Corso di laurea: Ingegneria aerospaziale e meccanica
Programma di **Fondamenti di Analisi Matematica II** – a.a. 2013/14
Docente: Fabio Paronetto

Gli argomenti denotati con un asterisco tra parentesi (e solo quelli) sono stati dimostrati.

1.10.2013 Introduzione al corso.
Spazio a n dimensioni. Definizione di prodotto scalare, norma, distanza. Base, prodotto scalare, norma e distanza "standard" in $\mathbf{R}^n$ (la norma standard è detta *euclidea* o modulo in $\mathbf{R}^n$). Ogni prodotto scalare induce una norma, ma non tutte le norme sono indotte da un prodotto scalare; ogni norma induce una distanza, ma non tutte le distanze sono indotte da una norma. Esempi di norme diverse su $\mathbf{R}^n$, di una norma che non è indotta da un prodotto scalare, di una distanza che non è indotta da una norma.

2.10.2013 Disuguaglianza di Schwarz (con dimostrazione solo nel caso del prodotto scalare euclideo e solamente in $\mathbf{R}^2$) (*). Un po' di topologia di $\mathbf{R}^n$: intorni sferici o palle in $\mathbf{R}^n$, insiemi aperti e chiusi e loro caratterizzazioni, punto interno, punto esterno, punto di frontiera. Parte interna, chiusura, frontiera o bordo di un insieme. Esempi. Punto di accumulazione per un insieme, punto isolato.

7.10.2013 Altri esempi di insiemi chiusi ed insieme aperti. Segmento e poligonale. Insiemi limitati, insiemi compatti, insiemi connessi e connessi per poligonali, convessi, stellati di $\mathbf{R}^n$. Esempi.
Successioni: definizione di limite; successione convergente, successione limitata. Una successione è convergente se e solo se lo sono tutte le sue componenti $(*)$. Caratterizzazione degli insiemi chiusi, degli insiemi compatti, dei punti di accumulazione, tramite successioni.

8.10.2013 Definizione di limite per una funzione da $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^k$.
Curve: introduzione, definizione di curva, di sostegno, esempi. Differenza tra immagine e grafico. Esempi di curve: segmento e retta passanti per due punti dati o per un punto e aventi una particolare direzione assegnata, circonferenza, ellisse. Curve cartesiane, esempi ed esercizi. Richiamo della definizione di limite; definizione di curva continua, derivabile, C^1. Curve regolari, regolari a tratti, C^1 a tratti, semplici, chiuse. Esempi vari.

9.10.2013 Curve regolari: esempi. Cambi di parametro per le curve, curve equivalenti. Esempi ed esercizi. Coordinate polari. Lunghezza di una curva come integrale del modulo della derivata. Ascissa curvilinea o parametro d'arco: definizione e prime proprietà.

14.10.2013 La lunghezza di una curva non dipende dalla parametrizzazione scelta $(*)$. Esercizi con l'ascissa curvilinea e lunghezza di una curva.
Integrali curvilinei (di prima specie). Esercizi ed esempi. Baricentro di una curva.

15.10.2013 Esercizi su lunghezza di una curva, parametro d'arco, calcolo del baricentro di una curva. Definizione di velocità, retta tangente, versore tangente. Derivata seconda con particolare attenzione al caso in cui la curva è parametrizzata con il parametro d'arco.

Curve come luogo di zeri di funzioni da $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}$ e più in generale come intersezione di grafici di due funzioni da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$. Esempio di parametrizzazione di una tale curva.

16.10.2013 Altro esempio di parametrizzazione di una curva data come intersezione di due grafici di funzioni da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$.

Funzioni di più variabili: qualche grafico, insiemi di livello, funzioni radiali. Esempi.
Continuità: definizione, esempi di funzioni le cui restrizioni lungo tutte le rette per un punto sono continue, ma che non sono continue.
Esempi di funzioni le cui restrizioni lungo curve polinomiali di ordine minore di n passanti per un punto sono continue, ma che non sono continue.

