule di riduzione. Osservazione: l'integrale di una funzione integrabile in un insieme normale E chiuso e quello della stessa funzione nella parte interna di E coincidono.

Integrale per funzioni di 3 variabili: misura di un parallelepipedo, funzione integrabile su un parallelepipedo e su un dominio D limitato di $\mathbf{R}^3$, insiemi misurabili, insiemi normali in $\mathbf{R}^3$. Formule di riduzione: integrazione "per fili", integrazione "per strati".

Proprietà dell'integrale (linearità, positività, $\int_{E_1 \cup E_2} f(x) dx = \int_{E_1} f(x) dx + \int_{E_2} f(x) dx$ se E_1, E_2 aperti disgiunti, $|\int_E f(x) dx| \leq \int_E |f(x)| dx$ se E misurabile e $|f|$ integrabile).

Area di un parallelogramma (*): data un'applicazione lineare $L : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ si è calcolata l'area dell'immagine tramite L del quadrato $[0, 1]^2$.

Formula generale della misura di $L(K)$ con compatto K di $\mathbf{R}^n$ e $L : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ applicazione lineare o affine: se $L(x) = A \cdot x + x_o$ ($x, x_o \in \mathbf{R}^n$, A matrice $n \times n$) vale

$$\text{mis}_n(L(K)) = |\det A| \text{mis}_n(K). \quad (1)$$

Definizione di diffeomorfismo e teorema di invertibilità locale.

26.11.2009 Commenti sulla formula (1). Commenti sul teorema di inversione locale. Formula di Taylor al primo ordine per funzioni $F : A \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ con $F \in C^1(A)$. Misura di un insieme $F(E)$ dove F è un diffeomorfismo da E in $F(E)$. Formula di integrazione sotto un cambio di variabile.

Cambi standard: coordinate polari, coordinate cilindriche, coordinate sferiche. Esempi (area del cerchio, volume della sfera).

27.11.2009 Esercizi sugli integrali.

28.11.2009 Esercizi sugli integrali.

Superfici: definizione di superficie regolare, esempi. Prodotto vettoriale $v \wedge w$ tra due vettori $v, w \in \mathbf{R}^3$: il vettore $v \wedge w$ è nullo se e solo se $v = \lambda w$ per qualche $\lambda \in \mathbf{R}$ (cioè se e solo se v e w sono linearmente dipendenti); diversamente è ortogonale sia a v che a w .

Superfici cartesiane. Superfici orientabili. Esempio di superficie non orientabile: nastro di Möbius.

29.11.2009 (recupero del 20.11.2012)

Superfici equivalenti. Data φ superficie, i vettori $\varphi_u(u_o, v_o)$ e $\varphi_v(u_o, v_o)$ generano il piano tangente alla superficie nel punto $\varphi(u_o, v_o)$. I due vettori $\varphi_u(u_o, v_o) \wedge \varphi_v(u_o, v_o)$ e $-\varphi_u(u_o, v_o) \wedge \varphi_v(u_o, v_o)$ sono ortogonali a tale piano tangente nel punto $\varphi(u_o, v_o)$.

Ancora sull'area di un parallelogramma (*): area del parallelogramma visto come figura piana immersa in $\mathbf{R}^3$. Area di una superficie, integrali superficiali. Due superfici equivalenti hanno la stessa area.

Superfici di rotazione. Esercizi sul calcolo dell'area.

3.12.2012 Campi vettoriali: introduzione, definizione di integrale di un campo lungo un cammino (integrali curvilinei di seconda specie). L'integrale lungo cammini equivalenti è lo stesso, a meno del segno dell'orientazione del cammino. Esempi. Campi che sono gradienti. Insiemi connessi per archi. Campi conservativi e primitive di un campo (potenziali). Caratterizzazione dei campi conservativi. Definizione di rotore in $\mathbf{R}^3$. Campi irrotazionali. Aperti semplicemente connessi. Sugli aperti semplicemente connessi i campi irrotazionali e C^1 sono conservativi. Esempi e controesempi. Esempi su come ricavare una primitiva.

4.12.2012 Esercizi su campi: integrali di seconda specie e calcolo di potenziali.

5.12.2012 Orientazioni positiva e negativa per ∂A , con A aperto connesso di $\mathbf{R}^2$. Formule di Gauss-Green su insiemi normali (*). Applicazioni al calcolo di integrali in due variabili. Teorema della divergenza in $n = 2$ e $n = 3$ (con dimostrazione solo nel caso $n = 2$).

10.12.2012 Lezione saltata.

11.12.2012 Lezione saltata.

12.12.2012 Lezione saltata.

17.12.2012 Teorema della divergenza: esempi di calcolo di flussi attraverso curve e superfici chiuse e non.

Teorema di Stokes (con traccia della dimostrazione).

- 18.12.2012 Equazioni differenziali ordinarie: introduzione, forma generale per un'equazione di grado n , forma normale per un'equazione di grado n , esempi semplici. Linee o curve integrali: esempi su come trovarle. Forma generale per la soluzione di un'equazione lineare del primo ordine. Definizione di problema di Cauchy. Un esempio di problema di Cauchy che ha infinite soluzioni. Definizione di funzione (localmente) lipschitziana. Teorema di esistenza e unicità per il problema di Cauchy.
- 19.12.2012 Esempi ed esercizi sul problema di Cauchy. Come scrivere la soluzione. Esercizi su equazioni lineari del primo ordine. Alcuni altri esempi di equazioni integrabili: equazioni a variabili separabili, equazioni di tipo omogeneo.
- 7.1.2013 Ancora equazioni del primo ordine: esercizi su equazioni di tipo omogeneo, equazioni di Bernoulli con esempi, equazioni differenziali esatte con esempi.
- 8.1.2013 Ancora esempi su equazioni differenziali esatte: come trovare un fattore integrante. Problema di Cauchy vettoriale. Problema di Cauchy del secondo (e n -esimo) ordine. Come ridurre un problema di Cauchy del secondo (o n -esimo) ordine ad un problema di Cauchy vettoriale. Alcuni esempi del secondo ordine.
- 9.1.2013 Equazioni lineari di grado n con particolare attenzione al grado 2: equazioni omogenee e non. Le equazioni omogenee di grado n hanno n (e non più di n) soluzioni distinte linearmente indipendenti. Le soluzioni di un'equazione lineare di grado n formano uno spazio vettoriale di grado n . Riduzione di grado per le equazioni di secondo grado (truccetto di D'Alembert). Equazioni a coefficienti costanti: soluzioni delle equazioni di grado 2.
- 10.1.2013 Equazioni a coefficienti costanti: esercizi ed esempi. Come trovare le soluzioni di equazioni lineari a coefficienti costanti omogenee e non. Metodo degli annihilatori.