Corso di laurea: Ingegneria aerospaziale e meccanica
Programma di **Fondamenti di Analisi Matematica II** – a.a. 2015/16
Docente: Fabio Paronetto

Gli argomenti denotati con un asterisco tra parentesi (e solo quelli) sono stati dimostrati.

1.10.2015 Introduzione al corso.
Spazio a n dimensioni. Definizione di prodotto scalare, di norma e di distanza, prodotto scalare euclideo, norma (modulo) euclidea, distanza euclidea in $\mathbf{R}^n$. Base "standard" in in $\mathbf{R}^n$). Ogni prodotto scalare induce una norma, ma non tutte le norme sono indotte da un prodotto scalare; ogni norma induce una distanza, ma non tutte le distanze sono indotte da una norma. Esempi di norme diverse su $\mathbf{R}^n$, di una norma che non è indotta da un prodotto scalare.
Intorni sferici $B_r(x)$ (palla di centro x e raggio $r > 0$), definizione di insieme aperto, insieme chiuso. Esempi di insiemi aperti, chiusi, né aperti, né chiusi, e loro bordi.

1.10.2015 - bis Definizione di punto interno, di punto esterno, di bordo (o frontiera) di un insieme. Altri esempi di insiemi aperti, chiusi, né aperti, né chiusi, e loro bordi. Insiemi limitati e compatti. Definizione di segmento e poligonale. Insiemi convessi e connessi per poligonali. Esempi. Definizione di punto isolato e di punto di accumulazione. Successioni a valori vettoriali e definizione di limite per una successione a valori vettoriali. Una successione converge se e solo se converge ognuna delle sue componenti scalari. Definizione di limite per una funzione di più variabili a valori vettoriali.

2.10.2015 Curve: definizione di curva, di sostegno, parametrizzazione. Differenza tra immagine e grafico di una curva. Esempi. Esempi di curve: segmento e retta passanti per due punti dati, circonferenza. Lo stesso sostengo può essere parametrizzato in diversi modi (o equivalentemente curve diverse possono avere la stessa immagine). Esempi. Curve cartesiane. Esempi. Curve continue, derivabili, C^1, regolari, semplici, chiuse. Esempi.

7.10.2015 Retta passante per un punto e avente una particolare direzione assegnata. Ancora sulla derivata di una curva: vettore tangente, retta tangente ad una curva. Esempi ed esercizi. Esempio di una curva C^1, ma non regolare. Curve equivalenti, cambio di parametro, curve orientate. Esempi di cambio di parametro.

8.10.2015 Curve nel piano come luogo di zeri di funzioni di due variabili ($F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$), curve nello spazio come intersezione dei luoghi degli zeri di due funzioni di tre variabili ($G, H : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$). Esempi e loro parametrizzazioni. Coordinate polari. Forma polare di una curva. Esempi ed esercizi.

9.10.2015 Ancora esempi sulla forma polare di una curva.
Integrale di una funzione vettoriale (di una curva). Teorema fondamentale del calcolo integrale per le curve. Lemma: se γ è integrabile allora $|\int_a^b \gamma(t)dt| \leqslant \int_a^b |\gamma(t)|dt$.
Definizione di lunghezza di una curva come estremo superiore della lunghezza delle poligonali inscritte alla curva. Ancora sulla definizione di lunghezza di una curva. Data una curva γ C^1 a tratti, la lunghezza di una poligonale inscritta a γ è minore o uguale dell'integrale di $|\gamma'|$ $(*)$.
Lunghezza di una curva come integrale del modulo della derivata, se la curva è C^1 a tratti. Esempi ed esercizi.
Parametro d'arco o ascissa curvilinea: definizione e proprietà. Esempi ed esercizi.

14.10.2015 Esercizi su: calcolo della retta tangente ad una curva e parametrizzazione con il parametro d'arco.
Integrali curvilinei (di prima specie). Teorema: se γ e $\tilde{\gamma}$ sono cammini equivalenti allora $\int_\gamma f\, ds = \int_{\tilde{\gamma}} f\, ds$. Esercizi ed esempi.

15.10.2015 Baricentro di una curva. Esempi.
Derivata seconda con particolare attenzione al caso in cui la curva è parametrizzata con il parametro d'arco. Vettore accelerazione. Curvatura e raggio di curvatura per una curva parametrizzata con il parametro d'arco.

Funzioni di più variabili a valori reali. Introduzione, qualche semplice grafico, funzioni radiali, insiemi di livello.

