

Corso di laurea: Ingegneria aerospaziale e meccanica
Programma di **Fondamenti di Analisi Matematica II** – a.a. 2014/15
Docente: Fabio Paronetto

Gli argomenti denotati con un asterisco tra parentesi (e solo quelli) sono stati dimostrati.

1.10.2014 Introduzione al corso.

Spazio a n dimensioni. Definizione di norma e di distanza, prodotto scalare euclideo, norma (modulo) euclidea, distanza euclidea in $\mathbf{R}^n$. Base “standard” in $\mathbf{R}^n$. Ogni prodotto scalare induce una norma, ma non tutte le norme sono indotte da un prodotto scalare; ogni norma induce una distanza, ma non tutte le distanze sono indotte da una norma. Esempi di norme diverse su $\mathbf{R}^n$, di una norma che non è indotta da un prodotto scalare.

Intorni sferici $B_r(x)$ (palla di centro x e raggio $r > 0$), definizione di insieme aperto, insieme chiuso, di punto interno, di punto esterno, di bordo (o frontiera) di un insieme. Esempi di insiemi aperti, chiusi, né aperti, né chiusi, e loro bordi.

2.10.2014 Insiemi limitati e compatti. Definizione di segmento e poligonale. Insiemi convessi e connessi per poligonalità. Esempi. Successioni a valori vettoriali e definizione di limite per una successione a valori vettoriali. Una successione converge se e solo se converge ognuna delle sue componenti scalari. Definizione di limite per una funzione di più variabili a valori vettoriali.

Curve: definizione di curva, di sostegno, parametrizzazione. Esempi di curve: segmento e retta passanti per due punti dati o per un punto e aventi una particolare direzione assegnata, circonferenza, ellisse. Ci sono infinite curve che hanno lo stesso sostegno. Esempi.

3.10.2014 L’unione finita e l’intersezione finita di insiemi aperti è un insieme aperto, L’unione finita e l’intersezione finita di insiemi chiusi è un insieme chiuso. Esempi (fra cui il sostegno di una curva).

Altri esempi di curve. Differenza tra immagine e grafico di una curva. Esempi. Curve cartesiane. Esempi.

Curve continue, derivabili, C^1 , regolari, semplici, chiuse. Esempi.

8.10.2014 Esempi di parametrizzazioni con derivata discontinua oppure C^1 , ma non regolari. Curve equivalenti: cambio di parametro e curve orientate. Coordinate polari e forma polare di una curva. Esempi ed esercizi.

- 9.10.2014 Curve nel piano come luogo di zeri di funzioni di due variabili ($F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$), curve nello spazio come intersezione dei luoghi degli zeri di due funzioni di tre variabili ($G, H : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$). Esempi e loro parametrizzazioni. Integrale di una funzione vettoriale (di una curva). Teorema fondamentale del calcolo integrale per le curve. Lemma: $|\int_a^b \gamma(t) dt| \leq \int_a^b |\gamma(t)| dt$. Definizione di lunghezza di una curva come estremo superiore della lunghezza delle poligoni inscritte alla curva.
- 10.10.2014 Ancora sulla definizione di lunghezza di una curva. Data una curva γ C^1 a tratti, la lunghezza di una poligonale inscritta a γ è minore o uguale dell'integrale di $|\gamma'|$ (*). Lunghezza di una curva come integrale del modulo della derivata, se la curva è C^1 a tratti. Esempi ed esercizi. Parametro d'arco o ascissa curvilinea: definizione e proprietà. Esempi ed esercizi.
- 15.10.2014 Integrali curvilinei (di prima specie). Esercizi ed esempi. Baricentro di una curva.
Definizione di velocità, retta tangente, versore tangente. Derivata seconda con particolare attenzione al caso in cui la curva è parametrizzata con il parametro d'arco. Vettore accelerazione. Curvatura e raggio di curvatura per una curva parametrizzata con il parametro d'arco.
- 16.10.2014 Funzioni di più variabili a valori reali. Introduzione, qualche semplice grafico, funzioni radiali, insiemi di livello.
Funzioni continue: definizione ed esempi. Una funzione f è continua in un punto x_o se e solo se le restrizioni di f a tutte le curve continue passanti per x_o sono continue, $\lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = l$ se e solo se $\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t)) = l$ per ogni curva continua $\gamma : (-\alpha, \alpha) \rightarrow \mathbf{R}^n$ con $\gamma(0) = x_o$. Un esempio di una funzione non continua in un punto, le cui restrizioni a tutte le rette per tale punto sono continue.
Definizione di punto di massimo e minimo, di massimo locale e minimo locale. Teorema di Weierstrass.
Definizione di derivata parziale e di derivata direzionale.
- 17.10.2014 Esempi di derivate parziali e direzionali.
Definizione di funzione derivabile, funzione di classe C^1 , gradiente di una funzione. Differenziabilità: definizione per funzioni a valori scalari e confronto con la dimensione 1. Conseguenze della differenziabilità: una funzione differenziabile in un punto è continua in quel punto (*); una funzione differenziabile in un punto ammette tutte le derivate direzionali in quel punto e inoltre $\frac{\partial f}{\partial v}(x_o) = \langle \nabla f(x_o), v \rangle$ (*). Esempio di una funzione che ammette tutte le derivate direzionali (nulle) in un punto, ma che in tale punto non è continua (e quindi nemmeno differenziabile). Esempio

