Università
degli Studi di
Lecce

Eserciziario di Matematica II
Facoltà di Ingegneria

Dipartimento di Matematica
"Ennio De Giorgi"

M. Miranda & F. Paronetto

24 giugno 2005

Queste dispense sono una raccolta di esercizi, alcuni dei quali proposti a lezione. Troverete anche altri esercizi, la maggior parte dei quali svolti e alcuni che integrano quanto visto in classe e che esulano dal programma effettivamente svolto: questo non significa che saranno programma d'esame, ma chi fosse curioso di approfondire alcune cose ha in questo modo la possibilità di farlo.

Suggeriamo di fare, o anche di provare a fare, gli esercizi senza scoraggiarsi subito e senza farsi tentare dal guardare immediatamente le soluzioni.

Qualche esercizio è marcato con il simbolo $*$: questo denota che l'esercizio è leggermente più complicato o esula dalle conoscenze di base. Ovviamente consigliamo di perdere un po' di tempo da soli anche con questi esercizi, senza controllare immediatamente le soluzioni, potrebbe essere istruttivo.

Sottolineiamo che con il presente eserciziario non si intende assolutamente sostituire un buon testo di esercizi, ma fornire semplicemente un aiuto, speriamo valido, a completamento delle lezioni in aula.
Consigliamo inoltre di avere ben chiari i concetti di teoria *prima* di apprestarsi ad affrontare gli esercizi.

Un'ultima cosa: potrebbero esserci degli errori (anzi, ci saranno sicuramente) per cui ci scusiamo fin d'ora e ringraziamo chi volesse farceli notare.

Lecce, 11 maggio 2003.

Michele Miranda
michele.miranda@unile.it

Fabio Paronetto
fabio.paronetto@unile.it

Indice

Capitolo 1

Successioni e serie di funzioni

Convergenza puntuale ed uniforme

Differenza tra convergenza puntuale ed uniforme: Si supponga di avere una successione di funzioni $f_n : D \to \mathbf{R}$ tali che $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Ci chiediamo se il limite è anche uniforme: dovrei avere che

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

il che è equivalente a dire che (per definizione di limite) per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N = N(\epsilon)$ tale che per ogni $n \geqslant N$ si ha

$$\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon\,.$$

Si veda la Figura 1.1 per avere un'idea dal punto di vista grafico: la curva in neretto rappresenta il grafico della funzione limite f, i puntini i grafici di $f + \epsilon$ e $f - \epsilon$, la curva tratteggiata il grafico di una possibile f_n con $n \geqslant N(\epsilon)$.
Considerazioni generali: non esiste un metodo generale (cioè un modo meccanico che valga in ogni situazione) per studiare la convergenza uniforme. La prima osservazione che va fatta è che, se $f_n : D \to \mathbf{R}$ convergono puntualmente ad f in D, il candidato ad essere il limite uniforme è f. La seconda è che lo studio ha come incognita l'insieme (o gli insiemi) sul quale (o sui quali) f_n converge uniformemente. La domanda da porsi è quindi:

$$\text{su quali insiemi } A \subset D \text{ vale} \qquad \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0 \text{ ?}$$

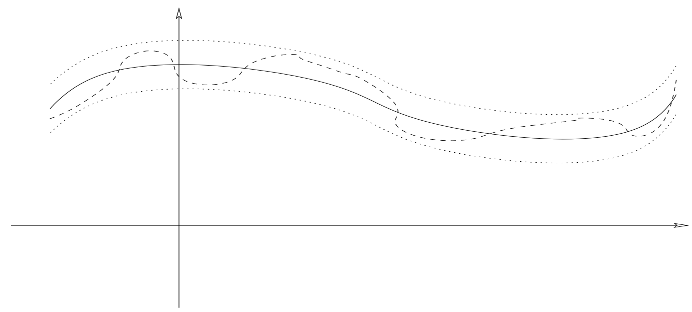

Figura 1.1:

Chiaramente se $f_n \to f$ uniformemente su tutto D convergerà uniformemente anche su tutti i sottoinsiemi A di D.
Un modo per cercare l'estremo superiore di $|f_n - f|$ (dove f è il limite puntuale di f_n) se f e f_n sono di classe C^1 è di cominciare risolvendo l'equazione

$$\frac{d}{dx}(f_n(x) - f(x)) = 0$$

e considerando i punti critici di $f_n - f$: si faccia attenzione che il minimo, se c'è, di $f_n - f$ potrebbe essere il massimo di $|f_n - f|$. Questo però è *un* modo e comunque non sempre fornisce l'estremo superiore (ad esempio il sup potrebbe non essere un massimo, il massimo potrebbe essere assunto agli estremi ecc.).
In generale è spesso utile intuire il comportamento della successione di cui bisogna studiare la convergenza. Un consiglio è quindi quello di studiare qualitativamente, se possibile, il grafico delle funzioni f_n.

Esercizio 1.1 - Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n : [-1,1] \to \mathbf{R}, \qquad f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$$

Esercizio 1.2 - Studiare convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni $f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx)$, $n \in \mathbf{N}$, definite in $D = \mathbf{R}$.

Esercizio 1.3 - Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad f_n(x) = \frac{x+n}{x^2+n}$$

Esercizio 1.4 - Studiare convergenza puntuale ed uniforme di $f_n(x) = x(1-x)^n \log n$ in $[0,1]$.

Esercizio 1.5 - Studiare convergenza puntuale ed uniforme di $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$.

Esercizio 1.6 - Si studino la convergenza puntuale ed uniforme delle funzioni

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x+n} \qquad \text{per } x \in [0, +\infty)$$

e si dimostri che

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) \operatorname{sen}(nx) dx = 0 \,.$$

Esercizio 1.7 - Si studino la convergenza puntuale ed uniforme delle funzioni

$$f_n(x) = n^\alpha x (1-x^2)^n \qquad \text{per } x \in [0,1] \qquad (\alpha > 0)$$

e si calcoli

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) dx \,.$$

Esercizio 1.8 - Si studino la convergenza puntuale ed uniforme delle funzioni

$$f_n(x) = \left(\frac{1}{n} + \operatorname{sen}^2 x\right)^n \qquad \text{per } x \in [0, \pi]$$

e si calcoli

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi f_n(x) dx \,.$$

Esercizio 1.9 - Si studi la convergenza puntuale ed uniforme in $[-1,1]$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = n \log(1 + x/n) \,.$$

Esercizio 1.10 - Si studi la convergenza puntuale ed uniforme in $\mathbf{R}$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+n}} dt \,.$$

Serie di Funzioni

Una serie di funzioni $\sum_n f_n$ è una speciale successione di funzioni $\{g_N\}_N$ dove $g_N(x) = \sum_{n=0}^N f_n(x)$.
Ricordo: per le serie di funzioni si ha che

$$\text{conv. totale su } A \Longrightarrow \text{ conv. uniforme su } A \Longrightarrow \text{ conv. puntuale su } A \,.$$

Non ci sono molti criteri in generale per studiare la convergenza uniforme: in generale, e quindi in particolare se si ha una serie a termini tutti positivi (o tutti negativi), una strategia possibile è studiare prima la convergenza totale della serie, ma questo non garantisce di trovare tutti gli insiemi in cui vi è convergenza uniforme! (si vedano, ad esempio, gli esercizi 1.15 e 1.17), quando si ha una serie

a segni alterni si può sfruttare il criterio di Leibniz.
Per quanto riguarda lo studio della convergenza totale: chiaramente la miglior costante che controlla su un insieme A il valore assoluto di $f_n(x)$ è $\sup_A |f_n(x)|$. Quindi per studiare la convergenza totale su A di $\sum_n f_n$ conviene, se si riesce a calcolare l'estremo superiore di $|f_n|$, studiare la serie

$$\sum_n \sup_{x \in A} |f_n(x)| \,.$$

Non sempre però conviene calcolare l'estremo superiore e ci si può accontentare di una stima (si veda, ad esempio, la soluzione dell'Esercizio 1.16) o non sempre si riesce a calcolare tale estremo superiore (si veda, ad esempio, la soluzione dell'Esercizio 1.14)

Esercizio 1.11 - Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n} \,.$$

Esercizio 1.12 - Studiare la serie di $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f(x)x^n$ con f continua.

Esercizio 1.13 - Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+n^2}{x^2+n^4} \,.$$

Esercizio 1.14 - Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+n}{x^2+n^4+\log n} \,.$$

Esercizio 1.15 - Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n+x^2)} \,.$$

Esercizio 1.16 - Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1+|x|^n n^2} \,.$$

Esercizio 1.17 - Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}\,|\operatorname{sen} x| & x \in [(n-1)\pi, n\pi] \\ 0 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Esercizio 1.18 - Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} e^{-nx}$.

Esercizio 1.19 - Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, $x \in \mathbf{R}$.

Esercizio 1.20 - Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{sen} x + n}{n^2}$, $x \in \mathbf{R}$.

Esercizio 1.21 - Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^x}{n}$, $x \in \mathbf{R}$.

Esercizio 1.22 - Studiare la convergenza della seguente serie e calcolarne la somma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n-3) \left(\frac{x+1}{x} \right)^n .$$

Esercizio 1.23 - Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1} - x^n}{n}$$

e calcolarne la somma.

Esercizio 1.24 - Si determinino gli insiemi di $\mathbf{R}^2$ nei quali vi è convergenze semplice, uniforme e totale della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x^2 + n^2)}{1 + n^2 y} .$$

Serie di potenze

Ricordo: le serie di potenze sono particolari serie di funzioni della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n .$$

Il raggio di convergenza di $\sum_n a_n x^n$ è dato da $\rho = \dfrac{1}{\lim_n |a_n|^{1/n}}$ se tale limite esiste (si vedano le dispense di teoria per la definizione di raggio di convergenza e l'Esercizio 1.45 per un esempio in cui il limite non esiste).

Esercizio 1.25 - Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} x^n$$

e calcolarne la somma. Studiare poi le serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n3^n} x^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n} x^n$ e confrontarle con la precedente.

Esercizio 1.26 - Studiare la convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha + e^{\alpha n}}{n} x^n$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$.

Esercizio 1.27 - Sviluppare in serie di Taylor in $x = 0$ la funzione $f(x) = e^x$ e studiarne la convergenza.

Esercizio 1.28 - Calcolare lo sviluppo di Taylor nel punto $x = 1$ della funzione $\log x$ e calcolare il valore della serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$.

Esercizio 1.29 - Studiare la convergenza e calcolare la somma (ove converge) della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2} \frac{x^n}{(1+x^2)^n} \,.$$

Esercizio 1.30 - Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n \,.$$

Esercizio 1.31 - Sviluppare in serie di Taylor in $x = 0$ la funzione $f(x) = \operatorname{arctg}\, x$ e studiarne la convergenza.

Esercizio 1.32 - Calcolare gli sviluppi di seno e coseno in $x = 0$.

Esercizio 1.33 - Studiare la convergenza e calcolare la somma di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right] x^n \,.$$

Esercizio 1.34 - Calcolare lo sviluppo in serie di Taylor intorno al punto $x = 0$ della funzione

$$f(x) = \frac{4-x}{x^2 - 5x + 6} \,.$$

Esercizio 1.35 - Calcolare lo sviluppo in serie di Taylor intorno al punto $x = 0$ della funzione
$$f(x) = \frac{1 + 3x^2}{(1-x)^3}\,.$$

Esercizio 1.36 - Calcolare lo sviluppo in serie di Taylor intorno al punto $x = 0$ della funzione
$$f(x) = \log\left(\frac{x-2}{3x-2}\right)$$
precisandone l'insieme di convergenza.

Esercizio 1.37 - Calcolare l'insieme di convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+n^\alpha)}{\sqrt{n}}\, x^n$$
al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$.

Esercizio 1.38 - Calcolare lo sviluppo in serie di Taylor intorno al punto $x = 0$ della funzione
$$f(x) = \log\left(\frac{2+x}{1+x^2}\right)$$
precisandone l'insieme di convergenza.

Esercizio 1.39 - Mostrare che $\log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = 2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Esercizio 1.40 - Trovare una serie di potenze la cui somma, in un opportuno intervallo, sia $\log(1 + x - 2x^2)$.

Esercizio 1.41 - Studiare la serie di potenze $\displaystyle\sum_n \left(\frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n}\right) x^n$.

Esercizio 1.42 - Che differenza c'è fra la due serie di potenze
$$\sum_n \frac{1}{n^2}\, x^n \qquad \text{e} \qquad \sum_n \frac{1}{n^2}\, x^{n^2} \ ?$$

Esercizio 1.43 - Studiare le serie di potenze
$$\sum_n \frac{(n!)^3}{(3n)!}\, x^n \qquad \text{e} \qquad \sum_n \frac{(n!)^3}{(3n)!}\, x^{n^2}\,.$$

Esercizio 1.44 - Studiare la serie di potenze $\displaystyle\sum_n \frac{x^{n^n}}{n^n}$.

* Esercizio 1.45 Studiare la serie di potenze $\displaystyle\sum_n (2 + \operatorname{sen} n\pi/2)^n x^n$.

Serie di Fourier

Ricordo: se T è il semiperiodo la serie è data da

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi}{T} x + a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{T} x\right]$$

dove i coefficienti sono dati da ($n \in \mathbf{N}$)

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x) \cos \frac{n\pi}{T} x dx \qquad b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{T} x dx \,.$$

Uguaglianza di Parseval:

$$\int_{-T}^{T} |f(x)|^2 dx = T\Big(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2\Big)\,. \tag{1.1}$$

Integrazione della serie di Fourier - Si supponga di avere f continua a tratti e $F(x) = \int_{-T}^{x} \big(f(t) - a_0/2\big)dt$. Se denotiamo con a_n e b_n i coefficienti di f, con A_n e B_n quelli di F valgono le relazioni

$$A_n = -\frac{b_n}{n}\,, \qquad B_n = \frac{a_n}{n}\,. \tag{1.2}$$

Per quanto riguarda la convergenza della serie (vedi dispense di teoria): per ogni funzione limitata, continua a tratti e derivabile a tratti la serie converge puntualmente ovunque (alla media $\tilde{f}$ definita nelle dispense di teoria), uniformemente in ogni intervallo chiuso in cui f è continua e totalmente se converge la serie dei coefficienti

$$\sum_n (|a_n| + |b_n|)$$

visto che $\sup |a_n \cos nx| = |a_n|$ e $\sup |b_n \operatorname{sen} nx| = |b_n|$.

Esercizio 1.46 - Calcolare lo sviluppo di Fourier della funzione $f : [-\pi, \pi] \to \mathbf{R}$, $f(x) = -1$ in $[-\pi, 0]$, $f(x) = 1$ in $(0, \pi]$. Studiarne le convergenze puntuale ed uniforme.
Calcolare poi lo sviluppo di Fourier della funzione $g : [-\pi, \pi] \to \mathbf{R}$, $g(x) = |x|$.

Esercizio 1.47 - Calcolare lo sviluppo di Fourier della funzione $f(x) = x^2$ con $x \in [-\pi, \pi]$. Studiarne le convergenze puntuale ed uniforme.
Calcolare poi il valore della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Esercizio 1.48 - Calcolare lo sviluppo di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-1, 0] \\ x & \text{se } x \in [0, 1] \end{cases}$$

e studiarne la convergenza. Calcolare poi la somma delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}\,.$$

Esercizio 1.49 - Calcolare lo sviluppo di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,\pi] \\ -x+2\pi & \text{se } x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

studiarne la convergenza, scrivere uno sviluppo della stessa funzione in soli seni, infine calcolare il valore delle serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ e $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$. Sfruttando lo sviluppo della funzione f scrivere inoltre lo sviluppo in serie di Fourier della funzione

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [-\pi, 0] \\ 1 & \text{se } x \in (0,\pi] \end{cases}$$

Esercizio 1.50 - Determinare lo sviluppo in serie di Fourier della funzione

$$f(x) = 1 - \frac{2|x|}{\pi}\,, \qquad x \in [-\pi, \pi]\,.$$

Studiarne poi la convergenza in $[-\pi, \pi]$. Infine calcolare la somma delle serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\,, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}\,,$$

Soluzioni

Soluzione 1.1 - Limite puntuale:

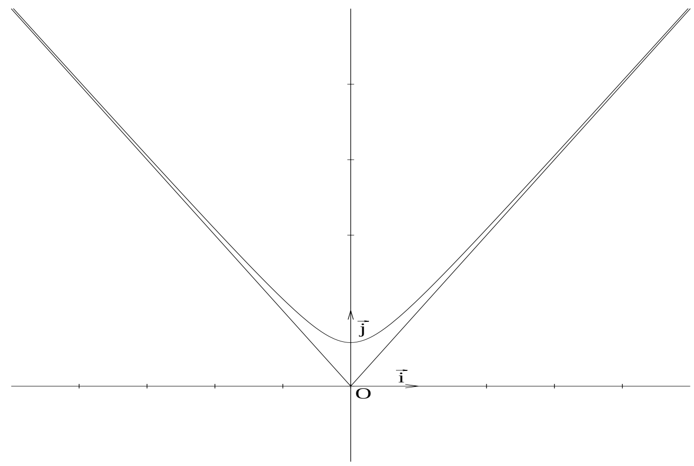

Figura 1.2:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = |x| \qquad \text{per ogni } x \in [-1,1]\,.$$

Limite uniforme:

$$\sup_{x\in[-1,1]} \left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} - |x|\right| = \sup_{x\in[-1,1]} \left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} - |x|\right) \leqslant \sup_{x\in[-1,1]} \sqrt{\frac{1}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}}$$

Osservazione - Nell'ultimo passaggio si è usata la diseguaglianza $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}$ (lasciata per esercizio).

Osservazione - Le funzioni f_n sono tutte funzioni C^1, ma il limite è solo continuo: la convergenza uniforme si trascina al limite la continuità, ma non la derivabilità.

Soluzione 1.2 - Il limite puntuale è dato da (si veda la Figura 1.3)

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} \pi/2 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -\pi/2 & x<0 \end{cases}$$

Usiamo il Teorema 1.5 (continuità della funzione limite) delle dispense che qui ricordiamo brevemente.