21.10.2013 (tre ore) Una funzione è continua in un punto se e solo se le restrizioni a tutte le curve continue passanti per quel punto sono continue. Derivabilità: derivate parziali e derivate direzionali. Differenziabilità: definizione per funzioni a valori scalari e confronto con la dimensione 1. Conseguenze della differenziabilità: una funzione differenziabile in un punto è continua in quel punto $(*)$; una funzione differenziabile in un punto ammette tutte le derivate direzionali in quel punto $(*)$. Esempio di una funzione che ammette tutte le derivate direzionali in un punto, ma che in tale punto non è continua. Rappresentazione del differenziale per funzioni da $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}$: il differenziale in un punto x_o è l'applicazione lineare $df_{x_o}(h) = \langle \nabla f(x_o), h \rangle$; se v è un vettore di modulo 1 si ha inoltre $df_{x_o}(v) = \frac{\partial f}{\partial v}(x_o)$. Conseguenza: se f è differenziabile in un punto x_o vale la formula $\frac{\partial f}{\partial v}(x_o) = \langle \nabla f(x_o), v \rangle$. Esempi ed esercizi.

22.10.2013 Teorema del differenziale totale $(*)$.
Esercizi su continuità, derivabilità, differenziabilità. Esercizi sui limiti in più variabili.

23.10.2013 Un esempio di funzione continua, derivabile in tutte le direzioni con tutte derivate nulle in un punto, ma ivi non differenziabile. Un esempio di piano tangente. Esercizi su limiti all'infinito.
Definizione di massimo, massimo stretto, massimo locale. Teorema di Weierstrass. La derivata direzionale di una funzione f differenziabile in un punto x_o assume il valore massimo nella direzione del gradiente, cioè nella direzione $\nabla f(x_o)/|\nabla f(x_o)|$, e minimo nella direzione opposta, cioè $-\nabla f(x_o)/|\nabla f(x_o)|$.

28.10.2013 (tre ore) Ancora sul fatto che $\frac{\partial f}{\partial v}(x_o)$ è massima se $v = \nabla f(x_o)/|\nabla f(x_o)|$. Commenti. Formula di derivazione per $f \circ \gamma$, f funzione di più variabili, γ curva $(*)$. Commenti ed esempi. In particolare: se $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ è differenziabile e gli insiemi di livello di f sono curve allora il gradiente è ortogonale al vettore tangente a tali curve. Più in generale, in dimensione più alta di 2, il gradiente è ortogonale alle (iper-)superfici di livello.
Derivabilità di funzioni composte. Teorema del valor medio $(*)$. Se f è differenziabile e ha gradiente nullo in un aperto connesso allora è costante $(*)$. Derivate successive: derivate seconde, funzioni di classe C^2 e teorema di Schwarz. Commenti sulle derivate miste di ordine superiore a 2. Un esempio di funzione di classe $C^1(\mathbf{R}^2)$, che ammette derivate seconde, ma le cui derivate seconde miste in un punto non sono uguali.

29.10.2013 Funzioni di più variabili a valori vettoriali: differenziabilità, matrice jacobiana, formula di derivazione per funzioni composte $(*)$. Diffeomorfismo locale e teorema di invertibilità locale.

Integrale per funzioni di più variabili - In dimensione 2: misura di un rettangolo chiuso, definizione di funzione integrabile su un rettangolo, formule di riduzione per funzioni continue su un rettangolo, insiemi normali nel piano, formule di riduzione per funzioni continue su un insieme normale, proprietà dell'integrale per funzioni continue. Osservazione: l'integrale di una funzione continua in un insieme normale E chiuso e quello della stessa funzione nella parte interna di E coincidono. Definizione di integrabilità per funzioni limitate definite su un dominio D limitato di $\mathbf{R}^2$, insieme misurabile secondo Peano-Jordan in $\mathbf{R}^2$. Esempio di un insieme non misurabile secondo Peano-Jordan (e di una funzione non integrabile) e la cui frontiera non ha misura nulla.

30.10.2013 Ancora sulla definizione di insieme misurabile. Caratterizzazione degli insiemi misurabili e trascurabili (o di misura nulla). Esempi: segmenti, grafici di funzioni e in generale curve di lunghezza finita. L'insieme $\mathbf{Q}^2 \cap [0,1]^2$, dove $\mathbf{Q}^2$ è l'insieme delle coppie di razionali, non è misurabile secondo Peano-Jordan; ciononostante, per ogni δ positivo esiste un insieme che contiene $\mathbf{Q}^2$ che ha misura minore di δ.
Data una funzione integrabile $f : D \to [m, M]$, D limitato, valgono ancora le formule di riduzione e le proprietà viste per le funzioni continue.