16.10.2015 Funzioni continue: definizione. Restrizione di una funzione ad una curva. Una funzione f è continua in un punto x_o se e solo se le restrizioni di f a tutte le curve continue passanti per x_o sono continue, $\lim_{x \to x_o} f(x) = l$ se e solo se $\lim_{t \to 0} f(\gamma(t)) = l$ per ogni curva continua $\gamma : (-\alpha, \alpha) \to \mathbf{R}^n$ con $\gamma(0) = x_o$. Un esempio di una funzione non continua in un punto, le cui restrizioni a tutte le rette per tale punto sono continue.
Definizione di punto di massimo e minimo, di massimo e minimo stretto,

di massimo locale e minimo locale, di massimo locale e minimo locale stretto. Definizione di derivata parziale e di derivata direzionale. Esempi di derivate parziali.
Differenziabilità: definizione per funzioni a valori scalari e confronto con la dimensione 1.

21.10.2015 Definizione di funzione derivabile, funzione di classe C^1, gradiente di una funzione. Differenziabilità: ancora sul confronto con la differenziabilità in dimensione 1. Conseguenze della differenziabilità: una funzione differenziabile in un punto è continua in quel punto $(*)$; una funzione differenziabile in un punto ammette tutte le derivate direzionali in quel punto e inoltre $\frac{\partial f}{\partial v}(x_o) = \langle \nabla f(x_o), v \rangle$ $(*)$. Commenti.
Condizioni equivalenti alla differenziabilità: esistenza del piano tangente, formula di Taylor al prim'ordine (con resto di Peano).
Esercizi: continuità, derivabilità e differenziabilità di alcune funzioni.

22.10.2015 Esercizi su limiti al finito e all'infinito per funzioni di più variabili.

23.10.2015 Teorema di Weierstrass. Direzione di massima pendenza e legame con il gradiente $(*)$. Derivata di $f \circ \gamma$ se $\gamma : I \to A$ derivabile in t_o e $f : A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ differenziabile in $\gamma(t_o)$ $(*)$. Commento: legame con le derivate direzionali. Il gradiente "è ortogonale agli insiemi di livello": precisamente il gradiente è ortogonale alla retta tangente ad una curva di livello in dimensione 2, al piano tangente ad una superficie di livello in dimensione 3 $(*)$ (e in generale all'iperpiano tangente ad una ipersuperficie di livello). Teorema del differenziale totale $(*)$ (dimostrazione solo nel caso di $\mathbf{R}^2$).
Se f è differenziabile e ha gradiente nullo in un aperto connesso allora è costante. Controesempio nel caso f abbia gradiente nullo in un aperto sconnesso. Condizioni necessarie per gli estremi: se un punto x_o, interno al dominio di definizione di una funzione f, è di estremo locale (di minimo o di massimo locale) e f è differenziabile in tale punto allora $\nabla f(x_o)$ è il vettore nullo $(*)$.

28.10.2015 Esercizi su massimi e minimi su compatti.

29.10.2015 Esercizi su massimi e minimi su chiusi, limitati e non.

30.10.2015 Derivate successive alla prima: derivate seconde e teorema di Schwarz. Differenziale secondo e matrice hessiana. Formula di Taylor per funzioni di più variabili fino al 2° ordine. Se x_o è un punto di minimo locale allora $\langle H_f(x_o) \cdot v, v \rangle \geqslant 0$ per ogni vettore $v \in \mathbf{R}^n$; se $\langle H_f(x_o) \cdot v, v \rangle > 0$ per ogni vettore v non nullo allora x_o è un punto di minimo stretto; se x_o è

un punto di massimo locale allora $\langle H_f(x_o)\cdot v, v\rangle \leqslant 0$ per ogni vettore v; se $\langle H_f(x_o)\cdot v, v\rangle < 0$ per ogni vettore v non nullo allora x_o è un punto di massimo stretto $(*)$. Matrici definite positive, definite negative, semidefinite positive, semidefinite negative, indefinite.
Criteri per capire il segno degli autovalori di una matrice e il comportamento di una funzione (di classe C^2) in un intorno di un punto critico.

4.11.2015 Data una matrice A simmetrica vale $\lambda_{\min}|x|^2 \leqslant (A\cdot x, x) \leqslant \lambda_{\max}|x|^2$ dove $\lambda_{\min}$ è il minimo autovalore, $\lambda_{\max}$ il massimo $(*)$.
Criterio per capire se una matrice è definita positiva oppure definita negativa guardando i determinanti dei minori principali. Esempi.
Esercizi sulla natura di punti critici.