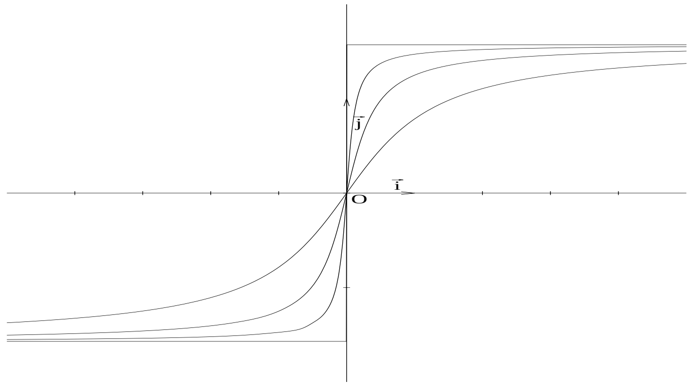

Figura 1.3:

Teorema 1.1 *Se una successione di funzioni continue in D converge uniformemente ad f in D allora f è continua in D.*

Questo può essere usato anche in negativo: cioè se $\{f_n\}_n$ è una successione di funzioni continue che converge puntualmente ad una funzione f non continua, la convergenza non può essere uniforme.
Concludiamo che se $D = \mathbf{R}$ f_n non converge uniformemente ad f. Ci si può chiedere se ci sono insiemi strettamente contenuti in $\mathbf{R}$ sui quali la convergenza è uniforme. Si consideri $A = [a, +\infty)$ con $a > 0$. La derivata di $|f_n - f| = f - f_n$ è sempre negativa (per cui non ci sono punti stazionari). Questo però ci dice che il massimo è assunto per $x_n = a$. Per cui

$$\sup_{x \in [a,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \pi/2 - f_n(a) = \pi/2 - \operatorname{arctg}(nx)\,.$$

Dalla convergenza puntuale concludiamo che questa quantità converge a zero. Poiché analogamente si può trattare il caso in cui $A = (-\infty, b]$ con $b < 0$ concludiamo che f_n converge uniformemente ad f su tutti gli insiemi del tipo $(-\infty, b] \cup [a, +\infty)$ con $b < 0$ e $a > 0$ e solo in quelli.

Soluzione 1.3 - Il limite puntuale è $f \equiv 1$ su tutto $\mathbf{R}$. Prima di tutto si osservi che (si vedano alcuni grafici in Figura 1.4)

$$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 0\,, \qquad \lim_{x \to -\infty} f_n(x) = 0$$

e anche che

$$f_n(x) = 0 \quad \text{per } x_n = -n\,.$$

Per ognuna di queste ragioni

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |f_n(x) - f(x)| \geqslant 1$$

e quindi non vi può essere convergenza uniforme su tutto **R** e nemmeno su semirette. Vediamo che succede se consideriamo un compatto $[a,b]$. Calcoliamo la derivata e poniamola uguale a zero. Si ha

$$f_n'(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 + 2n - n = 0$$

che ha come soluzioni $x_n = -n + \sqrt{n^2+n}$ e $y_n = -n - \sqrt{n^2+n}$. Si osservi che $x_n \to 1/2$ mentre $y_n \to -\infty$, quindi, qualunque sia $[a,b]$, y_n definitivamente non appartiene ad $[a,b]$. Se $1/2 \in (a,b)$ allora x_n definitivamente appartiene ad $[a,b]$. In $[a,b]$ quindi o non ci sono punti stazionari o c'è solamente x_n, nel quale f_n assume il suo valore massimo che vale

$$f_n(x_n) = \frac{\sqrt{n^2+n}}{2n(n+1-\sqrt{n^2+n})} = \frac{n+\sqrt{n^2+n}}{2n} \to 1\,.$$

Attenzione: il massimo di $|f_n - f|$ non è detto sia assunto in x_n. Infatti si ha

$$f_n(x) - f(x) = \frac{x(1-x)}{x^2+n}$$

che è positiva per $x \in (0,1)$ (e negativa altrimenti). Quindi

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} \dfrac{-x(1-x)}{x^2+n} & x \in [a,0] \\ \dfrac{x(1-x)}{x^2+n} & x \in [0,1] \\ \dfrac{-x(1-x)}{x^2+n} & x \in [1,b] \end{cases}$$

Per cui l'estremo superiore (che in realtà è un massimo) è sicuramente assunto in $x = a$ o $x = b$ oppure $x = x_n$. Per cui

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \max\{f_n(a) - 1, f_n(b) - 1, f_n(x_n) - 1\}\,.$$

Poiché tutti e tre i valori dell'insieme a destra convergono a zero si conclude che $\{f_n\}_n$ converge uniformemente sui compatti.

Soluzione 1.4 - Convergenza puntuale: $f_n(x) \to 0$ per ogni $x \in [0,1]$. Per l'uniforme calcoliamo la derivata di f_n:

$$f_n'(x) = (1-x)^{n-1} \log n[(1-x) - nx]$$

e questa si annulla per $x_n = 1/(n+1)$ (la funzione è non negativa e nulla agli estremi, x_n è quindi di massimo). Il valore

$$f_n(x_n) = \frac{\log n}{n+1}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n \to 0\,.$$

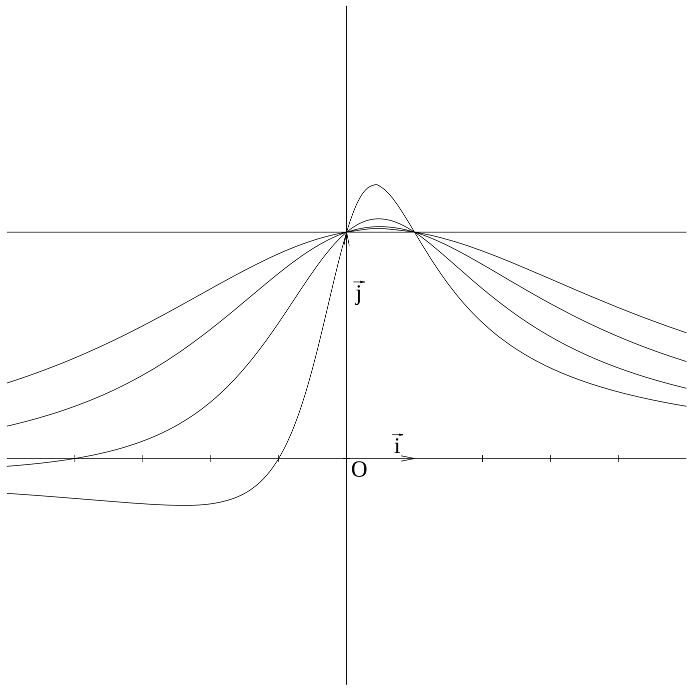

Figura 1.4:

Soluzione 1.5 - Il limite puntuale è (in Figura 1.5 sono riportati i grafici di alcune f_n)

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \qquad\qquad \text{per ogni } x \in [0,1]\,.$$

Vediamo se il limite è anche uniforme:

$$f_n'(x) = \frac{n(1+n^2x^2) - 2n^3x^2}{(1+(nx)^2)^2} = \frac{n - n^3x^2}{(1+(nx)^2)^2}$$

che si annulla per $x_n = 1/n$. Ora $f_n(x_n) = 1/2$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ per cui

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = \lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

Osservazione - Si osservi che il limite puntuale di funzioni continue può essere continuo anche se il limite non è uniforme.

Soluzione 1.6 - Facilmente si ha che

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \qquad \text{per ogni } x \in [0,+\infty)$$

La convergenza non è però uniforme. Infatti

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} |f_n(x)| = +\infty\,.$$

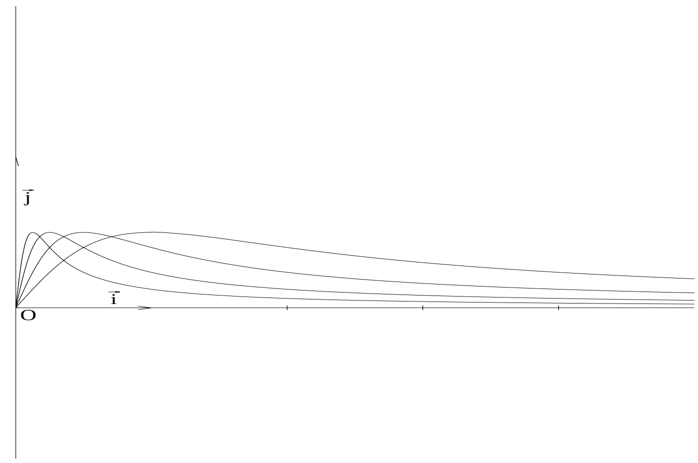

Figura 1.5:

È uniforme però sui limitati. Si consideri, ad esempio, un intervallo $[0,a]$ con $a>0$:

$$f_n'(x) = \frac{x^2+2nx}{(x+n)^2} \geqslant 0$$

per cui le funzioni sono crescenti e quindi assumono il massimo in $x=a$:

$$\sup_{x\in[0,a]} |f_n(x)| = \frac{a^2}{a+n} \to 0 \qquad \text{per ogni } a \in (0,+\infty)\,.$$

Calcoliamo l'integrale:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} |\textstyle\int_0^1 f_n(x) \operatorname{sen} nx dx| &\leqslant \lim_{n\to\infty} \textstyle\int_0^1 |f_n(x)||\operatorname{sen}(nx)|dx \\ &\leqslant \lim_{n\to\infty} \textstyle\int_0^1 |f_n(x)|dx = 0 \end{aligned}$$

grazie al fatto che $f_n \to 0$ uniformemente in $[0,1]$. Si noti che anche le funzioni $x \mapsto f_n(x)\operatorname{sen}(nx)$ convergono uniformemente a 0 in $[0,1]$ poiché $g_n(x) = \operatorname{sen}(nx)$ sono equilimitate (questo è vero solo perché le f_n convergono a **zero**! In generale se $f_n \to f$ uniformemente e g_n sono equilimitate non possiamo affermare che $f_n g_n$ convergono uniformemente).

Soluzione 1.7 - Il limite puntuale è $f \equiv 0$. Per studiare la convergenza uniforme calcoliamo il massimo delle f_n.

$$f_n'(x) = n^\alpha(1-x^2)^{n-1}[1-x^2(1+2n)] = 0 \iff x = \frac{1}{\sqrt{1+2n}}$$

Valutiamo il massimo di $|f_n - f|$:

$$M_n(\alpha) = \max_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = n^\alpha \frac{1}{\sqrt{1+2n}}\Big(1-\frac{1}{1+2n}\Big)\,.$$

Si ha che

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} M_n(\alpha) = 0 && \text{per } 0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2} \\ &\lim_{n\to\infty} M_n(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2e}} && \text{per } \alpha = \frac{1}{2} \\ &\lim_{n\to\infty} M_n(\alpha) = +\infty && \text{per } \alpha > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

e quindi vi è convergenza uniforme solo per $0 \leqslant \alpha < 1/2$. Calcoliamo l'integrale. Per $0 \leqslant \alpha < 1/2$

$$\lim_n \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_n f_n(x)dx = 0$$

grazie alla convergenza uniforme. Negli altri casi calcolo la primitiva che è data da

$$\int_0^1 f_n = -n^\alpha \frac{1}{2(n+1)}(1-x^2)^{n+1}\Big|_0^1 = \frac{n^\alpha}{2(n+1)}\,.$$

Si ha allora che

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = 0 && \text{per } 0 \leqslant \alpha < 1 \\ &\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = \frac{1}{2} && \text{per } \alpha = 1 \\ &\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = +\infty && \text{per } \alpha > 1\,. \end{aligned}$$

Soluzione 1.8 - Facilmente si vede che $f_n(0) = f_n(\pi) \to 0$.
Se $x \in (0,\pi)$, $x \neq \pi/2$ si ha che $\operatorname{sen}^2 x < 1$ e quindi si ha che esiste $a < 1$ per il quale definitivamente vale

$$\frac{1}{n} + \operatorname{sen}^2 x \leqslant a < 1$$

per cui $f_n(x) \to 0$ se $x \neq \pi/2$. Se $x = \pi/2$ si ha che

$$f_n(\pi/2) = \left(\frac{1}{n} + 1\right)^n \to e$$

quindi il limite puntuale è (si veda la Figura 1.6)

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} e & x = \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & x \neq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Può convergere uniformemente? NO! Perché le f_n sono continue e f non lo è. Vediamo che succede se togliamo un intorno di $\pi/2$. Fisso $\delta > 0$ (e minore di $\pi/2$): in $[0, \pi/2 - \delta]$ f_n è crescente per ogni $n \in \mathbf{N}$ per cui il massimo è assunto

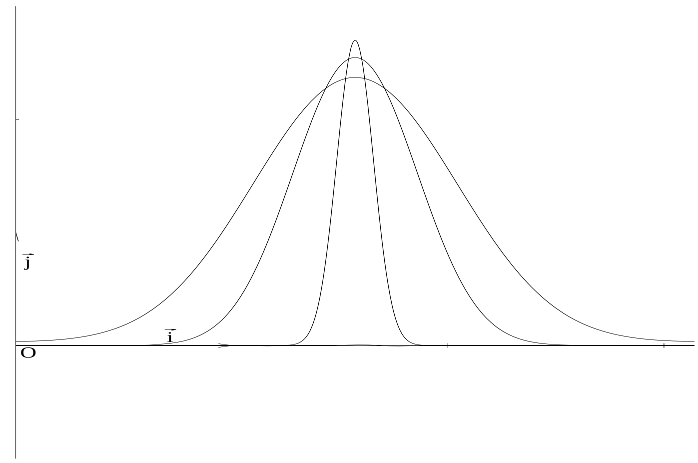

Figura 1.6:

per $x = \pi/2 - \delta$. Detto α il valore $\operatorname{sen}^2(\pi/2 - \delta) < 1$ si ha che esiste $\epsilon > 0$ tale che

$$\alpha + \epsilon < 1$$

e quindi

$$\max_{x\in[0,\pi/2-\delta]} |f_n(x)| \leqslant \left(\frac{1}{n} + \alpha\right)^n \leqslant (\alpha + \epsilon)^n \to 0\,.$$

Allo stesso modo si può procedere in $[\pi/2 + \delta, \pi]$. Conclusione: f_n convergono uniformemente a $f \equiv 0$ in tutti gli insiemi del tipo $A_\delta = [0, \pi/2-\delta] \cup [\pi/2+\delta, \pi]$. Calcoliamo l'integrale:

$$|\int_0^\pi f_n(x)dx| = |\int_{A_\delta} f_n(x)dx + \int_{\pi/2-\delta}^{\pi/2+\delta} f_n(x)dx| \leqslant \int_{A_\delta} |f_n|(x)dx + 2e\delta\,.$$

Passando al limite si ha che in A_δ, grazie alla convergenza uniforme, l'integrale tende a 0. Concludendo si ha che:

$$\forall\delta > 0 \quad \lim_{n\to\infty} |\int_0^\pi f_n(x)dx| < 2e\delta$$

il che significa che l'integrale tende a 0.

Soluzione 1.9 - Proponiamo due svolgimenti. Il primo: scrivendo $f_n(x)$ come $\log(1 + x/n)^n$ si ottiene che il limite puntuale è la funzione $f(x) = x$. Vediamo se è uniforme. Prendiamo in considerazione le funzioni $g_n(x) = (1 + x/n)^n$. Sappiamo dal primo corso di analisi che

$$\begin{array}{l} (1 + x/n)^n \text{ è crescente in } n \text{ per } x \text{ positivo} \\ (1 + x/n)^n \text{ è decrescente in } n \text{ per } x \text{ negativo} \end{array}$$

e converge alla funzione $g(x) = e^x$. Derivando si ottiene

$$g'(x) - g_n'(x) = e^x - \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^{n-1} \begin{cases} > 0 & \text{se } x > 0 \\ = 0 & \text{se } x = 0 \\ < 0 & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

Si osservi però che $g_n(0) = g(0) = 1$ per cui $|g(x) - g_n(x)| > 0$ tranne che per $x = 0$ che risulta essere un punto di minimo. È chiaro che il massimo è assunto quindi per $x = -1$ oppure per $x = 1$ e si ha

$$\sup_{x \in [-1,1]} |g_n(x) - g(x)| \leqslant \max\{|g_n(-1) - e^{-1}|, |g_n(1) - e|\} \to 0\,.$$

Per cui $\{g_n\}$ converge uniformemente a g in $[-1, 1]$. Poiché la funzione $x \mapsto \log x$ è continua nell'intervallo $[e^{-1}, e]$ (nel quale assumono valori le g_n) e $\log g_n(x) = f_n(x)$, $\log g(x) = f(x)$, concludiamo che anche $\{f_n\}$ converge uniformemente a f in $[-1, 1]$.
Che succede in $[-1, +\infty)$?

Il secondo svolgimento fa uso del seguente risultato (teorema **non visto** a lezione).

Teorema 1.2 *Sia $(f_n)_n$ una successione in $C^1([a, b])$ tale che*

1) f_n' converge uniformemente ad una funzione g in $[a, b]$;

2) esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $f_n(x_0)$ converge.

Allora la successione $(f_n)_n$ converge uniformemente ad una funzione f. Inoltre $f \in C^1([a, b])$ e $f' = g$.

Usiamo questo teorema per risolvere l'esercizio. Calcoliamo direttamente il limite uniforme di

$$f_n(x) = n \log(1 + x/n)$$

in $[-1, 1]$. Si ha che $f_n'(x) = \frac{n}{x+n}$ che converge uniformemente alla costante 1, inoltre $f_n(0)$ converge a 0. Per cui f_n converge uniformemente alla funzione f data da

$$f(x) = 0 + \int_0^x 1 dt = x$$

Soluzione 1.10 - La successione converge puntualmente alla funzione nulla su tutto $\mathbf{R}$, uniformemente solo sui compatti.