di una funzione che ammette tutte le derivate direzionali in un punto, ma in tale punto la rappresentazione di $\frac{\partial f}{\partial v}(x_o)$ non è lineare rispetto a v (e quindi nemmeno differenziabile).

22.10.2014 Esercizi: continuità, derivabilità e differenziabilità di alcune funzioni. Limiti di funzioni di più variabili, sia al finito che all'infinito.

23.10.2014 Qualche altro esercizio su limiti all'infinito.

Ancora sul differenziale - piano tangente e formula di Taylor al primo ordine (con resto di Peano), cioè una funzione è differenziabile in un punto x_o se e solo se vale il seguente sviluppo di Taylor al primo ordine: $f(x) = f(x_o) + \langle \nabla f(x_o), x - x_o \rangle + o(|x - x_o|)$. Direzione di massima pendenza e legame con il gradiente (*). Derivata di $f \circ \gamma$ se $\gamma : I \rightarrow A$ derivabile in t_o e $f : A \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ differenziabile in $\gamma(t_o)$ (*). Commento: legame con le derivate direzionali.

24.10.2014 Il gradiente “è ortogonale alle curve di livello”, precisamente il gradiente ortogonale alla retta tangente ad una curva di livello in dimensione 2, al piano tangente ad un insieme di livello in dimensione 3 (*). Teorema del differenziale totale (*) (dimostrazione solo nel caso di $\mathbf{R}^2$). Ancora esercizi su continuità, derivabilità, differenziabilità di una funzione. Derivate successive: derivate seconde e teorema di Schwarz.

29.10.2014 Teorema del valor medio (*). Se f differenziabile e ha gradiente nullo in un aperto connesso allora è costante (*). Condizioni necessarie per gli estremi: se un punto x_o , interno al dominio di definizione di una funzione f , è di estremo locale (di minimo o di massimo locale) e f è differenziabile in tale punto allora $\nabla f(x_o)$ è il vettore nullo (*).

Esercizi su massimi e minimi.

30.10.2014 Esercizi su massimi e minimi.

31.10.2014 Esercizi su massimi e minimi.

Differenziale secondo e matrice hessiana. Formula di Taylor per funzioni di più variabili fino al 2° ordine. Se x_o è un punto di minimo locale allora $\langle H_f(x_o) \cdot v, v \rangle \geq 0$ per ogni vettore $v \in \mathbf{R}^n$; se $\langle H_f(x_o) \cdot v, v \rangle > 0$ per ogni vettore v non nullo allora x_o è un punto di minimo stretto; se x_o è un punto di massimo locale allora $\langle H_f(x_o) \cdot v, v \rangle \leq 0$ per ogni vettore v ; se $\langle H_f(x_o) \cdot v, v \rangle < 0$ per ogni vettore v non nullo allora x_o è un punto di massimo stretto (*).

5.11.2014 Matrici definite positive, definite negative, semidefinite positive, semidefinite negative, indefinite.

Criteri per capire il segno degli autovalori di una matrice e il comportamento di una funzione (di classe C^2) in un intorno di un punto critico. Esercizi sulla natura di punti critici.