5.11.2015 Ancora qualche esercizio sulla natura di punti critici.
Teorema della permanenza del segno. Teorema del valor medio $(*)$. Funzioni implicite: teorema del Dini per funzioni scalari di due variabili $(*)$.
Esempi ed esercizi.

6.11.2015 Esercizi sulle funzioni implicite per funzioni scalari di due variabili.
Funzioni di più variabili vettoriali: continuità, differenziabilità, matrice jacobiana, formula di Taylor al primo ordine. Derivazione per funzioni composte: matrice jacobiana della composizione di due funzioni $(*)$.
Teorema delle funzioni implicite: caso generale per funzioni $F : \mathbf{R}^{m+n} \to \mathbf{R}^n$.

11.11.2015 Teorema delle funzioni implicite: caso in cui il luogo degli zeri ($F = 0$ con $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$) è una superficie cartesiana in $\mathbf{R}^3$. Esempi ed esercizi.
Teorema delle funzioni implicite: caso in cui il luogo degli zeri è una curva in $\mathbf{R}^3$ (sistemi di due equazioni, $F_1 = 0$ e $F_2 = 0$ con $F_1, F_2 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$).
Esempi ed esercizi.

12.11.2015 Moltiplicatori di Lagrange: esempio del caso di una curva in $\mathbf{R}^2$, di una superficie in $\mathbf{R}^3$, di una curva in $\mathbf{R}^3$. Spiegazione e dimostrazione del metodo in casi semplici. Enunciato nel caso generale.
Esempi ed esercizi.

13.11.2015 Ancora esercizi con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Integrale per funzioni di più variabili - In dimensione 2: definizione di integrale per una funzione costante su un rettangolo, di integrale superiore e inferiore per una funzione limitata su un rettangolo, di funzione integrabile secondo Riemann su di un rettangolo.

Le funzioni continue su un rettangolo sono integrabili secondo Riemann. Formule di riduzione per funzioni continue su di un rettangolo. Insiemi normali in $\mathbf{R}^2$. Formule di riduzione per funzioni continue su un insieme normale del piano. Proprietà dell'integrale (linearità, positività, f integrabile allora $\int_{E_1 \cup E_2} f(x)dx = \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx$ se $\mathring{E}_1$ e $\mathring{E}_2$ sono disgiunti, $|\int_E f(x)dx| \leqslant \int_E |f(x)|dx$ se E misurabile e $f, |f|$ integrabili).

18.11.2015 Definizione di funzione integrabile su un dominio D limitato di $\mathbf{R}^2$ e di insieme misurabile secondo Peano-Jordan in $\mathbf{R}^2$. Esempio di un insieme non misurabile secondo Peano-Jordan (e di una funzione non integrabile) e la cui frontiera non ha misura nulla: l'insieme $\mathbf{Q}^2 \cap [0,1]^2$, dove $\mathbf{Q}^2$ è l'insieme delle coppie di razionali, non è misurabile secondo Peano-Jordan; ciononostante, per ogni δ positivo esiste un insieme che contiene $\mathbf{Q}^2$ che ha misura minore di δ.
Integrale per funzioni di 3 variabili: insiemi normali in $\mathbf{R}^3$. Formule di riduzione: integrazione "per fili", integrazione "per strati".
Integrali generalizzati su insiemi illimitati.

19.11.2015 Area di un parallelogramma in $\mathbf{R}^2$ $(*)$: data un'applicazione lineare $L : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ si è calcolata l'area dell'immagine tramite L del quadrato $[0,1]^2$.
Formula generale della misura di $L(K)$ con K compatto di $\mathbf{R}^n$ e $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ applicazione lineare o affine: se $L(x) = A \cdot x + x_o$ ($x, x_o \in \mathbf{R}^n$, A matrice $n \times n$) vale

$$\mathrm{mis}_n(L(K)) = |\det A| \ \mathrm{mis}_n(K). \tag{1}$$

Definizione di diffeomorfismo e teorema di invertibilità locale.
Formula di integrazione sotto un cambio di variabile che sia un diffeomorfismo.
Cambi standard: coordinate polari, coordinate cilindriche, coordinate sferiche. Esempi (area del cerchio, volume della sfera).

20.11.2015 Esercizi su integrali in due e tre variabili.

25.11.2015 Esercizi su integrali in due e tre variabili.

26.11.2015 Superfici: definizione di superficie (regolare), di superficie compatta, di superficie con bordo e relativi esempi. Prodotto vettoriale tra φ_u e φ_v. Piano tangente ad una superficie e vettore normale ad una superficie. Problema dell'orientabilità: superfici orientabili. Esempio di una superficie non orientabile: nastro di Möbius. Superfici cartesiane e superfici come luogo di zeri.