Soluzione 1.11 - Supponiamo per il momento di dover studiare semplicemente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + x)^n}\,.$$

In un caso del genere ci si può ridurre a studiare la serie geometrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} y^n$$

pensando poi a sostituire a y $1/(1+x)$. Sappiamo che la serie geometrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n - 1 \qquad \text{per } |q| < 1\,.$$

Di conseguenza la serie appena scritta converge alla funzione

$$\frac{y}{1-y}$$

puntualmente in $(-1,1)$ ed uniformemente e totalmente solo nei compatti $[a,b] \subset (-1,1)$. Infatti

$$\sup_{y\in[0,1)} \Big| \sum_{n=1}^{\infty} y^n - \sum_{n=N}^{\infty} y^n \Big| = \sup_{y\in[0,1)} \Big| \sum_{n=N+1}^{\infty} y^n \Big| = +\infty$$

e anche

$$\sup_{y\in(-1,0]} \Big| \sum_{n=1}^{\infty} y^n - \sum_{n=N}^{\infty} y^n \Big| = \sup_{y\in(-1,0]} \Big| \sum_{n=N+1}^{\infty} y^n \Big| = \sup_{y\in[0,1)} \Big| \frac{y^{N+1}}{1-y} \Big| = +\infty$$

per cui non può esservi convergenza uniforme, e nemmeno totale, in $(-1,0]$ e in $[0,1)$. Vediamo ora nei compatti $[a,b] \subset (-1,1)$. Infatti: si consideri per semplicità $[0,b]$ con $0 < b < 1$. Denotiamo con $g(y)$ il limite di g_N, cioè $g(y) = \sum_{n=1}^{\infty} y^n$. Si ha

$$\begin{aligned} \sup_{[0,b]} |g_N(y) - g(y)| &= \sup_{[0,b]} \Big| \sum_{n=1}^{N} y^n - \sum_{n=1}^{\infty} y^n \Big| = \sup_{[0,b]} \Big| \sum_{n=N+1}^{\infty} y^n \Big| \\ &\leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} b^n = \tfrac{b^{N+1}}{1-b} \end{aligned}$$

Considerando il limite per $N \to \infty$ si ottiene la convergenza uniforme. Analogamente si ottiene in $[a,0]$ con $-1 < a < 0$ e quindi in ogni $[a,b] \subset (-1,1)$. Questo si traduce, per la serie considerata, nella convergenza alla funzione

$$\frac{\frac{1}{1+x}}{1 - \frac{1}{1+x}} = \frac{1}{x}$$

puntualmente in $(-\infty,-2) \cup (0,+\infty)$ e uniformemente e totalmente negli insiemi $(-\infty,\alpha]$, $[\beta,+\infty)$ con $\alpha < -2$ e $\beta > 0$. Infatti la trasformazione $g(x) = 1/(1+x)$ manda l'intervallo $[a,0]$, con $-1 < a$, in $(-\infty, \frac{1-a}{a}]$, e l'intervallo $[0,b]$, con $b < 1$, in $[\frac{1-b}{b}, +\infty)$. Se, ad esempio, $a = -\frac{1}{1+\delta}$ con $\delta > 0$, cioè a compreso tra -1 e 0, si ottiene che $\frac{1-a}{a} = -2 - \delta$, cioè un numero strettamente minore di -2. Analogamente si vede che $\frac{1-b}{b}$ è strettamente positivo.

Veniamo ora all'esercizio proposto: poiché la serie data è il limite, per $N \to +\infty$, di $\sum_{n=1}^{N} \frac{x}{(1+x)^n}$ per le somme finite si ha

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{x}{(1+x)^n} = x \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(1+x)^n} .$$

Per cui l'insieme di convergenza puntuale contiene sicuramente l'insieme nel quale converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x)^n}$, cioè $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$. Si osservi però che la serie data converge anche per $x = 0$ (infatti ogni termine è identicamente nullo!). Perciò l'insieme di convergenza puntuale è $(-\infty, -2) \cup [0, +\infty)$ e la funzione limite è

$$h(x) = \begin{cases} 1 & x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty) , \\ 0 & x = 0 , \end{cases}$$

(poiché $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x)^n} = 1/x$).
Per quanto riguarda le convergenze uniforme e totale si può ragionare come prima per ottenere che vi è convergenza negli insiemi del tipo $(-\infty, \alpha]$, $[\beta, +\infty)$ con $\alpha < -2$ e $\beta > 0$. Non può esservi convergenza uniforme, e di conseguenza nemmeno totale, nell'insieme $[0, +\infty)$ dal momento che la funzione limite è discontinua in tale insieme mentre le somme parziali sono ovviamente continue.

Cosa succederebbe se invece considerassimo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x)^n}$?

A questo proposito si veda anche l'ESERCIZIO 1.12.

Soluzione 1.12 - Per quanto riguarda la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ si procede come nella soluzione dell'ESERCIZIO 1.11 per ottenere la convergenza puntuale in $(-1, 1)$ e uniforme e totale nei compatti contenuti in $(-1, 1)$ alla funzione

$$\frac{1}{1-x} .$$

Ciò che può modificare gli insiemi di convergenza è la presenza di $f(x)$. L'unica cosa che può alterare il comportamento della serie è il fatto che $f(1)$ e/o $f(-1)$ siano 0 (se $f(1) \neq 0$ e $f(-1) \neq 0$ la serie in 1 e -1 non converge), escludendo il caso in cui $f(x) = 0$ per ogni $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ che farebbe banalmente convergere la serie in tale insieme. Concentriamoci quindi sul comportamento di f in 1 e -1. Cominciamo considerando $f(x) = |x+1|^{\alpha} |x-1|^{\beta}$ con $\alpha, \beta \geqslant 0$. Chiaramente la serie converge in $(-1, 1)$ e non converge in $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Nel punto -1, nel quale la serie $\sum_n x^n$ non è determinata, si ha che per qualunque valore positivo di α $f(-1) = 0$ e questo fa sì che la serie in -1

converga. Nel punto 1 invece affinché la serie converga bisogna che $\beta \geqslant 1$ (per $\beta < 1$ la serie diverge a $+\infty$). Il limite puntuale è dato dalla funzione

$$\begin{cases} (x+1)^\alpha (1-x)^{\beta-1} & x \in [\,-1,1) \quad \text{se } 0 \leqslant \beta < 1 \\ (x+1)^\alpha (1-x)^{\beta-1} & x \in [\,-1,1] \quad \text{se } \beta > 1 \\ \begin{cases} (x+1)^\alpha & x \in [\,-1,1) \\ 0 & x = 1 \end{cases} & \quad\quad\quad\quad \text{se } \beta = 1 \end{cases}$$

Vediamo ora le convergenze uniforme e totale. Giacché in $[-1,0]$ vale la seguente stima

$$1 \leqslant |x-1|^\beta \leqslant 2^\beta$$

possiamo limitarci, per la convergenza totale in $[-1,0]$, a studiare la funzione $|x+1|^\alpha x^n$ dal momento che, dalla stima appena sopra, si ha

$$|x+1|^\alpha |x|^n \leqslant |x+1|^\alpha |x-1|^\beta x^n \leqslant 2^\beta |x+1|^\alpha |x|^n\,. \tag{$*$}$$

Derivando la funzione $|x+1|^\alpha |x|^n$ si ottiene il massimo in $-\frac{n}{n+\alpha}$ e valutando la funzione in tal punto si ottiene che il valore massimo (per $|x+1|^\alpha |x|^n$) è dato da

$$\frac{\alpha}{\alpha+n}\Big(\frac{n}{\alpha+n}\Big)^n.$$

Poiché $\left(\frac{n}{\alpha+n}\right)^n \to e^{-\alpha}$ e $\sum_{n=0}^\infty \frac{\alpha}{\alpha+n} = +\infty$, dalla prima delle due disuguaglianze in $(*)$ si deduce che la serie non può convergere totalmente in $[-1,0]$.
In maniera del tutto analoga si può vedere che il massimo di $|x-1|^\beta |x|^n$ è assunto in $\frac{n}{n+\beta}$ e vale $\frac{\beta}{\beta+n}\left(\frac{n}{\beta+n}\right)^n$ e quindi la serie non converge totalmente in $[0,1]$. Però sui compatti $[a,b] \subset (-1,1)$, dalla convergenza totale della serie $\sum_n x^n$ e dalla limitatezza di f, vi è convergenza totale.
Veniamo ora alla convergenza uniforme. In $[-1,0]$ la serie è a segni alterni. Dal criterio di Leibniz, e usando la seconda disuguaglianza in $(*)$, ricaviamo che

$$\begin{aligned} \sup_{x\in[-1,0]} \Big| \sum_{n=0}^{\infty} |x+1|^\alpha |x-1|^\beta x^n - \sum_{n=0}^{N} |x+1|^\alpha |x-1|^\beta x^n \Big| &\leqslant \\ \leqslant \sup_{x\in[-1,0]} \Big| |x+1|^\alpha |x-1|^\beta |x|^{N+1} \Big| \leqslant 2^\beta \frac{\alpha}{\alpha+n}\Big(\frac{n}{\alpha+n}\Big)^n. \end{aligned}$$

Tale quantità chiaramente tende a zero quando $n \to +\infty$, per cui la serie converge uniformemente in $[-1,0]$.
In $[0,1]$ la convergenza uniforme dipende dal valore del parametro β. Per $0 < \beta < 1$ la serie in 1 diverge positivamente, per cui non può esservi convergenza uniforme; per $b = 1$ il limite delle somme parziali, tutte continue, è una funzione discontinua, per cui non può esservi convergenza uniforme; per

$\beta > 1$ si ha

$$\sup_{x\in[0,1]} \Big| \sum_{n=0}^{\infty} f(x)x^n - \sum_{n=0}^{N-1} f(x)x^n \Big| = \sup_{x\in[0,1]} \Big| f(x)\frac{1}{1-x} - f(x)\frac{1-x^N}{1-x} \Big| =$$
$$= \sup_{x\in[0,1]} (x+1)^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}x^N$$

Limitandoci a considerare $(1-x)^{\beta-1}x^N$, poiché $(x+1)^{\alpha}$ è compreso tra 1 e 2^{α} per $x \in [0,1]$, valutando la derivata si ha

$$\frac{d}{dx}(1-x)^{\beta-1}x^N = 0 \quad \text{per } x = \frac{n}{n+\beta-1}$$

che è il punto di massimo (verificare!), nel quale la funzione assume il valore

$$\Big(\frac{\beta-1}{N+\beta-1}\Big)^{\beta-1}\Big(\frac{N}{N+\beta-1}\Big)^{N}$$

che tende a zero (verificare!) per ogni $\beta > 1$.

Nel caso generale possiamo concludere che se $f(-1) = 0$ vi è convergenza uniforme in $[-1,0]$, nell'intervallo positivo la serie si comporta come $\sum_n x^n$ se $f(1) \neq 0$ oppure se $f(1) = 0$ ed esiste $\beta \in (0,1)$ tale che

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{(1-x)^{\beta}} = \lambda \in \mathbf{R}\,,$$

cioè se l'ordine di infinitesimo di f in 1 è minore di 1, se

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{1-x} = \lambda \in \mathbf{R}\,,$$

cioè se l'ordine di infinitesimo di f in 1 è 1 il limite esiste in tutto $[0,1]$, ma non è continuo, se invece esiste $\beta >$ tale che

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{(1-x)^{\beta}} = \lambda \in \mathbf{R}\,,$$

cioè se l'ordine di infinitesimo di f in 1 è maggiore di 1, la serie converge uniformemente in tutto $[0,1]$. Per la totale bisognerà valutare il massimo e fare i conti.
Per quanto riguarda la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x)^n}$, proposta alla fine della soluzione dell'Esercizio 1.11, si può concludere che la serie converge uniformemente in $[0,+\infty)$.

Soluzione 1.13 - Converge totalmente su $\mathbf{R}$.

Soluzione 1.14 - Puntuale per ogni $x \in \mathbf{R}$ perché, ad esempio,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x+n}{x^2+n^4+\log n} \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x+n|}{n^4}$$

In generale vale, per $a, b > 0$, che $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, per cui $2(a^2+b^2) \geqslant (a+b)^2$, da cui

$$\left| \frac{x+n}{x^2+n^4+\log n} \right| \leqslant 2\frac{|x+n|}{2(x^2+n^4)} \leqslant 2\frac{|x+n|}{(|x|+n^2)^2} \leqslant \frac{2}{|x|+n^2} \leqslant \frac{2}{n^2}$$

per cui la serie converge totalmente in $\mathbf{R}$.

Soluzione 1.15 - Per ogni $x \in \mathbf{R}$ $1/\log(n+x^2)$ è decrescente in n per cui la serie è convergente per ogni x. La stima del resto

$$\left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n+x^2)} - \sum_{n=2}^{m-1} \frac{(-1)^n}{\log(n+x^2)} \right| \leqslant \frac{1}{\log(m+x^2)} \leqslant \frac{1}{\log m} \to 0$$

quindi vi è convergenza uniforme su tutto $\mathbf{R}$. Ovviamente non vi è la totale: si ha che

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \left| \frac{(-1)^n}{\log(n+x^2)} \right| = \frac{1}{\log n}$$

(il massimo è assunto per $x = 0$, **fare la derivata per esercizio!**) e la serie $\sum_n (\log n)^{-1}$ diverge. Non c'è convergenza totale nemmeno in nessun intervallo (a, b) (o $[a, b]$) poiché

$$\sup_{x \in (a,b)} \left| \frac{(-1)^n}{\log(n+x^2)} \right| = \max \left\{ \frac{1}{\log(n+a^2)}, \frac{1}{\log(n+b^2)} \right\}.$$

Soluzione 1.16 - Per $x \geqslant 1$ si ha che

$$\frac{nx^n}{1+|x|^n n^2} \geqslant \frac{nx^n}{2|x|^n n^2} = \frac{1}{2n}$$

per cui la serie diverge. Per $x \in (-1, 1)$ si ha che

$$\left| \frac{nx^n}{1+|x|^n n^2} \right| \leqslant n|x|^n$$

per cui vi è convergenza assoluta. Per $x \leqslant -1$

$$\frac{nx^n}{1+|x|^n n^2} = (-1)^n \frac{n|x|^n}{1+|x|^n n^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{n|x|^n}{1+|x|^n n^2} \leqslant \frac{1}{n}$$

Verifichiamo che è monotona decrescente in n: mi chiedo se

$$\frac{(n+1)|x|^{n+1}}{1+|x|^{n+1}(n+1)^2} \leqslant \frac{n|x|^n}{1+|x|^n n^2}$$

cioè se

$$n|x|^n + n(n+1)^2|x|^{2n+1} \geqslant (n+1)|x|^{n+1} + (n+1)n^2|x|^{2n+1}$$

il che è equivalente a

$$(n+1)|x| \leqslant n(n+1)|x|^{n+1} + n$$

che è vero per ogni $x \leqslant -1$ e per ogni $n \in \mathbf{N}$. Usando il criterio di Leibniz si conclude che la serie converge in $(-\infty, -1]$.
Quindi converge puntualmente in $(-\infty, 1)$.
Dalla stima in $(-1, 1)$ si vede che vi è convergenza totale in $[0, a]$ per ogni $0 < a < 1$, ma non può esservi in $[0, 1)$. Infatti

$$\sup_{[0,1)} \Big| \sum_{n=1}^{N} \frac{nx^n}{1+|x|^n n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1+|x|^n n^2} \Big| = \sup_{[0,1)} \Big| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{nx^n}{1+|x|^n n^2} \Big| = +\infty$$

in quanto le funzioni $\frac{nx^n}{1+|x|^n n^2}$ sono continue (anche in $x = 1$!!), ma la loro somma su n diverge a $+\infty$ in $x = 1$. Per x negativo si ha:

$$\Big| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1+|x|^n n^2} - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{nx^n}{1+|x|^n n^2} \Big| \leqslant \frac{m|x|^m}{1+|x|^m m^2} \leqslant \frac{1}{m} \to 0\,.$$

Conclusione: vi è convergenza puntuale in $(-\infty, 1)$ e uniforme e totale su tutti gli insiemi del tipo $(-\infty, a]$ con $a < 1$.

Soluzione 1.17 - Questo è un esempio molto semplice si serie di funzioni non negative che converge uniformemente, ma non totalmente.
La funzione f è a supporto compatto e le f_n non sono altro che traslazioni di f. Di conseguenza $\sum f_n(x)$ in realtà è una somma finita, per cui c'è convergenza puntuale (e assoluta, visto che le f_n sono tutte non negative) su tutto $\mathbf{R}$. C'è convergenza uniforme? Si, su tutto $\mathbf{R}$, perché

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \Big| \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=N}^{\infty} f_n(x) \Big| = \sup_{x\in\mathbf{R}} \Big| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) \Big| \leqslant \frac{1}{N+1}\,.$$

C'è convergenza totale? NO! perché il massimo di f_n è ovviamente $1/n$ assunto per $x_n = \pi/2 + n$ e la serie $\sum_n \frac{1}{n} = +\infty$. Converge, però, totalmente sui sottoinsiemi del tipo $(-\infty, a]$.
EX: modificare le f_n in modo tale da avere convergenza totale su $\mathbf{R}$.

Soluzione 1.18 - Per $x < 0$ $\lim_{n\to\infty} xn^{-1}e^{-nx} = -\infty$ per cui la serie diverge. Per $x \geqslant 0$ la serie invece converge (per $x = 0$ è identicamente nulla, per $x > 0$ si può usare, ad esempio, il criterio del rapporto). Vediamo che in $[0, +\infty)$ la serie converge totalmente. Derivando si ottiene che il punto $x_n = 1/n$

è stazionario. Poiché $f_n(0) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ e $f_n \geqslant 0$ x_n risulta punto di massimo. Quindi

$$|f_n(x)| \leqslant f_n(1/n) = \frac{1}{n^2}\frac{1}{e} \to 0\,.$$

Soluzione 1.19 - Per $x > 1$ converge e per $x \leqslant 1$ diverge a $+\infty$. Poiché la funzione $f_n(x) = n^{-x}$ è decrescente si ha che

$$\sup_{x\in(1,+\infty)} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n}$$

e la serie $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Idem per la convergenza uniforme:

$$\sup_{x\in(1,+\infty)} \left|\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}\right| = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = +\infty\,.$$

Se invece si considera un qualunque insieme del tipo $[a, +\infty)$ con $a > 1$ si ha, sempre per il fatto che f_n è decrescente, che $\sup_{x\in[a,+\infty)} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n^a}$ e $\sum \frac{1}{n^a}$ converge per ogni $a > 1$. Concludendo si ha convergenza totale, e quindi anche uniforme, in tutti gli insiemi del tipo $[a, +\infty)$ con $a > 1$.