Integrale per funzioni di 3 variabili: misura di un parallelepipedo, funzione integrabile su un parallelepipedo e su un dominio D limitato di $\mathbf{R}^3$, insiemi misurabili, insiemi normali in $\mathbf{R}^3$. Formule di riduzione: integrazione "per fili", integrazione "per strati".
Valgono le proprietà analoghe a quelle viste per il caso due-dimensionale. Insiemi regolari.

4.11.2013 (tre ore) Integrali generalizzati: definizione di integrale generalizzato di una funzione limitata su un insieme illimitato.
Esercizi su integrali doppi e tripli usando le coordinate cartesiane.
Area di un parallelogramma (∗): data un'applicazione lineare $L : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ si è calcolata l'area dell'immagine tramite L del quadrato $[0,1]^2$.
Formula generale della misura di $L(K)$ con compatto K di $\mathbf{R}^n$ e $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ applicazione lineare o affine: se $L(x) = A \cdot x + x_o$ ($x, x_o \in \mathbf{R}^n$, A matrice $n \times n$) vale

$$\mathrm{mis}_n(L(K)) = |\det A| \ \mathrm{mis}_n(K). \tag{1}$$

Commenti sulla formula (1). Misura di un insieme $F(E)$ dove F è un diffeomorfismo da E in $F(E)$. Formula di integrazione sotto un cambio di variabile.
Cambi standard: coordinate polari, coordinate cilindriche. Esempi (area del cerchio, volume di un cilindro).

5.11.2013 Lezione saltata.

6.11.2013 Cambi standard: coordinate sferiche. Esempio: volume di una sfera di raggio r. Esercizi sugli integrali.

11.11.2013 Esercizi sugli integrali.

Superfici: definizione di superficie regolare, sostegno di una superficie, primi esempi.

12.11.2013 Superfici compatte e con bordo. Prodotto vettoriale tra due vettori e alcune conseguenze. Definizione di vettore normale ad una superficie. Superfici cartesiane. Superfici orientate: esempio di una superficie non orientabile (nastro di Möbius). Superfici equivalenti: con la stessa orientazione oppure con orientazione opposta. Piano tangente ad una superficie. Superfici come luogo di zeri. Calcolo dell'area di un parallelogramma nello spazio: una interpretazione geometrica del prodotto vettoriale di due vettori.

13.11.2013 (tre ore) Definizione di area di una superficie e di integrale superficiale. Superfici di rotazione. Esempi ed esercizi su integrali di superficie.

Campi vettoriali: introduzione, definizione di integrale di un campo lungo un cammino (integrali curvilinei di seconda specie). L'integrale lungo cammini equivalenti è lo stesso, a meno del segno dell'orientazione del cammino. Esempi. Campi che sono gradienti. Insiemi connessi per archi. Campi conservativi e primitive di un campo (potenziali). Caratterizzazione dei campi conservativi $(*)$. Campi irrotazionali. Aperti semplicemente connessi. Un campo $F : A \to \mathbf{R}^n$ di classe $C^1(A)$ e conservativo è irrotazionale. Un campo $F : A \to \mathbf{R}^n$ irrotazionale e di classe $C^1(A)$ con A aperto semplicemente connesso è conservativo. Esempio di un campo irrotazionale definito in un aperto non semplicemente connesso che non è conservativo.

20.11.2013 Esempi e controesempi di campi conservativi. Esercizi su come ricavare un potenziale.

22.11.2013 Definizione di divergenza di un campo. Flusso di un campo 2-dimensionale attraverso una curva e di un campo 3-dimensionale attraverso una superficie orientabile. Orientazioni positiva e negativa per ∂A, con A aperto connesso di $\mathbf{R}^2$. Formule di Gauss-Green su insiemi normali $(*)$. Applicazioni al calcolo di integrali in due variabili: esempi. Teorema della divergenza in $n = 2$ e $n = 3$ (con dimostrazione solo nel caso $n = 2$).

25.11.2013 (tre ore) Esercizi sul calcolo di integrali in due variabili usando le formule di Gauss-Green. Esercizi ed esempi sul calcolo di flussi di un campo attraverso una superficie chiusa o con bordo. Teorema di Stokes (con traccia della dimostrazione).

Massimi e minimi: Teorema di Weierstrass. Se un punto x_o interno al dominio di una funzione f di classe C^1 è di minimo o di massimo locale per f allora $\nabla f(x_o) = (0, \dots 0)$ $(*)$. Primi esempi dello studio di massimi e minimi in un compatto.