6.11.2012 Teorema della permanenza del segno.

Funzioni implicite: teorema del Dini per funzioni scalari di due variabili (*). Esempi ed esercizi.

7.11.2014 Esercizi sulle funzioni implicite per funzioni scalari di due variabili.

Funzioni di più variabili vettoriali: continuità, differenziabilità, matrice jacobiana, formula di Taylor al primo ordine. Derivazione per funzioni composte: matrice jacobiana della composizione di due funzioni (*).

Teorema delle funzioni implicite: caso generale.

12.11.2014 Teorema delle funzioni implicite: caso in cui il luogo degli zeri ($F = 0$ con $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$) è una superficie cartesiana in $\mathbf{R}^3$. Esempi ed esercizi.

13.11.2014 Teorema delle funzioni implicite: caso in cui il luogo degli zeri è una curva in $\mathbf{R}^3$ (sistemi di due equazioni, $F_1 = 0$ e $F_2 = 0$ con $F_1, F_2 : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$). Esempi ed esercizi.

Moltiplicatori di Lagrange: esempio del caso di una curva in $\mathbf{R}^2$, di una superficie in $\mathbf{R}^3$, di una curva in $\mathbf{R}^3$. Spiegazione del metodo.

14.11.2014 Enunciato del teorema dei moltiplicatori di Lagrange.

Esercizi con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

19.11.2014 Lezione saltata per esami di stato.

20.11.2014 Integrale per funzioni di più variabili - In dimensione n : misura di un iper-rettangolo chiuso, definizione di funzione integrabile su un iper-rettangolo.

In dimensione 2: le funzioni continue su un rettangolo sono integrabili secondo Riemann. Formule di riduzione per funzioni continue su un rettangolo. Insiemi normali in $\mathbf{R}^2$. Formule di riduzione per funzioni continue su un insieme normale del piano. Definizione di funzione integrabile su un dominio D limitato di $\mathbf{R}^2$ e di insieme misurabile secondo Peano-Jordan in $\mathbf{R}^2$. Esempio di un insieme non misurabile secondo Peano-Jordan (e di una funzione non integrabile) e la cui frontiera non ha misura nulla: l'insieme $\mathbf{Q}^2 \cap [0, 1]^2$, dove $\mathbf{Q}^2$ è l'insieme delle coppie di razionali, non è misurabile secondo Peano-Jordan; ciononostante, per ogni δ positivo esiste un insieme che contiene $\mathbf{Q}^2$ che ha misura minore di δ .

Integrale per funzioni di 3 variabili: insiemi normali in $\mathbf{R}^3$. Formule di

riduzione: integrazione “per fili”, integrazione “per strati”.

Proprietà dell'integrale (linearità, positività, $\int_{E_1 \cup E_2} f(x) dx = \int_{E_1} f(x) dx + \int_{E_2} f(x) dx$ se $\overset{\circ}{E}_1$ e $\overset{\circ}{E}_2$ sono disgiunti, $|\int_E f(x) dx| \leq \int_E |f(x)| dx$ se E misurabile e $|f|$ integrabile).

21.11.2014 Integrali generalizzati su insiemi illimitati. Area di un parallelogramma (*): data un'applicazione lineare $L : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ si è calcolata l'area dell'immagine tramite L del quadrato $[0, 1]^2$.

Formula generale della misura di $L(K)$ con compatto K di $\mathbf{R}^n$ e $L : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ applicazione lineare o affine: se $L(x) = A \cdot x + x_o$ ($x, x_o \in \mathbf{R}^n$, A matrice $n \times n$) vale

$$\text{mis}_n(L(K)) = |\det A| \text{mis}_n(K). \quad (1)$$

Definizione di diffeomorfismo e teorema di invertibilità locale.

Formula di integrazione sotto un cambio di variabile che sia un diffeomorfismo.

Cambi standard: coordinate polari, coordinate cilindriche, coordinate sferiche. Esempi (area del cerchio, volume della sfera).

26.11.2014 Esercizi sugli integrali.

27.11.2014 Esercizi sugli integrali.

Superfici: definizione di superficie (regolare), di superficie compatta, di superficie con bordo e relativi esempi.