Soluzione 1.22 - Posso fare il cambio $y = (x+1)/x$ e studiare $\sum_{n=0}^{\infty}(n-3)y^n$. Il raggio di convergenza è (si vede facilmente) 1, per cui la serie converge puntualmente per $y \in (-1, 1)$. La convergenza, al solito, è totale nei compatti $[a, b] \subset (-1, 1)$, ma non in $(-1, 1)$. Posso scrivere

$$(n-3)y^n = y^4(n-3)y^{n-4}$$

e vedere $(n-3)y^{n-4}$ come la derivata di y^{n-3}. Abbiamo

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(n-3)y^n &= -3 - 2y - y^2 + \sum_{n=4}^{\infty}(n-3)y^n \\ &= -3 - 2y - y^2 + \sum_{k=1}^{\infty} ky^{3+k}\end{aligned}$$

e

$$y^4 \sum_{k=1}^{\infty} ky^{k-1} = y^4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dy} y^k = y^4 \frac{d}{dy} \sum_{k=1}^{\infty} y^k = y^4 \frac{d}{dy} \frac{y}{1-y} = \frac{y^4}{(1-y)^2}$$

Conclusione:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n-3)y^n = -3 - 2y - y^2 + \frac{y^4}{(1-y)^2}$$

dove la convergenza è puntuale per $y \in (-1, 1)$ e totale sui compatti $[a, b] \subset (-1, 1)$. La funzione $f(x) = (x + 1)/x$ ha il grafico in Figura 1.7 per cui,

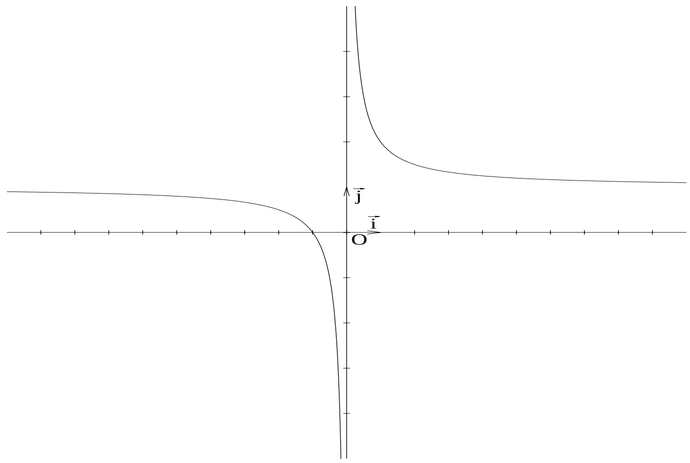

Figura 1.7:

tornando a considerare x, si ha che

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n-3)\Big(\frac{x+1}{x}\Big)^n = -3 - 2\frac{x+1}{x} - \Big(\frac{x+1}{x}\Big)^2 + \frac{(x+1)^4}{x^2}$$

dove la convergenza è puntuale per $x \in (-\infty, -1/2)$ e totale negli insiemi del tipo $[a, b] \subset (-\infty, -1/2)$. Infatti

$$\left|\frac{x+1}{x}\right| < 1 \quad \text{per} \quad x \in (-\infty, -1/2)\,.$$

Soluzione 1.25 - Calcolando il seguente limite

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3}$$

si ha che il raggio è 3. Conclusione: la serie converge (puntualmente) in $(-3, 3)$ e non converge (puntualmente) in $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$. Vediamo in 3 e -3 che succede.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}(-3)^n \quad \text{non converge,} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}3^n \quad \text{diverge}$$

Conclusione: si ha convergenza puntuale (solo) in $(-3, 3)$. Vediamo gli altri tipi di convergenza.

Teorema 1.3 *Una serie di potenze centrata in* 0 *converge totalmente in ogni intervallo chiuso del tipo* $[-a, a]$ *con* $a < \rho$.

Si ha di conseguenza convergenza totale, e quindi uniforme, in ogni intervallo $[-a,a]$ con $a < 3$. Vediamo se si ha convergenza uniforme anche in $(-3,3)$. Ragionando come al solito (si veda, ad esempio, la risoluzione dell'esercizio 1.11) si deduce che la serie non può convergere uniformemente in $(-3,3)$ e quindi nemmeno totalmente.
Si osservi che la serie ha come somma la funzione

$$f(x) = \frac{3}{3-x}\,.$$

Soluzione 1.26 - Si può fare il limite della radice n-esima di $\frac{n^\alpha + e^{\alpha n}}{n}$ oppure pensare la serie come (**perché?**)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{n} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\alpha n}}{n} x^n$$

e studiare separatamente le due serie. Seguiamo quest'ultima strada. Il primo termine:

$$\sqrt[n]{n^{\alpha-1}} \to 1 \qquad \text{quindi il raggio di convergenza è } 1\,,$$

il secondo termine:

$$\sqrt[n]{\frac{e^{\alpha n}}{n}} \to e^\alpha \qquad \text{quindi il raggio di convergenza è } \frac{1}{e^\alpha}\,.$$

Se $\alpha = 0$: il raggio è lo stesso e la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} x^n$. Vediamo gli estremi: per $x = -1$ si, per $x = 1$ no. Insieme di convergenza puntuale $[-1,1)$. La convergenza è uniforme? Non può esserlo dappertutto (vedi esercizio precedente).

Teorema 1.4 (Leibniz) *Sia $(a_n)_n$ una serie a termini positivi. Se $a_n \to 0$ ed è decrescente allora $\sum(-1)^n a_n$ converge. Inoltre*

$$\Big| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n - \sum_{n=0}^{m} (-1)^n a_n \Big| \leqslant |a_{m+1}|\,.$$

Sicuramente abbiamo convergenza totale negli insiemi del tipo $[a,b]$ con $-1 < a < b < 1$, non abbiamo convergenza uniforme, e quindi nemmeno totale, in $[0,1)$. Vediamo in $[-1,0]$: qui la serie è a segni alterni, per vedere se la serie è uniformemente convergente uso il criterio di Leibniz. Detta f la somma della serie e f_n le somme parziali devo vedere se vale

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty \to 0$$

cioè

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{[-1,0]} \Big| \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{k} |x|^k - \sum_{n=0}^{n} (-1)^k \frac{2}{k} |x|^k \Big|$$
$$\leqslant \lim_{n\to+\infty} \sup_{[-1,0]} \frac{2}{n+1} |x|^{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n+1} \to 0$$

quindi vi è convergenza uniforme in $[-1,0]$, ma non totale! Concludendo: per $\alpha = 0$ si ha che la serie converge puntualmente in $[-1,1)$, uniformemente in $[-1,b] \subset [-1,1)$ e totalmente in ogni $[a,b] \subset (-1,1)$.
Gli altri casi: se $\alpha > 0$ il raggio è $1/e^\alpha$. Il primo termine sicuramente converge totalmente in $[-1/e^\alpha, 1/e^\alpha]$, quindi limitiamoci a considerare il secondo. Negli estremi: per $x = -1/e^\alpha$ la serie converge, per $x = 1/e^\alpha$ la serie diverge, infatti si ha rispettivamente

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\,.$$

Convergenza uniforme e totale come sopra:

$$\text{convergenza uniforme in } \Big[-\tfrac{1}{e^\alpha}, b\Big] \quad \text{per ogni } b < \tfrac{1}{e^\alpha}$$

$$\text{convergenza totale in } [a,b] \quad \text{per ogni } a > -\tfrac{1}{e^\alpha}\,,\ b < \tfrac{1}{e^\alpha}$$

Se $\alpha < 0$ il raggio è 1. Vediamo gli estremi: il secondo termine questa volta converge totalmente in $[-1,1]$. Il primo negli estremi è

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{1-\alpha}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-\alpha}}$$

che convergono entrambe. Vi è convergenza totale in $[-1,1]$.

Soluzione 1.27 - È facile vedere che

$$f^{(k)}(x) = f(x) \qquad \text{per ogni } k \in \mathbf{N}\,.$$

Per cui lo sviluppo di Taylor è dato da

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)(x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,.$$

Vediamo di studiare la convergenza di questa serie: puntuale in tutto $\mathbf{R}$, ad esempio con il criterio della radice n-esima. Non può essere uniforme in tutto $\mathbf{R}$ perché

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = +\infty\,.$$

Se anche ci limitiamo a $x \in (-\infty, 0]$ abbiamo (p_n il polinomio di grado n delle somme fino all'n-esimo termine)

$$\sup_{x \in (-\infty,0]} \Big| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \Big| = \sup_{x \in (-\infty,0]} |e^x - p_n(x)| = +\infty\,.$$

Vediamo cosa si può dire: se mi limito a considerare un intervallo $[a,b]$ ho che

$$\Big| \frac{x^k}{k!} \Big| \leqslant \frac{b^k}{k!}$$

per la crescenza di x^k. La serie data dai maggioranti converge. Concludendo: la serie di Taylor in $x = 0$ è data da $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ che converge puntualmente su tutto $\mathbf{R}$ e uniformemente e totalmente solo sui compatti.

Soluzione 1.29 - La serie dell'esercizio **non è** una serie di potenze. Tuttavia lo studio di tale serie può essere ricondotto allo studio di una serie di potenze.
Innanzitutto si osservi che

$$\lim_n \left[\frac{n}{n+2}\frac{|x|^n}{(1+x^2)^n}\right]^{1/n} = \frac{|x|}{1+x^2}$$

che è sempre minore di 1 (per esercizio vedere che $\frac{|x|}{1+x^2} \leqslant 1/2$). Di conseguenza la serie converge assolutamente per ogni $x \in \mathbf{R}$. Calcoliamo la somma della serie (per $|y| < 1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}\, y^n \,.$$

Si ha che

$$\frac{n}{n+2}\, y^n = \frac{n+2-2}{n+2}\, y^n = \left[1 - \frac{2}{n+2}\right] y^n = y^n - \frac{2}{y^2}\frac{1}{n+2}\, y^{n+2}$$

Ora mi chiedo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}\, y^n \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} y^n - \frac{2}{y^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}\, y^{n+2} \,.$$

La risposta è si, perché $\lim_n(a_n + b_n) = \lim_n a_n + \lim_n b_n$ qualora i due limiti a destra (o almeno uno di essi) esistano e nel nostro caso le due serie a destra convergono entrambe (per $|y| < 1$). Prendiamo in esame il secondo termine:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}\, y^{n+2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^y t^{n+1} dt \stackrel{!}{=} \int_0^y \Big(\sum_{n=1}^{\infty} t^{n+1}\Big) dt = \\
&= \int_0^y \Big(\sum_{n=2}^{\infty} t^n\Big) dt = \int_0^y \frac{t^2}{1-t} dt
\end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio con il punto esclamativo è lecito se la convergenza è uniforme!! (e lo è se y è fissato tra -1 e 1). Per integrare $\frac{t^2}{1-t}$ dividiamo t^2 per $1-t$ e scriviamo

$$t^2 = (1-t)(-1-t) + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{t^2}{1-t} = -(1+t) + \frac{1}{1-t}$$

e quindi integrando

$$\int_0^y \frac{t^2}{1-t} dt = -y - \frac{y^2}{2} - \log(1-y) \,.$$

Tirando le fila si ha

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+2}\,y^n &= \frac{y}{1-y}-\frac{2}{y^2}\Big[-y-\frac{y^2}{2}-\log(1-y)\Big]\\ &= \frac{y}{1-y}+\frac{2}{y}+1+\frac{2}{y^2}\log(1-y)\end{aligned}$$

Si osservi che questa funzione è regolare anche se sembra avere singolarità in $y=0$. Infatti $\log(1-y)=-y+y^2/2+o(y^2)$ e quindi

$$\begin{aligned}\frac{y}{1-y}+\frac{2}{y}+1+\frac{2}{y^2}\log(1-y) &= \frac{1}{y^2}\Big[\frac{y^3}{1-y}+2y+y^2+2\log(1-y)\Big]=\\ &= \frac{1}{y^2}\Big[\frac{y^3}{1-y}+2y+y^2-2y+y^2+o(y^2)\Big]\end{aligned}$$

Tornando al nostro problema: poiché la quantità $\frac{x^n}{(1+x^2)^n}$ è sempre minore di 1 la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+2}\,\frac{x}{1+x^2}$$

converge puntualmente per ogni $x\in\mathbf{R}$; converge pure uniformemente e totalmente su $\mathbf{R}$ poiché $\frac{x}{1+x^2}\leqslant\frac{1}{2}$. Si conclude sostituendo nell'espressione di sopra $\frac{x}{1+x^2}$ al posto di y

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+2}\,\frac{x^n}{(1+x^2)^n}=\frac{x}{1+x^2-x}-\frac{x}{1+x^2}-\frac{x^2}{2(1+x^2)^2}-\log\frac{1+x^2-x}{1+x^2}\,.$$

Soluzione 1.30 - Usiamo una conseguenza del seguente risultato.

Teorema 1.5 *Sia a_n serie a termini positivi. Se esiste*

$$\lim_n\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

allora esiste anche $\lim_n\ \sqrt[n]{a_n}$ *e vale*

$$\lim_n\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_n\ \sqrt[n]{a_n}\,.$$

Il viceversa non è vero! Si consideri ad esempio la successione data da $a_n=1/n$ se n è pari e $a_n=1/2n$ se n è dispari. Si ha $\lim_n\ \sqrt[n]{a_n}=1$, mentre invece $\lim_n\frac{a_{n+1}}{a_n}$ non esiste (il rapporto è $1/2$ se n è pari, 2 se n è dispari).

Allora calcoliamo il limite della radice n-esima calcolando il rapporto. (provare a farlo con la radice n-esima!!!)

$$\lim_n\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!}=\lim_n\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n=\frac{1}{e}$$

quindi vi è convergenza puntuale in $(-e,e)$ e non vi è in $(-\infty,-e)\cup(e,+\infty)$. Vediamo gli estremi:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \qquad \text{quindi per } x=n \quad e^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k}{k!} \geqslant \frac{n^n}{n!}$$

per cui

$$\frac{n!}{n^n}e^n \geqslant 1\,. \tag{1.3}$$

La serie quindi non converge per $x=-e$ e diverge a $+\infty$ per $x=e$. Ovviamente converge totalmente e uniformemente in tutti gli intervalli $[a,b]\subset(-e,e)$. Come al solito si ha che la serie non può convergere uniformemente in $(-e,e)$.
Anziché la stima (1.3) si può usare, per studiare il comportamento della serie in $x=e$ la formula di Stirling

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\,\left(1+O(1/n)\right)\,.$$

Soluzione 1.31 - Sappiamo che la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad \text{per } |q|<1\,.$$

Possiamo allora concludere che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n \qquad \text{converge a} \qquad \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{per } |x|<1\,.$$

Studiamo questa serie. Converge puntualmente in $(-1,1)$. Per $x=1$ e per $x=-1$ ovviamente non converge. Al solito, la serie non convergerà uniformemente in $(-1,1)$, ma è facile vedere che converge totalmente in tutti i compatti $[a,b]$ contenuti in $(-1,1)$. Calcoliamo la derivata di $f(x)=\text{arctg }x$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Integrando termine a termine si ha, posto $f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}$, grazie alla convergenza uniforme

$$\lim_n \int_0^x f_n(t)dt = \int_0^x \lim_n f_n(t)dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \text{arctg }x\,.$$

Ora

$$\int_0^x (-1)^k t^{2k}dt = (-1)^k\frac{1}{2k+1}x^{2k+1}$$

per cui

$$\text{arctg }x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

per ogni $x \in [-1,1]$ e la convergenza uniforme solo sui compatti contenuti in $(-1,1)$.

Soluzione 1.32 - Calcoliamo la derivata di $f(x) = \operatorname{sen} x$.

$$\begin{array}{ll} f^{(1)}(x) = \cos x & f^{(1)}(0) = 1 \\ f^{(2)}(x) = -\operatorname{sen} x & f^{(2)}(0) = 0 \\ f^{(3)}(x) = -\cos x & f^{(3)}(0) = -1 \\ f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x & f^{(4)}(0) = 0 \end{array}$$

e poi il ciclo si ripete. Quindi lo sviluppo in 0 è dato da

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,.$$

Vediamo la convergenza. Per il criterio di Leibniz converge per ogni x reale. La convergenza è uniforme e totale solo sui compatti (in modo analogo all'esercizio precedente). In modo simile si calcola anche lo sviluppo del coseno

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\,.$$

Soluzione 1.33 - Si ha che

$$\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)!}$$

per cui il limite della radice n-esima è 0: la serie converge per ogni $x \in \mathbf{R}$. Prima di studiare le convergenze uniforme e totale calcoliamo la somma della serie. Sappiamo che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x\,.$$

Si ha che

$$\frac{n}{(n+1)!} x^n = x \frac{d}{dx} \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{1}{x} \right]$$

per cui, grazie alla convergenza uniforme posso invertire il segno di derivata con il limite e ottenere

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} x \frac{d}{dx}\Big[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{1}{x}\Big] \\
&= x\frac{d}{dx}\Big[\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\Big] \\
&= x\frac{d}{dx}\Big[\frac{1}{x}(e^x - 1 - x)\Big] \\
&= x\Big[-\frac{1}{x^2}(e^x - 1 - x) + \frac{1}{x}(e^x - 1)\Big] \\
&= e^x - \frac{1}{x}(e^x - 1)\,.
\end{aligned}$$

Vediamo la convergenza uniforme in $\mathbf{R}$:

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \Big| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} x^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} x^k \Big| = \sup_{x\in\mathbf{R}} \Big| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} x^k \Big| = +\infty$$

quindi non vi è convergenza uniforme in $\mathbf{R}$. Nemmeno se ci limitiamo a semirette $[a, +\infty)$, perché l'estremo superiore è $+\infty$ proprio perché consideriamo la semiretta fino a $+\infty$. Che succede se consideriamo $(-\infty, 0]$?

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in(-\infty,0]} \Big| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} x^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} x^k \Big| = \\
&\qquad = \sup_{x\in(-\infty,0]} \Big| e^x - \frac{1}{x}(e^x - 1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} x^k \Big| = +\infty
\end{aligned}$$

perché $f(x) = e^x - \frac{1}{x}(e^x - 1)$ è limitata in $(-\infty, 0]$, mentre un polinomio di grado n no!

(come, ad esempio, fatto per e^x). Per $x \in [-a, a]$ con a positivo

$$\Big| \frac{k}{(k+1)!} x^k \Big| \leqslant \frac{k}{(k+1)!} a^k\,.$$

La serie $\sum_n \frac{na^n}{(n+1)!}$ converge per ogni a reale per cui si ha convergenza totale e uniforme in ogni compatto.