26.11.2013 Esercizi su massimi e minimi.

27.11.2013 Metodo dei moltiplicatori di Lagrange (mostrato nel caso di un vincolo che sia una curva regolare in $\mathbf{R}^2$, una superficie regolare in $\mathbf{R}^3$, accennato al caso di una curva in $\mathbf{R}^3$).
Esercizi su massimi e minimi con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

2.12.2013 Forme quadratiche associate ad una matrice simmetrica: definite positive, definite negative, semi-definite positive, semi-definite negative. Differenziale secondo. Matrice hessiana. Formula di Taylor per funzioni di più variabili fino al 2° ordine. Caratterizzazione delle matrici definite positive e definite negative tramite i determinenti dei minori principali. Se x_o è un punto di minimo locale allora $\langle H_f(x_o) \cdot v, v \rangle \geqslant 0$ per ogni vettore v; se $\langle H_f(x_o) \cdot v, v \rangle > 0$ per ogni vettore v non nullo allora x_o è un punto di minimo stretto; se x_o è un punto di massimo locale allora $\langle H_f(x_o) \cdot v, v \rangle \leqslant 0$ per ogni vettore v; se $\langle H_f(x_o) \cdot v, v \rangle < 0$ per ogni vettore v non nullo allora x_o è un punto di massimo stretto $(*)$.
Esercizi sulla natura di punti critici per funzioni di due variabili.

3.12.2013 Esercizi sulla natura di punti critici per funzioni di due o tre variabili.

Teorema della permanenza del segno. Funzioni implicite: teorema del Dini per funzioni scalari di due variabili $(*)$.

4.12.2013 (tre ore) Esercizi sulle funzioni implicite per funzioni scalari di due variabili.
Teorema delle funzioni implicite: caso generale. Alcuni casi particolari del teorema delle funzioni implicite - Caso in cui il luogo degli zeri è una curva in $\mathbf{R}^2$, caso in cui è una superficie in $\mathbf{R}^3$, caso in cui è una curva in $\mathbf{R}^3$ (sistemi di due equazioni). Esempi ed esercizi.

9.12.2013 (tre ore) Esercizi sul teorema delle funzioni implicite: luoghi di zeri che sono localmente superfici e intersezione di superfici (sistemi) che localmente sono curve.

Equazioni differenziali ordinarie: introduzione, forma generale per un'equazione di grado n, forma normale per un'equazione di grado n, equazioni autonome, esempi semplici. Linee o curve integrali: come trovarle in casi semplici. Forma generale per la soluzione di un'equazione lineare del primo ordine. Un'equazione lineare del primo ordine ammette infinite soluzioni.

10.12.2013 Definizione di problema di Cauchy. Un esempio di problema di Cauchy che ha una sola soluzione e un esempio che ha infinite soluzioni. Definizione di funzione lipschitziana in un intervallo. Teorema di esistenza e unicità (locale) per il problema di Cauchy. Esempi ed esercizi sul problema di Cauchy. Come scrivere la soluzione. Esercizi su equazioni lineari del primo ordine.

11.12.2013 Altri esempi di equazioni integrabili: equazioni a variabili separabili, equazioni di tipo omogeneo, equazioni di Bernoulli con esempi. Equazioni differenziali esatte con esempi.

16.12.2013 Ancora esempi su equazioni differenziali esatte: come trovare un fattore integrante. Esempi.
Problema di Cauchy vettoriale: esistenza e unicità locali. Problema di Cauchy del secondo (e n-esimo) ordine. Come ridurre un problema di Cauchy del secondo (o n-esimo) ordine ad un problema di Cauchy vettoriale. Metodi risolutivi per alcuni esempi del secondo ordine: $y'' = f(x)$, $y'' = f(x, y')$, $y'' = f(y)$, $y'' = f(y, y')$.

17.12.2013 Equazioni lineari di grado n con particolare attenzione al grado 2: equazioni omogenee e non. Le equazioni omogenee di grado n hanno n (e non più di n) soluzioni distinte linearmente indipendenti.
Le soluzioni di un'equazione lineare di grado n formano uno spazio vettoriale di grado n ($*$).
Equazioni a coefficienti costanti: soluzioni delle equazioni di grado 2.

18.12.2013 Equazioni a coefficienti costanti: esercizi ed esempi, anche di grado superiore al secondo.
Come trovare le soluzioni di equazioni lineari a coefficienti costanti non omogenee: il metodo degli annichilatori per alcuni dati particolari. Esercizi ed esempi.