28.11.2014 Superfici: esempi di superfici con bordo. Prodotto vettoriale tra φ_u e φ_v . Piano tangente ad una superficie e vettore normale ad una superficie. Problema dell'orientabilità: superfici orientabili. Esempio di una superficie non orientabile: nastro di Möbius. Superfici equivalenti, con la stessa orientazione e con orientazione opposta.

Superfici cartesiane e superfici come luogo di zeri.

Calcolo dell'area di un parallelogramma immagine di un quadrato tramite un'applicazione lineare da $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^3$. Definizione di area di una superficie.

3.12.2014 (recupero del 19.11.2014) L'area di due superfici equivalenti è la stessa (*), cioè date $\varphi : A \rightarrow \mathbf{R}^3$ e $\psi : B \rightarrow \mathbf{R}^3$ equivalenti, $\Sigma = \varphi(A) = \psi(B)$, l'area di Σ è ben definita e le due quantità $\iint_A |\varphi_u \wedge \varphi_v| du dv = \iint_B |\psi_r \wedge \psi_s| dr ds$ coincidono (*).

In maniera analoga è ben posta la definizione di integrale di superficie per una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$, Ω aperto di $\mathbf{R}^3$ contenente Σ .

Esercizi ed esempi di integrali di superficie.

Campi di vettori: definizione di integrale curvilineo di seconda specie (lavoro di un campo lungo un cammino). Tale integrale dipende dall'orientazione del cammino.

- 3.12.2014 L'integrale lungo cammini equivalenti è lo stesso, a meno del segno dell'orientazione del cammino (*). Esempi. Campi che sono gradienti. Insiemi connessi per archi. Campi conservativi e primitive di un campo (potenziali). Caratterizzazione dei campi conservativi (*). Campi irrotazionali. Aperti semplicemente connessi. Sugli aperti semplicemente connessi i campi irrotazionali e C^1 sono conservativi.
- 4.12.2014 Esempi e controesempi di campi che ammettono potenziale. Esempi ed esercizi su integrali di seconda specie e calcolo di potenziali.
- 5.12.2014 Orientazioni positiva e negativa per ∂A , con A aperto connesso di $\mathbf{R}^2$. Formule di Gauss-Green su insiemi normali (*). Applicazioni al calcolo di integrali in due variabili. Teorema della divergenza in $n = 2$ e $n = 3$ (*) (con dimostrazione solo nel caso $n = 2$).
- 9.12.2014 Teorema della divergenza: esempi di calcolo di flussi attraverso curve e superfici chiuse e non.
Definizione di rotore in $\mathbf{R}^3$. Definizione di bordo orientato positivamente per una superficie con bordo. Teorema di Stokes. Esempi.
- 10.12.2014 Equazioni differenziali ordinarie: introduzione, forma generale per un'equazione di grado n , forma normale per un'equazione di grado n , esempi semplici. Linee o curve integrali: esempi su come trovarle. Forma generale per la soluzione di un'equazione lineare del primo ordine. Definizione di problema di Cauchy. Un esempio di problema di Cauchy che ha infinite soluzioni. Definizione di funzione (localmente) lipschitziana. Teorema di esistenza e unicità (locali) per il problema di Cauchy (senza dimostrazione). Definizione di soluzione massimale. Esempi.
- 11.12.2014 Esempi ed esercizi sul problema di Cauchy per un'equazione lineare del primo ordine. Come scrivere la soluzione. Alcuni altri esempi di equazioni integrabili: equazioni a variabili separabili, equazioni di tipo omogeneo.
- 17.12.2014 Equazioni lineari di grado n . Teorema di esistenza e unicità locale per equazioni di primo grado vettoriali e riduzione di un problema di Cauchy per un'equazione di grado n ad un'equazione di primo grado vettoriale. Le equazioni omogenee di grado n hanno n (e non più di n) soluzioni

distinte linearmente indipendenti.

Le soluzioni di un'equazione lineare di grado n formano uno spazio vettoriale di grado n (*).

Equazioni a coefficienti costanti: soluzioni delle equazioni di grado 1 e 2 omogenee. Esempi.

18.12.2014 Esempi ed esercizi su equazioni differenziali lineari di vario grado, omogenee e non. Caso non omogeneo: soluzioni per una classe di funzioni che ammettono annichilatore. Metodo degli annichilatori.