Soluzione 1.34 - Spezzando il polinomio $x^2 - 5x + 6$ come prodotto di $x - 3$ e $x - 2$ si ottiene che

$$f(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{2}{x-2}\,.$$

Sapendo che, per $|q| < 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ converge al valore $\dfrac{1}{1-q}$ si può scrivere

$$\frac{1}{x-3} = -\frac{1}{3-x} = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{x}{3}} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n$$

che converge per $|\frac{x}{3}| < 1$, cioè per $|x| < 3$. L'altro termine:

$$-\frac{2}{x-2} = \frac{2}{2-x} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

che converge per $|\frac{x}{2}| < 1$, cioè per $|x| < 2$. Sarà possibile effettuare la somma solo dove convergono entrambe, quindi sicuramente per $x \in (-2, 2)$ si ha che

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right]x^n\,.$$

Soluzione 1.35 - Si osservi che

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \text{e che} \qquad \frac{d}{dx}\frac{1}{(1-x)^2} = 2\,\frac{1}{(1-x)^3}\,.$$

Poiché la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge uniformemente in ogni intervallo chiuso $[a, b] \subset (-1, 1)$ e così pure la serie delle sue derivate (prime e seconde, ma non solo) si può affermare che (per quei valori di $x \in [a, b] \subset (-1, 1)$ con a, b arbitrari, ma $|a|, |b| < 1$, per cui per ogni $x \in (-1, 1)$)

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \frac{d}{dx}\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx} n x^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}\,.$$

Per cui dove vi è convergenza per entrambe le serie, e in questo caso entrambe convergono in $(-1, 1)$, vale

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{(1-x)^3} + \frac{3x^2}{(1-x)^3} = \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} + \frac{3x^2}{2}\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)(n+1)}{2}x^n + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{3n(n-1)}{2}x^n \\
&= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n+2)(n+1) + 3n(n-1)}{2}x^n \\
&= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty}(2n^2+1)x^n\,.
\end{aligned}$$

Soluzione 1.36 - La funzione f può essere scritta nei seguenti modi

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{x-2}{3x-2}\right) &= \log(x-2)-\log(3x-2) \qquad \text{NO!!}\\ &= \log(2-x)-\log(2-3x) \qquad \text{SI!!}\end{aligned}$$

Perché scartiamo il primo dei due? I due modi non sono equivalenti: la funzione f è definita quando il suo argomento è positivo, e cioè quando $x-2$ e $3x-2$ hanno lo stesso segno. Quindi f può essere spezzata come sopra nel primo modo se $x-2$ e $3x-2$ sono entrambi positivi, nel secondo modo se $x-2$ e $3x-2$ sono entrambi negativi. Per $x=0$, intorno al quale vogliamo sviluppare f, le funzioni $\log(x-2)$, $\log(3x-2)$ non sono definite, mentre $\log(2-x)$ e $\log(2-3x)$ si.
Per esercizio, e anche per convincersi di quanto appena detto, disegnare i grafici di $\log(\frac{x-2}{3x-2})$, $\log(x-2)$, $\log(3x-2)$, $\log(2-x)$ e $\log(2-3x)$.
Abbiamo trasferito quindi il problema nello scrivere lo sviluppo delle due funzioni $\log(2-x)$ e $\log(2-3x)$. Si ha, per $|x/2|<1$,

$$\frac{d}{dx}\log(2-x) = -\frac{1}{2-x} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

Integrando tra 0 e x, con $|x|<2$, poiché la serie sopra converge uniformemente

$$\log(2-t)\Big|_0^x = -\frac{1}{2}\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^n dt = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\left(\frac{t}{2}\right)^n dt$$

e quindi

$$\log(2-x)-\log 2 = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^x = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Analogamente si ottiene, per $|3x/2|<1$ e quindi per $|x|<2/3$,

$$\log(2-3x)-\log 2 = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Concludendo:

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{x-2}{3x-2}\right) &= \log 2-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\frac{x^{n+1}}{n+1}-\log 2+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]\frac{x^{n+1}}{n}\end{aligned}$$

e l'insieme di convergenza è l'intersezione degli insiemi sui quali convergono separatamente le due serie. Concludiamo che

$$\log\left[\frac{x-2}{3x-2}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n-\frac{1}{2^n}\right]\frac{x^n}{n}$$

e la convergenza è puntuale in $[-2/3, 2/3)$, uniforme in tutti gli insiemi del tipo $[-2/3, a]$ con $a \in (-2/3, 2/3)$ e totale in tutti gli insiemi del tipo $[b, c]$ con $b, c \in (-2/3, 2/3)$, $b < c$.
Infatti una delle due serie converge puntualmente almeno in $(-2, 2)$ e l'altra almeno in $(-2/3, 2/3) \subset (-2, 2)$, quindi la serie converge in $(-2/3, 2/3)$ e non converge in $(-\infty, -2/3) \cup (2/3, +\infty)$ (per verifica calcolare il limite della radice n-esima dei coefficienti). Negli estremi: è sufficiente studiare la seconda serie, poiché convergendo la prima in $(-2, 2)$ in particolare convergerà in $-2/3$ e $2/3$.
Per $x = 2/3$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3}\frac{1}{n}$$

che diverge a $+\infty$, mentre per $x = -2/3$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\frac{1}{n}=\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

che converge.
La convergenza è uniforme in tutti gli intervalli del tipo $[-2/3, a]$ con $a < 2/3$ e totale negli intervalli del tipo $[b, c] \subset (-2/3, 2/3)$.

Soluzione 1.37 - L'insieme è $[-1, 1]$ per $\alpha < -1/2$, $[-1, 1)$ per $\alpha \geqslant -1/2$.

Soluzione 1.40 - Si può fare seguendo la soluzione dell'Esercizio 1.36 osservando che $1 + x - 2x^2 = (2x + 1)(1 - x)$.

Soluzione 1.42 - Attenzione! nella prima serie i coefficienti a_n sono dati da $1/n^2$, nella seconda no! Alcuni infatti sono zero. I coefficienti della seconda serie sono infatti

$$a_n=\begin{cases}1/n & \text{se } n=k^2 \text{ con } k\in\mathbf{N}\,,\\ 0 & \text{altrimenti}\,.\end{cases}$$

Il comportamento però è lo stesso: infatti la prima converge totalmente in $[-1, 1]$; e la serie converge sia in -1 che in 1. Per lo studio della seconda, valutando

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x|^{n^2}/n^2}=\lim_{n\to\infty}|x|^n\sqrt[n]{1/n^2}$$

si ottiene che la serie converge (assolutamente) per $|x| \leqslant 1$ e non converge per $|x| > 1$. La convergenza in $[-1, 1]$ è totale.

Soluzione 1.44 - Si osservi che i termini di questa serie sono "alcuni" dei termini della serie $\sum_k \frac{1}{k} x^k$. Infatti i coefficienti a_n sono dati da

$$a_n = \begin{cases} 1/n & \text{se } n = k^k \text{ con } k \in \mathbf{N}\,, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per cui

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[n]{1/n} & \text{se } n = k^k \text{ con } k \in \mathbf{N}\,, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di conseguenza il limite $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ non esiste. Possiamo trattare la serie come una serie numerica, fissando x e valutando

$$\sqrt[n]{\left|\frac{x^{n^n}}{n^n}\right|} = \frac{x^n}{n}\,.$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ si ottiene che la serie converge per $x \in [-1,1]$. Alternativamente, per chi conoscesse il ***limsup*** e che il raggio di convergenza è dato dal reciproco di $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, si ha che $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k^k]{k^k} = \lim_{h\to\infty} \sqrt[h]{h} = 1$. Il raggio quindi è 1. Per $x = 1$ e $x = -1$ la serie converge e quindi l'insieme di convergenza è $[-1,1]$. La convergenza è anche totale.

Soluzione 1.45 - Questo è un esempio in cui il limite di $a_n = (2 + \operatorname{sen} n\pi/2)^n$ non esiste. Si ha che

$$2 + \operatorname{sen} n\pi/2 \quad \text{può assumere i valori } 1, 2, 3\,.$$

L'estremo superiore (si veda la definizione di raggio di convergenza nelle dispense) dei numeri per cui la serie converge è $1/3$ (l'inverso del massimo valore che può assumere a_n): infatti non può essere maggiore perché se lo fosse, diciamo $r > 1/3$, per tutti i valori $x \in (1/3, r)$ la serie convergerebbe. Ma per infiniti valori di $n \in \mathbf{N}$ si ha che

$$2 + \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \quad \text{assume il valore 3}$$

per cui se fissiamo $x > 1/3$ e minore di r si avrebbe per infinite volte che

$$(2 + \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2})^n x^n > 1$$

il che non farebbe convergere la serie.

Soluzione 1.46 - Poiché la funzione è dispari lo sviluppo è di soli seni. Si ha

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ \frac{4}{\pi n} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

quindi lo sviluppo è

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)} \operatorname{sen}(2n+1)x\,.$$

La media di f è nulla, per cui a_0 è nullo. Usando la formula (1.2) si ha che lo sviluppo di

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)dt = |x| - \pi$$

è dato da (i coefficienti A_n di $\cos nx$ sono nulli, i coefficienti B_n di $\operatorname{sen} nx$ sono dati da $4/\pi n^2$ per n dispari, 0 altrimenti)

$$|x| - \pi = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)^2} \cos(2n+1)x$$

dove $A_0 = \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} [|x| - \pi] dx = -\pi^2/\pi = -\pi$. Per cui lo sviluppo di $|x|$ in $[-\pi, \pi]$ è (confrontare con l'ESERCIZIO 1.49)

$$\pi - \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)^2} \cos(2n+1)x = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)^2} \cos(2n+1)x\,.$$

Soluzione 1.47 - La funzione è pari, per cui il suo sviluppo è fatto di soli coseni. Si ha che $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = 2\pi^3/3$ e

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \; dx &= x^2 \frac{\operatorname{sen} nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x \frac{\operatorname{sen} nx}{n} dx \\ &= 2x \frac{\cos nx}{n^2}\bigg|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} 2 \frac{\cos nx}{n^2} dx = (-1)^n \frac{4\pi}{n^2}\end{aligned}$$

per cui lo sviluppo è dato da

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nx\,.$$

Poiché l'estensione a tutto $\mathbf{R}$ è C^1 a tratti e continua si ha convergenza uniforme su tutto $\mathbf{R}$. In particolare per $x = \pi$ si ha

$$f(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} (-1)^n = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

da cui si ricava

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Soluzione 1.48 - Il periodo $2T$ è 2, quindi $T = 1$. Calcoliamo i coefficienti:

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{1} x dx = \frac{1}{2}\,.$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_{-1}^{1} f(x)\cos nx\pi \; dx = \int_0^1 x\cos nx\pi \; dx \\
&= x\Big(\frac{1}{n\pi}\,\mathrm{sen}\, n\pi x\Big)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{n\pi}\,\mathrm{sen}\, n\pi x \; dx \\
&= -\frac{1}{n\pi}\Big(-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\Big)\Big|_0^1 \\
&= \begin{cases} -\dfrac{2}{n^2\pi^2} & n \text{ dispari} \\[2ex] 0 & n \text{ pari} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \int_{-1}^{1} f(x)\cos nx\pi \; dx = \int_0^1 x\,\mathrm{sen}\, nx\pi \; dx \\
&= x\Big(-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\Big)\Big|_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x \; dx \\
&= (-1)^{n+1}\frac{1}{n\pi} + \frac{1}{n\pi}\Big(\frac{1}{n\pi}\,\mathrm{sen}\, n\pi x\Big)\Big|_0^1 = (-1)^{n+1}\frac{1}{n\pi}
\end{aligned}$$

quindi lo svilupo è

$$\frac{1}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)^2\pi^2}\cos(2n+1)\pi x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\pi}\,\mathrm{sen}\, n\pi x\,.$$

Converge puntualmente alla funzione

$$\begin{cases} f(x) & x \in (-1,1) \\ \frac{1}{2} & x = -1\,, x = 1\,. \end{cases}$$

La convergenza uniforme c'è solo negli insiemi del tipo $[a,b] \subset (-1,1)$ visto che il limite non è continuo.
Valutiamo ora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$. Per $x = 1$ la serie converge al valore $1/2$ per cui

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \frac{1}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)^2\pi^2}\cos(2n+1)\pi + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\pi}\,\mathrm{sen}\, n\pi \\
&= \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)^2\pi^2}
\end{aligned}$$

da cui

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

Ora per la somma $\sum_n \frac{1}{(2n)^2}$ possiamo procedere in due modi: sfruttare l'esercizio precedente dal quale sappiamo che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ per cui otteniamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{24},$$

oppure, ignorando il risultato dell'esercizio precedente, osservare che $\sum_n \frac{1}{(2n)^2} = \sum_n \frac{1}{4n^2}$ per cui da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

dedurre che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\,\frac{4}{3}\,\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{24}.$$

Soluzione 1.49 - La estendo per periodicità a tutto **R** e per questione di semplicità di calcolo sviluppo la funzione $g(x) = |x|$ definita in $[-\pi, \pi]$ ed estesa per periodicità a tutto **R** (si veda la Figura 1.8). In questo modo anziché calcolare

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = \int_0^{\pi} x \cos nx dx - \int_{\pi}^{2\pi} x \cos nx dx + \int_{\pi}^{2\pi} 2\pi \cos nx dx$$

calcolo

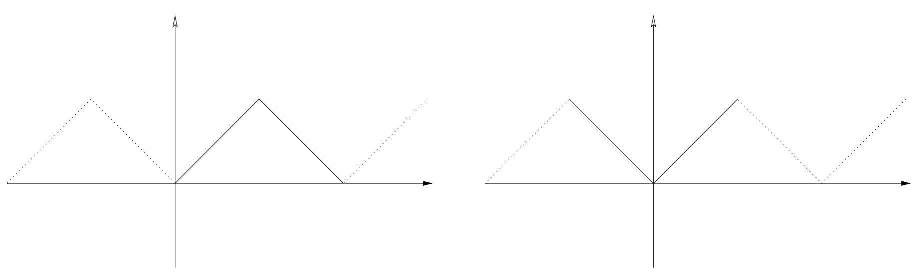

Figura 1.8:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx dx = 2 \int_0^{\pi} x \cos nx dx .$$

Quindi i coefficienti sono dati da:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \pi$$

e per $n > 0$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\Big[\frac{x}{n}\operatorname{sen} nx\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{n}\operatorname{sen} nx dx\Big] \\ &= \frac{2}{\pi}\Big[0 + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^\pi\Big] = \frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n - 1] \end{aligned}$$

per cui

$$\text{(1.4)} \qquad a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ pari} \\ -\dfrac{4}{\pi n^2} & \text{se } n \text{ dispari}. \end{cases}$$

Lo sviluppo risulta quindi essere

$$\text{(1.5)} \qquad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty a_n \cos nx = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^\infty \frac{4}{\pi(2k+1)^2}\cos(2k+1)x\,.$$

La convergenza è puntuale e uniforme su tutto $\mathbf{R}$ (perché la funzione è continua e C^1 a tratti), in particolare sull'intervallo $[0, 2\pi]$ al quale eravamo interessati. In particolare se valutiamo la serie per $x = 0$ questa convergerà al valore $f(0) = 0$, per cui si ha

$$\frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^\infty \frac{4}{\pi(2k+1)^2} = 0 \qquad \text{da cui} \qquad \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

Per l'altra serie sfruttiamo l'uguaglianza di Parceval (1.1):

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^\infty (a_k^2 + b_k^2)\,.$$

Per cui da $\int_{-\pi}^\pi x^2 dx = 2\pi^3/3$ otteniamo

$$\frac{2\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{k=1}^\infty \frac{16}{\pi^2(2k+1)^4}$$

e infine

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^2}{16}\Big(\frac{2\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{2}\Big) = \frac{\pi^4}{96}\,.$$

Per considerare uno sviluppo in soli seni o di soli coseni in generale si fa così: data $h : [0, T] \to \mathbf{R}$ consideriamo la funzione $\tilde{h}$ definita in $[-T, T)$

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} h(x) & x \in [0, T] \\ h(-x) & x \in [-T, 0] \end{cases}$$

ed estendendo poi per periodicità a tutto $\mathbf{R}$ la funzione. Poiché la funzione risulta così pari il suo sviluppo sarà di soli coseni e

$$\int_{-T}^T \tilde{h}(x)\cos\frac{n\pi}{T}x dx = 2\int_0^T h(x)\cos\frac{n\pi}{T}x\,.$$

Se vogliamo uno sviluppo di soli seni si considera

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} h(x) & x \in [0, T] \\ -h(-x) & x \in [-T, 0]\,. \end{cases}$$

Nel nostro caso estendiamo la funzione nel modo seguente:

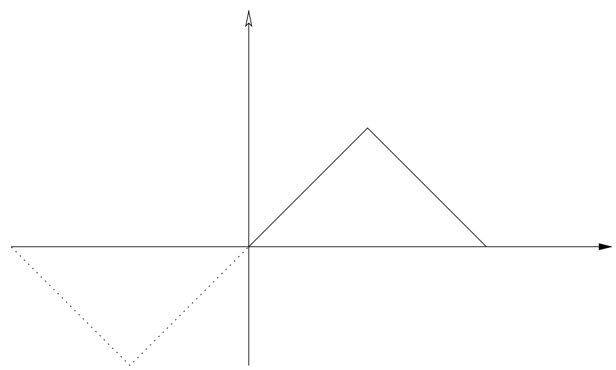

Figura 1.9:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} -x - 2\pi & \text{se } x \in [-2\pi, -\pi] \\ x & \text{se } x \in [-\pi, \pi] \\ -x + 2\pi & \text{se } x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

e poi estendo $\tilde{f}$ periodicamente su tutto $\mathbf{R}$ (a questo punto avremo una funzione periodica di periodo 4π!). La restrizione di $\tilde{f}$ a $[0, 2\pi]$ è sempre la nostra f. La funzione così estesa risulta essere dispari fornendo i coefficienti dei coseni nulli. Valutiamo i coefficienti:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi} g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2\pi} x dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} \frac{n}{2} x dx = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} \frac{n}{2} x dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} \frac{n}{2} x dx = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} \frac{n}{2} x dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} [-x + 2\pi] \operatorname{sen} \frac{n}{2} x dx\,. \end{aligned}$$

Abbiamo che

$$\int x \operatorname{sen} \frac{n}{2} x dx = -\frac{2}{n} x \cos \frac{n}{2} x + \frac{4}{n^2} \operatorname{sen} \frac{n}{2} x$$

per cui

$$\begin{array}{ll} \text{tra } 0 \text{ e } \pi & -\dfrac{2}{n} \cos \dfrac{n\pi}{2} + \dfrac{4}{n^2 \pi} \operatorname{sen} \dfrac{n\pi}{2} \\ \text{tra } \pi \text{ e } 2\pi & \dfrac{1}{\pi}\Big[-\Big(-\dfrac{4\pi}{n} \cos n\pi + \dfrac{2\pi}{n} \cos \dfrac{n\pi}{2} + \dfrac{4}{n^2} \operatorname{sen} n\pi - \dfrac{4}{n^2} \operatorname{sen} \dfrac{n\pi}{2} \Big) + \\ & \quad + 2\pi \Big(-\dfrac{2}{n} \cos n\pi + \dfrac{2}{n} \cos \dfrac{n\pi}{2} \Big) \Big]\,. \end{array}$$

Sommando, poiché

$$\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari}, \end{cases}$$

si ha

$$b_n = \frac{8}{n^2\pi}\operatorname{sen} n\frac{\pi}{2} = \frac{8}{n^2\pi}\begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari}, \end{cases}$$

La serie è data dalla somma dei seguenti termini

$$\sum_{n \text{ dispari}} \frac{8}{n^2\pi}\operatorname{sen} n\frac{\pi}{2}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{8}{(2n+1)^2\pi}\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}x$$

Attenzione! Lo sviluppo trovato è lo sviluppo in soli seni della funzione $\tilde{f}$, quello in (1.5) è lo sviluppo della funzione f: convergono entrmabi (uniformemente) alla funzione originale nell'intervallo $[0, 2\pi]$, ma a funzioni diverse nell'intervallo $[-2\pi, 0]$ (si vedano le Figura 1.8 e Figura 1.9).
Ora valutiamo lo sviluppo della funzione g: si osservi che nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ la funzione $f(x) = |x|$ è una primitiva della funzione g, e precisamente

$$f(x) = \pi + \int_{-\pi}^{x} g(t)dt\,, \qquad \text{cioè} \qquad f(x) - \pi = \int_{-\pi}^{x} g(t)dt\,.$$

Se denotiamo con α_n e β_n i coefficienti

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx dx \qquad \beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\operatorname{sen} nx dx$$

si ha che $\alpha_0 = 0$ e dalle formule (1.2) si ricava

$$\beta_n = -na_n\,, \qquad \alpha_n = nb_n$$

quindi, conoscendo a_n (si veda (1.4)) e b_n ($b_n = 0$ per ogni $n \in \mathbf{N}$) si ricava immediatamente

$$\beta_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ pari} \\ \dfrac{4}{\pi n} & \text{se } n \text{ dispari}. \end{cases}$$

per cui

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k+1)}\operatorname{sen}(2k+1)x$$

(si confronti con l'Esercizio 1.46).