27.11.2015 Superfici equivalenti, con la stessa orientazione e con orientazione opposta. Calcolo dell'area di un parallelogramma immagine di un quadrato tramite un'applicazione lineare da $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^3$. Definizione di area di una superficie. L'area di due superfici equivalenti è la stessa $(*)$, cioè date $\varphi : A \to \mathbf{R}^3$ e $\psi : B \to \mathbf{R}^3$ equivalenti, $\Sigma = \varphi(A) = \psi(B)$, l'area di Σ è ben definita e le due quantità $\iint_A |\varphi_u \wedge \varphi_v| dudv = \iint_B |\psi_r \wedge \psi_s| drds$ coincidono $(*)$.
In maniera analoga è ben posta la definizione di integrale di superficie per una funzione $f : \Omega \to \mathbf{R}$, Ω aperto di $\mathbf{R}^3$ contenente Σ.

Esercizi ed esempi di integrali di superficie.

9.12.2015 Campi di vettori: definizione di integrale curvilineo di seconda specie (lavoro di una campo lungo un cammino). Tale integrale dipende dall'orientazione del cammino. L'integrale lungo cammini equivalenti è lo stesso, a meno del segno dell'orientazione del cammino $(*)$. Esempi. Campi che sono gradienti. Insiemi connessi per archi. Campi conservativi e primitive di un campo (potenziali). Caratterizzazione dei campi conservativi $(*)$. Esempio del calcolo di un potenziale attraverso il calcolo del lavoro compiuto lungo un cammino.

10.12.2015 Campi irrotazionali. Aperti semplicemente connessi. Sugli aperti semplicemente connessi i campi irrotazionali e C^1 sono conservativi. Esempi e controesempi di campi che ammettono potenziale. Esempi ed esercizi su integrali di seconda specie e calcolo di potenziali.

11.12.2015 Orientazioni positiva e negativa per ∂A, con A aperto connesso di $\mathbf{R}^2$. Formule di Gauss-Green su insiemi normali di $\mathbf{R}^2$ $(*)$. Teorema della divergenza in $n = 2$ e $n = 3$ $(*)$ (con dimostrazione solo nel caso $n = 2$). Qualche esempio.

16.12.2015 Applicazioni delle formule di Gauss-Green al calcolo di integrali in due variabili: in particolare aree di figure piane. Esempi di calcolo di flussi attraverso curve e superfici chiuse e non usando il teorema della divergenza.
Definizione di rotore in $\mathbf{R}^3$. Definizione di bordo orientato positivamente per una superficie con bordo. Teorema di Stokes. Esempi.

17.12.2015 Equazioni differenziali ordinarie: introduzione, forma generale per un'equazione di grado n, forma normale per un'equazione di grado n, esempi semplici. Forma generale per la soluzione di un'equazione lineare del primo ordine in forma normale $(*)$. Definizione di problema di Cauchy. Un esempio di problema di Cauchy che ha infinite soluzioni. Definizione di funzione lipschitziana. Teorema di esistenza e unicità (locali) per il problema di Cauchy (senza dimostrazione). Esempi sul problema di Cauchy per un'equazione lineare del primo ordine. Come scrivere la soluzione. Linee o curve integrali.

18.12.2015 Alcuni altri esempi di equazioni integrabili: equazioni a variabili separabili, equazioni di tipo omogeneo, equazioni di Bernoulli con esempi.

13.1.2016 Equazioni differenziali esatte con esempi: come trovare un fattore integrante. Esempi ed esercizi.

14.1.2016 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di grado superiore al primo. Come trasformare un problema di Cauchy dell'n-esimo ordine ad un problema di Cauchy del primo ordine vettoriale. Esistenza e unicità per il problema di Cauchy per un'equazione di grado n.
Le equazioni omogenee di grado n hanno n (e non più di n) soluzioni distinte linearmente indipendenti e le soluzioni di un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti e omogenea formano uno spazio vettoriale di dimensione n $(*)$.
Associazione di un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti con un operatore differenziale in forma polinomiale.
Soluzioni delle equazioni lineari di grado 2.

15.1.2016 Esercizi ed esempi di soluzioni di equazioni a coefficienti costanti, di grado 2 e anche di grado superiore a 2.
Come trovare le soluzioni di equazioni lineari a coefficienti costanti non omogenee: il metodo degli annichilatori per alcuni dati particolari. Esercizi ed esempi.