Soluzione 1.50 - La funzione

$$f(x) = 1 - \frac{2|x|}{\pi}\,, \qquad x \in [-\pi, \pi]\,.$$

come si vede dal garfico, è una funzione pari per cui $b_n = 0$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. Si

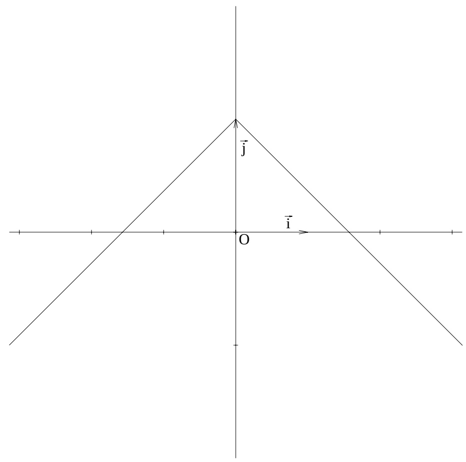

Figura 1.10:

verifica facilmente che anche $a_0 = 0$. Gli altri coefficienti sono dati $(n > 0)$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big[\cos nt - \frac{2}{\pi}|t|\cos nt\Big]dt \\
&= -\frac{2}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}|t|\cos nt\ dt = -\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi} t\cos nt\ dt = \\
&= -\frac{4}{\pi^2}\Big[\frac{t}{n}\operatorname{sen} nt\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{1}{n}\operatorname{sen} nt\ dt\Big] \\
&= -\frac{4}{\pi^2}\Big[-\frac{1}{n}\Big(-\frac{1}{n}\cos nt\Big)\Big]\Big|_0^{\pi} = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ \dfrac{8}{n^2\pi^2} & n \text{ dispari} \end{cases}
\end{aligned}
$$

per cui la serie è data da

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{8}{(2n+1)^2\pi^2}\cos(2n+1)x$$

che converge uniformemente su tutto $\mathbf{R}$ (visto che il prolungamento periodico a tutto $\mathbf{R}$ di f è continuo e C^1 a tratti). La serie converge anche totalmente visto che

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]}\left|\frac{8}{(2n+1)^2\pi^2}\cos(2n+1)x\right| = \frac{8}{(2n+1)^2\pi^2}\,.$$

Per calcolare le due serie (già calcolate negli esercizi 1.48 e 1.49) si può valutare la funzione in $x = 0$ e usare l'uguaglianza (1.1).

Capitolo 2

Funzioni di più variabili, continuità, derivabilità, differenziabilità

ESERCIZIO 2.1 - Disegnare o scrivere gli insiemi di livello (e il grafico) delle seguenti funzioni:

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$
2. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
3. $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left[(x^2 + y^2)\log(1 + x^2 + y^2)\right]$
4. funzioni radiali
5. $f(x,y) = (x - y)^2$
6. $f(x,y) = x^2 - y^2$
7. $f(x,y) = |x| + |y|$
8. $f(x,y) = |x|$
9. $f(x,y) = |x| - |y|$
10. $f(x,y) = \big(|x|^p + |y|^p\big)^{1/p}$ con $p > 1$
11. $f(x,y) = \max\{|x|, |y|\}$

12. $f(x,y) = \dfrac{1+xy}{x^2}$

13. $f(x,y) = e^{x^2+2y^2}$

14. $f(x,y,z) = \log \dfrac{z}{x^2+y^2}$

15. $f(x,y,z) = \operatorname{arctg} \dfrac{x^2+y^2}{(z-1)^2}$

16. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Esercizio 2.2 - Si calcoli, se esiste, il limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x}$.

Esercizio 2.3 - Dire se la seguente funzione è continua su $\mathbf{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \operatorname{sen} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Studiare poi la derivabilità e la differenzibilità.

Esercizio 2.4 - Si dica se il seguente limite esiste o no, ed eventualmente calcolarlo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^4+y^4)}{x^3+xy^2}.$$

Esercizio 2.5 - Calcolare

$$\lim_{|(x,y)|\to+\infty} x^3 y e^{-xy}$$

con $(x,y) \in A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geqslant 0\,, x \leqslant y \leqslant 2x\}$.

Esercizio 2.6 - Si calcoli $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^2 \log x}{(x-1)^2+y^2}$.

Esercizio 2.7 - Esiste il limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$?

Esercizio 2.8 - Discutere l'esistenza del limite $\displaystyle\lim_{|(x,y,z)|\to+\infty} (x^4+y^2+z^2-x+3y-z)$.

Esercizio 2.9 - Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ esiste il seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|y|^\alpha \cos x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Esercizio 2.10 - Studiare continuità, derivabilità, differenziabilità della seguente funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Esercizio 2.11 - Studiare continuità, derivabilità, differenziabilità della seguente funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^4+y^4)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Esercizio 2.12 - Dire per quali valori di α, β, γ reali esiste finito il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{(3x^2+5y^2)^{\gamma/2}}\,.$$

Esercizio 2.13 - Discutere l'esistenza dei seguenti limiti

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x e^{-y/x}\,, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^5}{x^2+y^5}\,.$$

Esercizio 2.14 - Studiare continuità, derivabilità, differenziabilità della seguente funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y^4}{x^6+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Esercizio 2.15 - Si dimostri che non esiste alcuna funzione f di classe $C^2(\mathbf{R}^2)$ tale che

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x \operatorname{sen} y\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = y \cos x\,.$$

Esercizio 2.16 - Studiare continuità, derivabilità, differenziabilità della seguente funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x^2} \operatorname{arctg}(x^2+y^2) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0\,. \end{cases}$$

Esercizio 2.17 - Si dica per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ la seguente funzione è continua, derivabile, differenziabile

$$f(x,y) = \begin{cases} |x|^\alpha \operatorname{sen} y & x \neq 0 \\ 0 & x = 0\,. \end{cases}$$

Esercizio 2.18 - Studiare continuità, derivabilità, differenziabilità della seguente funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^3}{x^4+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Soluzioni

Soluzione 2.1 - Denotiamo con Γ_c, $c \in \mathbf{R}$, l'insieme di livello c, in questo caso l'insieme $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x,y) = c\}$. Dobbiamo risolvere $f(x,y) = c$ con $c \in \mathbf{R}$. È evidente che per $c < 0$ l'insime $\Gamma_c = \emptyset$. Per $c = 0$ Γ_c è fatto da un solo punto $\Gamma_0 = \{(0,0)\}$. Per $c > 0$ si hanno circonferenze di raggio $\sqrt{c}$.

1. In generale per una funzione radiale, cioè che dipende solamente dalla distanza dall'origine, gli insiemi di livello possono essere l'insieme vuoto $\emptyset$, insiemi fatti da un solo punto oppure circonferenze in $\mathbf{R}^2$, sfere in $\mathbf{R}^3$ (ipersfere di codimensione 1 in $\mathbf{R}^n$). Possono essere anche corone circolari o tutto $\mathbf{R}^n$ o unione di più circonferenze. In generale si pensi ad una funzione radiale come ad una funzione radiale $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ definita tramite un'altra funzione $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ nel modo seguente: $g(x_1, \ldots, x_n) = f(\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2})$.

5. $\Gamma_c = \emptyset$ se $c < 0$. Se $c = 0$ dobbiamo capire qual è l'insieme rappresentato da $(x-y)^2 = 0$. È dato dai punti di $\mathbf{R}^2$ che stanno sulla retta di equazione $x = y$. Se invece $c > 0$ si ha

$$(x-y)^2 = c \qquad \Longrightarrow \qquad y = x + \sqrt{c} \quad \text{oppure} \quad y = x - \sqrt{c}$$

quindi l'insieme di livello c con $c > 0$ è dato da coppie di rette

7. Risolvendo $|x| + |y| = c$ si ha per $c < 0$ l'insieme $\emptyset$, per $c = 0$ il solo punto $(0,0)$, per $c > 0$ le curve in Figura 2.1

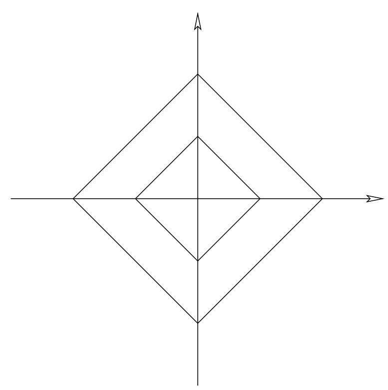

Figura 2.1:

11. Risolvendo $f(x,y) = c$ si ha per $c < 0$ l'insieme $\emptyset$, per $c = 0$ il solo punto $(0,0)$, per $c > 0$ le curve in Figura 2.2

12. Risolviamo
$$\frac{1+xy}{x^2} = c\,.$$

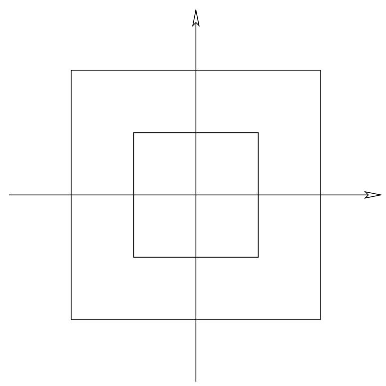

Figura 2.2:

Innanzitutto deve essere $x \neq 0$. Si ottiene (si veda anche Figura 2.3 per alcune curve di livello)

$$y = cx - \frac{1}{x}.$$

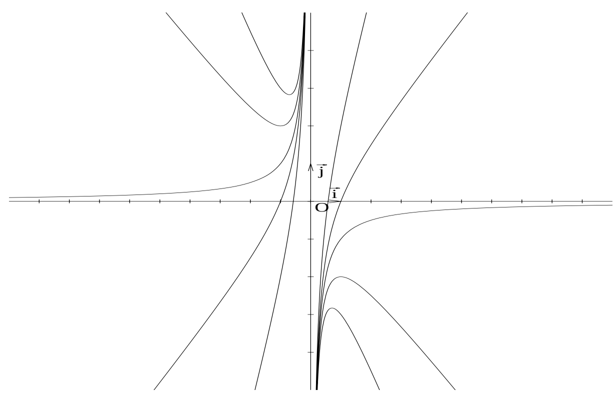

Figura 2.3:

14. Sia $c \in \mathbf{R}$ e poniamo $f(x, y, z) = c$. Ciò è equivalente a

$$\frac{z}{x^2 + y^2} = e^c = k$$

con k costante positiva. Gli insiemi di livello sono quindi paraboloidi di equazione $z = k(x^2 + y^2)$ con k costante positiva.

16. Se $c = 0$ linsieme di livello è fatto dal solo punto $(0, 0)$. Sia quindi $c \neq 0$:

ponendo $2x/(x^2+y^2) = c$ si ottiene

$$y^2 + \left(x - \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{c^2}$$

che, al variare di c in $(0, +\infty)$ e in $(-\infty, 0)$, rappresentano delle circonferenze di raggio c^{-1} con centro nel punto $(c^{-1}, 0)$ come rappresentato in Figura 2.4.

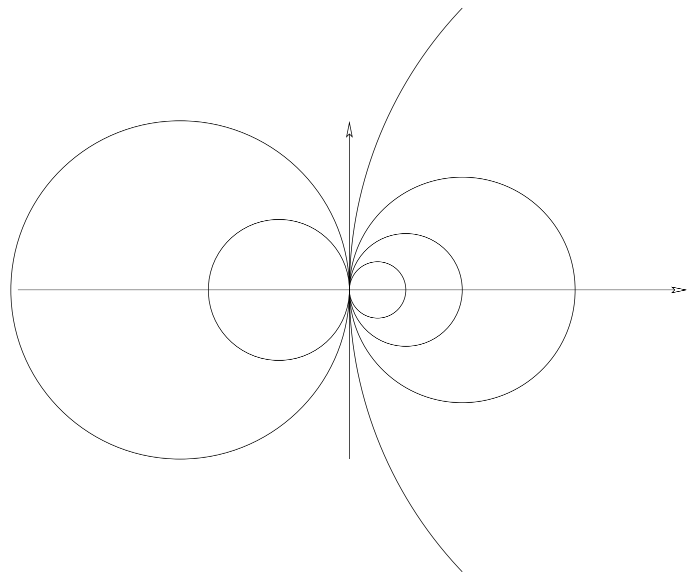

Figura 2.4:

Soluzione 2.2 - Se il limite esistesse in particolare si avrebbe

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{y^2}{x} = \lim_{(y^2,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x}$$

ma il primo limite è uguale a 0, il secondo a 1. Esistono curve lungo le quali il limite è $+\infty$?

Soluzione 2.3 - Ricordo: se una funzione è di classe C^1 sicuramente è differenziabile, ma non è detto che il viceversa sia vero: ecco un esempio in cui ciò non accade.
È chiaramente continua in ogni $(x, y) \neq (0, 0)$. Vediamo se lo è anche in $(0, 0)$. Se il limite esiste si ha

$$0 \leqslant \limsup_{(x,y)\to(0,0)} \left| (x^2+y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leqslant \limsup_{(x,y)\to(0,0)} \left| (x^2+y^2) \right| = 0$$

per cui il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x)$ esiste ed è zero. Poiché $f(0) = 0$ concludiamo che f è continua.
Per studiare la derivabilità e la differenziabilità si osservi prima che la funzione è radiale: possiamo infatti esprimerla come

$$f(x,y) = \varphi(\rho)$$

dove

$$\varphi : [0,+\infty) \to \mathbf{R}\,, \qquad \varphi(\rho) = \begin{cases} 0 & \rho = 0 \\ \rho^2 \operatorname{sen} \rho^{-1} & \rho > 0\,. \end{cases}$$

La funzione φ estesa per simmetria anche a $\rho < 0$ ($\varphi(\rho) = \rho^2 \operatorname{sen} \rho^{-1}$ per $\rho < 0$) è derivabile in $\rho = 0$ (e ovviamente anche per gli altri valori di ρ): infatti il calcolo del limite del rapporto incrementale è

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2 \operatorname{sen} \rho^{-1}}{\rho} = 0\,.$$

Ma se calcoliamo la derivata in un altro punto si ottiene

$$\frac{d}{d\rho}\varphi(\rho) = 2\rho \operatorname{sen} \rho^{-1} - \rho^2 \rho^{-2} \cos \rho^{-1} = 2\rho \operatorname{sen} \rho^{-1} - \cos \rho^{-1}$$

il cui limite per $\rho \to 0$ non esiste. Concludiamo che la derivata esiste, ma non è continua nel punto 0. Questo si traduce per la funzione f nel fatto che f è differenzibile in $(0,0)$, e il suo differenziale in quel punto è l'applicazione nulla, ma le derivate, che esistono, non sono continue nel punto $(0,0)$.

Soluzione 2.4 - Si noti che

$$\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^4 + y^4)}{x^3 + xy^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^4}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^3}{x^3} \operatorname{sen} x = 0$$

mentre

$$\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x^4 + y^4)}{x^3 + xy^2} = +\infty$$

quindi il limite non esiste.

Soluzione 2.5 - In A vale la seguente stima

$$x^2 \leqslant xy \leqslant 2x^2$$

da cui otteniamo

$$e^{-2x^2} \leqslant e^{-xy} \leqslant e^{-x^2} \qquad \text{e} \qquad x^4 \leqslant x^3 y \leqslant 2x^4$$

quindi

$$x^4 e^{-2x^2} \leqslant x^3 y e^{-xy} \leqslant 2x^4 e^{-x^2}\,.$$

Poiché $\lim_{x\to+\infty} x^4e^{-2x^2} = \lim_{x\to+\infty} 2x^4e^{-x^2} = 0$ si conclude che

$$\lim_{|(x,y)|\to+\infty} x^3ye^{-xy} = 0\,.$$

Soluzione 2.6 - Usiamo le coordinate polari: $x-1 = \rho\cos\vartheta$, $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta$. Vale: $(x,y)\to(1,0)$ se e solo se $(x-1,y)\to(0,0)$ se e solo se $\rho\to 0$ indipendentemente da ϑ. Il limite, se esiste, può essere quindi riscritto nelle nuove variabili come segue

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\,\mathrm{sen}^2\vartheta\log(1+\rho\cos\vartheta)}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0}\mathrm{sen}^2\vartheta\log(1+\rho\cos\vartheta) = 0\,.$$

Attenzione! Non sempre l'uso delle coordinate polari è di aiuto nello svolgere i limiti (si veda ad esempio la soluzione dell'esercizio 2.7).

Soluzione 2.7 - Se si passa in coordinate polari si ottiene

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^3\cos^2\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta}{\rho^4\cos^4\vartheta+\rho^2\,\mathrm{sen}^2\vartheta} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho\cos^2\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta}{\rho^2\cos^4\vartheta+\,\mathrm{sen}^2\vartheta}$$

che non esiste!! Se esistesse dovrebbe essere indipendente dal valore di ϑ. Ad esempio

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2y}{x^4+y^2} = 0 \qquad \text{e se } y = x^2 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^2x^2}{x^4+x^4} = \frac{1}{2}\,.$$

Soluzione 2.8 - Si può mostrare che esiste $\alpha > 0$ tale che $x^4 \geqslant x^2-\alpha$ (si veda per esercizio che la disuguaglianza vale con $\alpha = 1/4$. È il valore minore?). Quindi

$$f(x,y,z) = x^4+y^2+z^2-x+3y-z \geqslant x^2-\frac{1}{4}+y^2+z^2-x+3y-z\,.$$

Sia $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Si ha, poiché $-1\leqslant \frac{x}{\rho},\frac{y}{\rho},\frac{z}{\rho}\leqslant 1$,

$$f(x,y,z)\geqslant \rho^2+\rho\Big(-\frac{x}{\rho}+\frac{3y}{\rho}-\frac{z}{\rho}\Big)-\frac{1}{4}\geqslant \rho^2-5\rho-\frac{1}{4}$$

e $|(x,y,z)|\to+\infty$ significa $\rho\to+\infty$ per cui il limite è $+\infty$.

Soluzione 2.9 - Passando alle coordinate polari si ha

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^\alpha|\,\mathrm{sen}\,\vartheta|^\alpha\cos(\rho\cos\vartheta)}{\rho} = \lim_{\rho\to 0}\rho^{\alpha-1}|\,\mathrm{sen}\,\vartheta|^\alpha\Big(1-\frac{1}{2}\rho^2\cos^2\vartheta+o(\rho^3)\Big)$$

che è uguale a 0 se $\alpha > 1$. Per $\alpha\leqslant 1$ il limite non esiste: infatti se si considerano, ad esempio, prima $\vartheta = 0$ e poi $\vartheta = \pi/2$ e poi si esegue il limite per $\rho\to 0$ si ottengono due risultati diversi.

Soluzione 2.10 - Ovviamente l'unico punto in cui fare le verifiche è l'origine in quanto negli altri punti la funzione è differenziabile.
In coordinate polari la funzione diventa (per $\rho \neq 0$)

$$\tilde{f}(\rho, \vartheta) = f(\rho \cos \vartheta, \rho \operatorname{sen} \vartheta) = \frac{\rho^3 \cos^2 \vartheta \operatorname{sen} \vartheta}{\rho^2}$$

e $\lim_{\rho \to 0} \tilde{f}(\rho, \vartheta) = 0$, $f(0,0) = 0$ per cui f risulta continua anche nell'origine.
Vediamo se è derivabile: fissiamo un vettore $v = (v_1, v_2)$ di norma 1 ($v_1^2 + v_2^2 = 1$) e calcoliamo il limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f\big((0,0) + tv\big) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \, \frac{t^2 v_1^2 t v_2}{t^2 v_1^2 + t^2 v_2^2} = v_1^2 v_2 \,,$$

di conseguenza esistono le derivate direzionali in ogni direzione e si ha

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = v_1^2 v_2 \,. \tag{2.1}$$

Vediamo ora se f è differenziabile nel punto $(0,0)$. Se lo è deve esistere un'applicazione *lineare* L, denotata anche con $\mathrm{d}f_{(0,0)}$, tale che

$$\lim_{h \to (0,0)} \frac{f\big((0,0) + h\big) - f(0,0) - \mathrm{d}f_{(0,0)} h}{|h|} = 0 \,;$$

inoltre la differenziabilità implica (si veda Osservazione 3.4 delle dispense di teoria) l'esistenza di tutte le derivate parziali e direzionali e

$$\mathrm{d}f_{(0,0)} v = \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) v_2 \,.$$

Poiché l'applicazione deve essere lineare, e l'applicazione in (2.1) non lo è, si deduce che f non può essere differenziabile.
(Per convincersi si effettui comunque il calcolo del limite

$$\lim_{h \to (0,0)} \frac{f\big((0,0) + h\big) - f(0,0) - \mathrm{d}f_{(0,0)} h}{|h|}$$

sostituendo al differenziale il valore del gradiente moltiplicato scalarmente per un vettore h, sapendo da (2.1) che le derivate parziali sono entrambe nulle).

Soluzione 2.11 - Si ha

$$0 \leqslant f(x,y) \leqslant \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \, \frac{\operatorname{sen}(x^4 + y^4)}{x^4 + y^4} \leqslant \big(x^2 + y^2\big) \frac{\operatorname{sen}(x^4 + y^4)}{x^4 + y^4}$$

visto che $\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = \frac{x^4}{x^2+y^2} + \frac{y^4}{x^2+y^2} \leqslant \frac{x^4}{x^2} + \frac{y^4}{y^2}$. Usando questa disuguaglianza si mostra che f è continua, derivabile, differenziabile (il differenziale è l'applicazione nulla).

Soluzione 2.12 - Risposta: $\alpha + \beta - \gamma > 0$ (suggerimento: usare le coordiante polari).

Soluzione 2.13 - Non esistono.

Soluzione 2.14 - In $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ è continua, derivabile, differenziabile. Per vedere la continuità nell'origine si osservi che

$$x^3 y^2 \leqslant \frac{1}{2}(x^6 + y^4)$$

(abbiamo usato la disuguaglianza $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, $a, b \in \mathbf{R}$: mostrarla per esercizio). Quindi

$$0 \leqslant |f(x,y)| \leqslant \frac{1}{2} y^2 \tag{2.2}$$

e di conseguenza

$$0 \leqslant \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| \leqslant \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2} y^2 = 0\,.$$

Vediamo la derivabilità: sia $t \in \mathbf{R}$ e v vettore di norma 1:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f\big((0,0)+tv\big) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \, \frac{t^7 v_1^3 v_2^4}{t^6 v_1^6 + t^4 v_2^4} = \lim_{t\to 0} \frac{t^6 v_1^3 v_2^4}{t^6 v_1^6 + t^4 v_2^4}\,.$$

Questo limite è zero: si ricordi infatti che $v = (v_1, v_2)$ è fissato. Se $v_2 = 0$ la quantità $t^6 v_1^3 v_2^4$ è identicamente nulla, se $v_2 \neq 0$ il limite è zero. Si può vedere in altro modo sfruttando la stima (3.1)

$$\lim_{t\to 0} \left| \frac{f\big((0,0)+tv\big) - f(0,0)}{t} \right| \leqslant \lim_{t\to 0} \left| \frac{1}{t} \; \frac{t^2 v_2^2}{2} \right| = 0\,.$$

Analogamente si mostra la differenziabilità: poiché le derivate parziali sono nulle l'applicazione lineare candidata a rappresentare il differenziale è l'applicazione nulla. Quindi per verificare che

$$\lim_{h\to(0,0)} \frac{f\big((0,0)+h\big) - f(0,0) - \mathrm{d}f_{(0,0)} h}{|h|} = 0$$

è sufficiente calcolare

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{h_1^3 h_2^4}{h_1^6 + h_2^4} \; \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}\,.$$

Si ha, usando ancora la stima (3.1)

$$\left| \frac{h_1^3 h_2^4}{h_1^6 + h_2^4} \; \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right| \leqslant \frac{1}{2} \; \frac{h_2^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leqslant \frac{1}{2} \; \frac{h_2^2}{\sqrt{h_2^2}} = \frac{1}{2} \; |h_2|$$

e quindi passando al limite per $|h| \to 0$ si conclude.

Soluzione 2.15 - Se esistesse, per il teorema di Schwarz, si avrebbe che $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$, ma è semplice verificare che ciò non è vero.

Capitolo 3

Massimi e minimi di funzioni

Richiami

Ricordiamo i seguenti risultati (si vedano rispettivamente il Teorema 2.39 e Teorema 3.19 delle dispense).

Teorema A Una funzione $f : K \to \mathbf{R}$ continua in K compatto di $\mathbf{R}^n$. ammette sia massimo che minimo.

Teorema B Sia $f : \Omega \to \mathbf{R}$, Ω aperto di $\mathbf{R}^n$, $f \in C^1(\Omega)$. Se $x_0 \in \Omega$ è un punto di minimo o di massimo per f allora $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$ per $i = 1, ...n$.

Esempi

a) Le ipotesi del Teorema A sono ottimali.

   1. K limitato, ma non chiuso, f continua - Ad esempio $f : (0,1) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x$, non ammette né massimo né minimo.
   2. K chiuso, ma non limitato, f continua - Ad esempio $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$, non ammette né massimo né minimo.
   3. f non continua e K compatto - Ad esempio, $f : [-1,1] \to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = x + 1$ per $x \in [-1, 0)$, $f(0) = 0$ mentre $f(x) = x - 1$ per $x \in (0,1]$.

b) Le informazioni che si ottengono da $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ riguardano solo i punti interni, quindi se non si trovano soluzioni a tale sistema di equazioni non significa che non ci siano il massimo e il minimo.

   1. Ad esempio $f : [0,1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x$, ha derivata sempre non nulla all'interno di $[0,1]$ e comunque ammette sia massimo che minimo.

Vediamo schematicamente una traccia di come procedere per trovare i punti di massimo e di minimo per una funzione di più variabili $f : K \to \mathbf{R}$ (in alcune situazioni):

se K è compatto (cioè limitato e chiuso):

1. prima si cercano eventuali candidati all'interno di K risolvendo, dove f è differenziabile, le equazioni
$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0\,, \qquad i = 1, ...n;$$
2. poi si considera il bordo di K, parametrizzandolo (il bordo può avere parti di dimensione $n-1$, $n-2$, ... 0) oppure usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.
Se esistono punti all'interno di K nei quali f non è differenziabile e l'insieme in cui f non è differenziabile è unione di parti di dimensione $n - 1$, $n - 2$, ... 0 queste vanno trattate come si tratta il bordo;
3. si valuta la funzione nei punti trovati (al punto 1. e al punto 2.) e nei punti del bordo di dimensione 0, i "vertici", se questi sono un numero finito, per vedere qual è il massimo e il minimo della funzione; se invece si vuole studiare la natura di ogni singolo punto si può studiare la matrice hessiana nei punti interni se f è sufficientemente regolare.

Se K non è limitato:

4. si procede come ai punti 1., 2., 3. e in più va controllato il comportamento all'infinito (dentro K) della funzione.

Curve di livello:

1. un modo differente per trovare i massimi e minimi è quello di studiare gli insiemi di livello della funzione, cosa che talvolta risulta più semplice e può evitare di fare calcoli inutilmente (si veda, ad esempio, lo svolgimento dell'Esercizio 3.4, ma anche 3.11, 3.12, 3.13).

Osservazione - A volte un problema di massimo o minimo può essere modificato per semplificare i calcoli. Sia $f : A \to \mathbf{R}$ la funzione di cui si vogliono trovare il valore minimo e il valore massimo e siano $x_1 \in A$ punto di minimo, $x_2 \in A$ punto di massimo, cioè
$$f(x_1) \leqslant f(x) \quad \text{e} \quad f(x_2) \geqslant f(x) \quad \text{per ogni } x \in A\,.$$
Se $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è una funzione monotona crescente si avrà
$$g(f(x_1)) \leqslant g(f(x)) \quad \text{e} \quad g(f(x_2)) \geqslant g(f(x)) \quad \text{per ogni } x \in A\,.$$
Quindi il punto di minimo (e non il valore minimo!) di $g \circ f : A \to \mathbf{R}$ è lo stesso della funzione f (idem per il massimo). Di conseguenza il problema può

essere trasformato nel cercare il punto di minimo e il punto di massimo per una funzione $g \circ f$ per un'opportuna g (si vedano ad esempio gli svolgimenti dell'ESERCIZIO 3.4 e dell'ESERCIZIO 3.14).

Suggerimenti - Anche se viene scelta (per motivi didattici) e proposta una soluzione non è detto che questa sia l'unica o la migliore. Consigliamo, quindi, di svolgere in più modi, quando possibile, i vari esercizi.
Un'altra cosa: a volte può essere vantaggioso usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange (si vedano, ad esempio, l'ESERCIZIO 3.24, 3.25, 3.26), ma in generale, se possibile, per trovare gli estremi di una funzione sul bordo di un insieme (o in generale su un vincolo) consigliamo di parametrizzare, abbassando così il numero di parametri invece di aumentarlo.

Massimi e minimi su compatti

ESERCIZIO 3.1 - Trovare i punti di massimo e minimo e i valori massimo e minimo della funzione $f : A \to \mathbf{R}$ dove $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\} \leqslant 1\}$ e $f(x, y) = x^3 - y^2$.

ESERCIZIO 3.2 - Trovare i punti di massimo e minimo e i valori massimo e minimo della funzione $f : A \to \mathbf{R}$ dove $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ e $f(x, y) = x^3 + y^2$.

ESERCIZIO 3.3 - Trovare massimo e minimo di $f(x, y, z) = x+y-z^2$ nell'insieme $C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 \leqslant 0\,,\ z \leqslant 2\}$.

ESERCIZIO 3.4 - Trovare la massima e la minima distanza dall'origine dell'insieme $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + 2y^2 \leqslant 3\,,\ z - y = 1\}$.

ESERCIZIO 3.5 - Si determinino, se esistono, il massimo e il minimo di

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 - y^2}{1 + z^2}$$

nell'insieme (illimitato) $E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

ESERCIZIO 3.6 - Si determinino, se esistono, il massimo e il minimo di

$$f(x, y) = |y - 1|(2 - y - x^2)$$

nell'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant 2 - x^2 - y^2\}$.

ESERCIZIO 3.7 - Si determinino, se esistono, il massimo e il minimo di

$$f(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z^2} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

nell'insieme $E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + 4y^2 + 4z^2 \leqslant 4\,, x \geqslant 0\}$.

Esercizio 3.8 - Si determinino, se esistono, il massimo e il minimo di

$$f(x,y,z) = 2x^2 - y^2 - z^2 - x$$

nell'insieme $E_1 \cup E_2$ dove $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\,, z \leqslant 0\}$, $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2-(z-1)^2 \leqslant 0\,, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$.

Esercizio 3.9 - Si determinino, se esistono, il massimo e il minimo di

$$f(x,y,z) = \frac{1}{1+x^2+(y-1)^2}$$

nell'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{|x|}\}$.

Esercizio 3.10 - Sia $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ una matrice simmetrica a (coefficienti reali). Consideriamo la forma quadratica

$$\langle Ax, y\rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_jy_i\,.$$

Massimizzare e minimizzare la funzione

$$f(x) = \frac{\langle Ax, x\rangle}{|x|^2} = \frac{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_jx_i}{|x|^2}$$

definita per $|x| \neq 0$.

Massimi e minimi su compatti osservando le curve di livello

Esercizio 3.11 - Trovare massimo e minimo della funzione $f(x,y) = (y-x^2)^3$ nell'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x+2 \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2}\}$.

Esercizio 3.12 - Trovare massimo e minimo della funzione $f(x,y) = (x+y)^2$ nell'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 4\}$.

Esercizio 3.13 - Trovare massimo e minimo della funzione $f(x,y) = x^2+2y^2$ nell'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\}$.

Massimi e minimi su illimitati e natura dei punti critici

Per studiare la natura di un punto critico di una funzione (nel caso tale funzione sia di classe C^2) si può studiare la matrice hessiana in quel punto. Poiché il determinante e la traccia della matrice sono invarianti per trasformazioni ortogonali, saranno rispettivamente il prodotto e la somma degli autovalori. Il

segno del determinante e della traccia possono darci informazioni riguardo la natura del punto in questione (si vedano l'ESERCIZIO 3.14, l'ESERCIZIO 3.15, l'ESERCIZIO 3.17).
Ma che succede se il determinante della matrice hessiana è nullo? Come per una funzione di una variabile si potrebbero studiare le derivate di ordine successivo, ma nel caso di funzioni di n variabili si hanno applicazioni k-lineari da $\mathbf{R}^n \times \ldots \times \mathbf{R}^n$ (k volte) in $\mathbf{R}$, dove k è l'ordine di derivazione (il gradiente va da $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}$, la matrice hessiana da $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}$ e così via). Questo rende di fatto impossibile lo studio delle derivate successive. Ci si può aiutare allora con lo studio lungo alcune direzioni per mostrare che un punto è di sella, ma questo funziona solo "in negativo" (si veda l'ESERCIZIO 3.16). In generale si possono trovare gli autovalori, e quindi gli autospazi. Così facendo se un autovalore fosse positivo ed uno negativo (in dimensione maggiore o uguale a tre, visto che siamo nel caso in cui il determinanate è nullo e quindi almeno uno degli autovalori è zero) si conclude che il punto di sella (si veda l'ESERCIZIO 3.19), se invece sono tutti maggiori o uguali a zero (oppure minori o uguali a zero) è sufficiente verificare lungo le direzioni corrispondenti agli autospazi relativi agli autovali nulli (si veda l'ESERCIZIO 3.18).

ESERCIZIO 3.14 - Determinare i punti critici della funzione $f(x,y) = \operatorname{senh}(x^4 + y^3 - 4x^2 - 3y^2)$ all'interno dell'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x|(1+(y-2)^2)-2 < 0\}$, studiarne la natura e stabilire se f ammette massimo e minimo.

ESERCIZIO 3.15 - Determinare i punti critici della funzione $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$ in $\mathbf{R}^2$, studiarne la natura e stabilire se f ammette massimo e minimo in $\mathbf{R}^2$.

ESERCIZIO 3.16 - Studiare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 + 2\,.$$

ESERCIZIO 3.17 - Si consideri la funzione $f(x,y,z) = x^2 + y^4 + y^2 + z^3 - 2xz$. Studiarne i punti critici.

ESERCIZIO 3.18 - Studiare i punti critici della funzione $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy + y^3 - 8x^3 - 6xy^2 + 12yx^2$.

ESERCIZIO 3.19 - Studiare i punti critici della funzione $f(x,y,z) = \frac{3}{4}x^2 + 8y^2 + 7xy + z^4$.

ESERCIZIO 3.20 - Cercare i punti di massimo e minimo di $f(x,y) = xe^{-xy}$ nell'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \leqslant y \leqslant 2x\}$,

ESERCIZIO 3.21 - Trovare, se esistono, i punti di massima e minima distanza dell'insieme $E = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\,, z = 1 - 3xy\}$.

ESERCIZIO 3.22 - Trovare, se esistono, i punti di massimo e minimo di $f(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2$ nell'insieme $E = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x + 4y - 6z + 5 = 0\}$.

ESERCIZIO 3.23 - Trovare, se esistono, i punti di massimo e minimo di

$$f(x,y) = \frac{2x - 2y + 1}{x^2 + y^2 + 1}$$

in $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| \leqslant y \leqslant 1 + |x|\}$.

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

ESERCIZIO 3.24 - Minimizzare la funzione $f(x_1, \ldots x_n) = x_1 + \ldots x_n$ sotto il vincolo $\Pi_{i=1}^n x_i = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$, $x_j > 0$.

ESERCIZIO 3.25 - Massimizzare fra tutti i parallelepipedi di superficie assegnata S il volume.

ESERCIZIO 3.26 - Trovare massimo e minimo di $f(x,y) = xy$ nell'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant x + 2/\sqrt[3]{5}\,, 3x^5 + 5y^3 \leqslant 8\}$,

ESERCIZIO 3.27 - Trovare massimo e minimo, se esistono, di $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^2$ nell'insieme $E = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2yz = 1\}$.

ESERCIZIO 3.28 - Trovare massimo e minimo di $f(x,y,z) = x + 3y - z$ nell'insieme M definito da $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z = 0\,, z = 2x + 4y\}$.

Soluzioni

Soluzione 3.1 - Per il teorema di Weierstrass f ammette sia massimo che minimo. All'interno si ha

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y \end{cases}$$

che ha soluzione solo per $(x,y) = (0,0)$ che è all'interno di A.

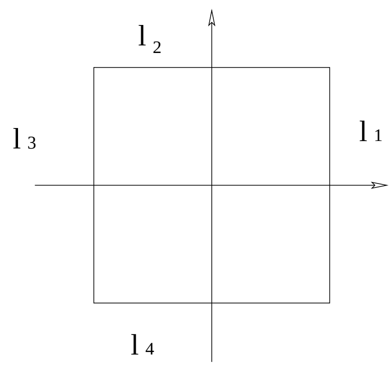

Figura 3.1:

Vediamo il bordo. Prendiamo in considerazione il lato l_1: parametrizziamo con la seguente funzione

$$\varphi : (-1,1) \to \mathbf{R}\,, \qquad \varphi(t) = (1,t)$$

e consideriamo $f \circ \varphi : (-1,1) \to \mathbf{R}$. Si ha

$$\frac{d}{dt}(f \circ \varphi)(t) = \frac{d}{dt} f(\varphi(t)) = \frac{d}{dt} f(1,t) = \frac{d}{dt}(1 - t^2) = -2t = 0$$

per $t = 0$ che corrisponde al punto $(1, \varphi(0)) = (1,0)$. Chiaramente in casi semplici come questo si può considerare direttamente la funzione f ristretta all'insieme l_1 e derivare rispetto a y la funzione $f(1,y) = 1 - y^2$, ma in tal caso si presti molta attenzione! Bisogna sempre ricordare che alla base c'è una parametrizzazione e quindi non si possono sostituire le variabili con leggerezza (si veda un esempio in cui si può cadere in inganno nell'Esercizio 3.5).
Analogamente si parametrizzano gli altri lati e derivando si ottengono i punti $(0,1)$ sul lato l_2, $(-1,0)$ sul lato l_3, $(0,-1)$ sul lato l_4. Abbiamo quindi i seguenti candidati:

$(0,0)$	punto critico interno
$(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)$	punti "critici" di bordo
$(1,1)\,, (-1,1), (-1,-1), (1,-1)$	vertici

A questo punto valutando la funzione f su tutti e nove i punti si trova che il punto di massimo è $(1,0)$ e il valore massimo di f è $f(1,0)=1$, i punti di minimo sono $(-1,1)$ e $(-1,-1)$ e il valore minimo di f è $f(-1,1)=f(-1,-1)=-2$.

Soluzione 3.2 - Come nell'esercizio precedente si ottiene solamente il punto $(0,0)$ stazionario per f. Vediamo il bordo: lo si può parametrizzare con la

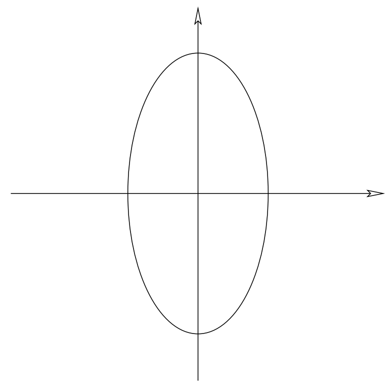

Figura 3.2:

funzione

$$\varphi(t)=\Big(\frac{1}{2}\cos t,\,\operatorname{sen} t\Big)$$

con $t\in[0,2\pi)$ (in questo caso non è importante l'intervallo che si sceglie, si potrebbe considerare un qualunque intervallo $[a,a+2\pi)$, quindi se anche $t=0$ fosse punto critico per $f\circ\varphi$ non va scartato perché cambiando l'intervallo di definizione di φ lo si può forzare ad essere un punto interno!!).
Deriviamo allora $f\circ\varphi(t)=\frac{1}{8}\cos^3 t+\operatorname{sen}^2 t$ e otteniamo

$$\operatorname{sen} t\cos t\Big(2-\frac{3}{8}\cos t\Big)=0$$

che si annulla se $\operatorname{sen} t=0$, $\cos t=0$ oppure $(2-\frac{3}{8}\cos t)=0$. Quest'ultmia non è mai 0 per cui rimangono i valori $t=0$ corrispondente a $(1/2,0)$, $t=\pi/2$ corrispondente a $(0,1)$, $t=\pi$ corrispondente a $(-1/2,0)$, $t=3\pi/2$ corrispondente a $(0,-1)$. Si conlude valutando f in questi quattro punti e nell'origine per ottenere che $(-1/2,0)$ è il punto di minimo ($-1/8$ il valore minimo), $(0,-1)$ e $(0,1)$ i punti di massimo (1 il valore massimo).
Per esercizio studiare il bordo con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Soluzione 3.3 - L'insieme C è quello rappresentato nella Figura 3.3. Il gradiente all'interno non si annulla mai (non si annulla mai da nessuna parte). Vediamo sul bordo. Cominciando parametrizzando la parte di cono descritta da $z^2=x^2+y^2$. Si può considerare una funzione

$$\phi:\Omega_1\to\mathbf{R}^3\,,\qquad \phi(s,t)=(s,t,\sqrt{s^2+t^2})$$

dove $\Omega_1 = \{(s,t) \in \mathbf{R}^2 \mid s^2 + t^2 \leqslant 4, (s,t) \neq (0,0)\}$. Il punto $(0,0)$ non viene considerato perché non è possibile trovare una funzione differenziabile da un aperto di $\mathbf{R}^2$ alla porzione di cono con il vertice del nostro caso. Allora la

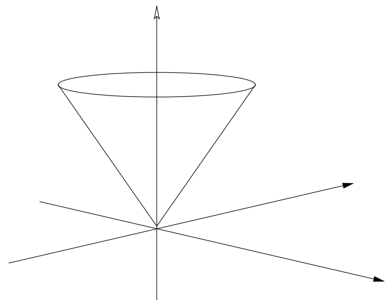

Figura 3.3:

funzione $f(\phi(s,t)) = s + t - s^2 - t^2$ ha derivate parziali

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial s} f(\phi(s,t)) = 1 - 2s \\ \dfrac{\partial}{\partial t} f(\phi(s,t)) = 1 - 2t \end{cases}$$

che si annullano per $(s,t) = (1/2, 1/2)$, punto che corrisponde a $\phi(1/2,1/2) = (1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$. Ora parametrizziamo il cerchio: considero la funzione $\psi : \Omega_2 \to \mathbf{R}^3$, $\psi(s,t) = (s,t,2)$ dove $\Omega_2 = \{(s,t) \in \mathbf{R}^2 \mid s^2 + t^2 \leqslant 4\}$. La funzione $f \circ \psi(s,t) = s+t-4$ non ha mai gradiente nullo. Ora passiamo alla circonferenza rappresentata dall'intersezione di $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ e $z = 2$. La parametrizzo con

$$\varphi(t) = (2\cos t, 2 \operatorname{sen} t, 2)$$

e ottengo che

$$\frac{d}{dt}(f \circ \varphi)(t) = -2 \operatorname{sen} t + 2 \cos t$$

che si annulla quando $\operatorname{sen} t = \cos t$, cioè per $t = \pi/4$ e $t = 5\pi/4$ che corrispondono ai due punti $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$ e $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2)$. Conclusione: testo la funzione nei punti $(1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2)$ e $(0,0,0)$ che è un vertice. Il massimo è $1/2$ assunto nel punto $(1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$, il minimo $-2\sqrt{2} - 4$ assunto nel punto $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2)$.

Soluzione 3.4 - Risolviamo l'esercizio in diversi modi. Prima di tutto trasformiamo il problema: la distanza di un generico punto in $\mathbf{R}^3$ dall'origine è data da

$$d\big((x,y,z),(0,0,0)\big) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,.$$

Chiaramente minimizzare e massimizzare su un compatto questa funzione oppure il suo quadrato, cioè $x^2 + y^2 + z^2$, è equivalente (per convincersi della cosa si

cominci a pensare in dimensione 1 alla funzione $f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ e $g(x) = x^2$). Per cui è più conveniente utilizzare la funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ che è più semplice da derivare e regolare in ogni punto (mentre la funzione distanza sopra non è differenziabile nell'origine). L'insieme D è dato dall'intersezione di un cilindro lungo l'asse z a base ellittica e il piano di equazione $z - x = 1$. Per cui si studia la funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ su D. La funzione f è continua e D è compatto per cui ammette sia massimo che minimo.
Il piano $z - y = 1$ può essere visto come un grafico ($z = y + 1$) e quindi la parametrizzazione più semplice risulta

$$\phi : E \to \mathbf{R}^3, \qquad \phi(u, v) = (u, v, v + 1)$$

dove $E = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid u^2 + 2v^2 \leqslant 3\}$. Definiamo la funzione $\tilde{f}(u, v) = f(\phi(u, v)) = u^2 + v^2 + (v + 1)^2 = u^2 + 2v^2 + 2v + 1$. Annullando le derivate parziali si ottiene

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u} f(\phi(u, v)) = 2u = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial v} f(\phi(u, v)) = 4v + 2 = 0 \end{cases}$$

per cui l'unico punto stazionario è $(0, -1/2)$ che appartiene ad E e che corrisponde al punto $(0, -1/2, 1/2)$ dell'insieme D. Sul bordo parametrizzato con $\vartheta \mapsto (\sqrt{3}\cos\vartheta, \sqrt{3/2}\,\mathrm{sen}\,\vartheta)$ la funzione diventa

$$3\cos^2\vartheta + 3\,\mathrm{sen}^2\vartheta + 2\sqrt{\frac{3}{2}}\,\mathrm{sen}\,\vartheta + 1$$

la cui derivata si annulla per $\cos\vartheta = 0$, cioè per $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, $\vartheta = \frac{3\pi}{2}$ che corrispondono ai punti $(0, \sqrt{3/2})$ e $(0, -\sqrt{3/2})$ dell'insieme E e ai punti $(0, \sqrt{3/2}, \sqrt{3/2} + 1)$, $(0, -\sqrt{3/2}, 1 - \sqrt{3/2})$ dell'insieme D. Valutando la funzione nei tre punti ottenuti si ha

$$\begin{aligned} &\tilde{f}(0, -1/2) = \frac{1}{2}, \\ &\tilde{f}(0, \sqrt{3/2}) = 4 + 2\sqrt{\frac{3}{2}}, \\ &\tilde{f}(0, -\sqrt{3/2}) = 4 - 2\sqrt{\frac{3}{2}} = 4 - \sqrt{6} > \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

per cui il punto $(0, -1/2, 1/2)$ di D, che corrisponde a $(0, -1/2)$ di E, è il punto di minima distanza dall'origine, il punto $(0, \sqrt{3/2}, \sqrt{3/2} + 1)$ di D, che corrisponde a $(0, \sqrt{3/2})$ di E, è il punto di massima distanza dall'origine.
Si sarebbe potuto studiare il punto interno valutando la matrice hessiana:

$$H_{\tilde{f}}(u, v) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

che è definita positiva, per cui $(0, -1/2)$ è di minimo (locale, ma a posteriori anche assoluto).

Vediamo studiando le curve di livello di $\tilde f$ come si può risolvere il problema. La quantità

$$u^2 + 2v^2 + 2v + 1$$

può essere riscritta

$$u^2 + 2\Big(v + \frac{1}{2}\Big)^2 + \frac{1}{2}$$

per cui risolvere $\tilde f(u,v) = c$ con $c \in \mathbf{R}$, cioè trovare l'insieme di livello c della funzione $\tilde f$, è equivalente a risolvere

$$u^2 + 2\Big(v + \frac{1}{2}\Big)^2 + \frac{1}{2} = c\,, \qquad\qquad c \geqslant \frac{1}{2}$$

che sono ellissi, come le curve tratteggiate in Figura 3.4 (l'ellisse in neretto rappresenta il bordo di E). Per $c < 1/2$ l'insieme di livello c è l'insieme vuoto.

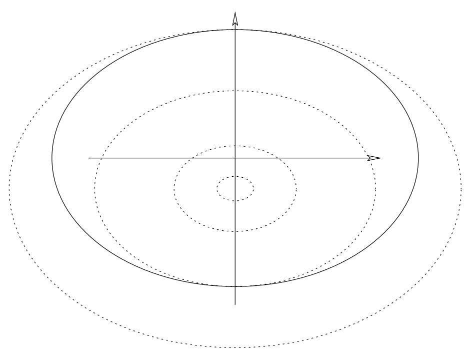

Figura 3.4:

Soluzione 3.5 - L'insieme in questione è un cilindro infinito, in particolare non è compatto, quindi non è detto che il minimo e il massimo esistano. Le tre derivate parziali poste uguali a zero

$$\begin{cases} \dfrac{2x}{1+z^2} = 0 \\ \dfrac{2y}{1+z^2} = 0 \\ (x^2 - y^2)\dfrac{2z}{(1+z^2)^2} = 0 \end{cases}$$

che forniscono solo il punto $(0,0,0)$ interno ad E. All'infinito (per $|z| \to +\infty$) la funzione tende a 0, ma è facile vedere che la funzione assume sia valori positivi che negativi. Vediamo sul bordo: dobbiamo parametrizzare la superficie $\partial E = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

!!! Si può essere tentati dall'inserire nell'espressione di f la quantità $1-x^2$ al posto di y^2 e considerare così

$$\tilde{f}(x,z) = \frac{2x^2-1}{1+z^2}\,.$$

Questo corrisponde a considerare le due parametrizzazioni

$$\begin{aligned} &\psi_1 : [-1,1]\times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3\,, \qquad && \psi_1(x,z) = (x, \sqrt{1-x^2}, z) \\ &\psi_2 : [-1,1]\times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3\,, \qquad && \psi_2(x,z) = (x, -\sqrt{1-x^2}, z) \end{aligned}$$

Annullando le derivate di $\tilde{f}$ si ottengono le soluzioni $x=0$ e $z=0$ che corrispondono ai due punti $(0,1,0)$ e $(0,-1,0)$ (che risultano i punti di massimo per la funzione f). A questo punto però vanno anche considerati gli estremi -1 e 1 del dominio di ψ_1 e ψ_2 che corrispondono ai punti

$$(1,0,0) \quad \text{e} \qquad (-1,0,0)$$

nei quali va valutata poi f. Se si considera la quantità $1-y^2$ al posto di x^2 si stanno considerando le due parametrizzazioni

$$\begin{aligned} &\eta_1 : [-1,1]\times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3\,, \qquad && \eta_1(y,z) = (\sqrt{1-y^2}, y, z) \\ &\eta_2 : [-1,1]\times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3\,, \qquad && \eta_2(y,z) = (-\sqrt{1-y^2}, y, z) \end{aligned}$$

si considera $\hat{f}(y,z) = \frac{1-2y^2}{1+z^2}$ e annullando le derivate si trovano i due punti $(1,0,0)$ e $(-1,0,0)$ ai quali vanno aggiunti i punti corrispondenti agli estremi $\eta_1(-1) = \eta_2(-1) = (0,-1,0)$ e $\eta_1(1) = \eta_2(1) = (0,1,0)$.
Se parametrizziamo la superficie con

$$\varphi(\vartheta, z) = (\cos\vartheta,\, \operatorname{sen}\vartheta, z)$$

e consideriamo

$$f(\varphi(\vartheta,z)) = \frac{\cos^2\vartheta - \operatorname{sen}^2\vartheta}{1+z^2}$$

derivando si ottengono

$$\begin{cases} \dfrac{4\cos\vartheta\operatorname{sen}\vartheta}{1+z^2} = 0 \\ \dfrac{(\cos^2\vartheta - \operatorname{sen}^2\vartheta)2z}{1+z^2} = 0 \end{cases}$$

per cui si hanno le soluzioni $\operatorname{sen}\vartheta = 0$ o $\cos\vartheta = 0$ e $z=0$, che corrispondono ai punti quattro $(0,1,0)$, $(0,-1,0)$, $(1,0,0)$ e $(-1,0,0)$, due di massimo, due di minimo.
Perché in questo modo abbiamo trovato quattro punti, mentre per $\tilde{f}$ e $\hat{f}$ solamente due?

Soluzione 3.9 - L'insieme E, in Figura 3.5, non è compatto, quindi l'esistenza del massimo e del minimo non è garantita. Annullando le derivate si ottiene il punto critico $(0,1)$. Si vede facilmente che

$$f(x,y) \leqslant f(0,1) \qquad \text{per ogni } (x,y) \in \mathbf{R}^2 \tag{3.1}$$

(studiare l'hessiana per esercizio).
All'infinito: poiché $y \leqslant 1/|x|$ si ha che $(y-1)^2 \leqslant (1/|x|-1)^2$ quindi

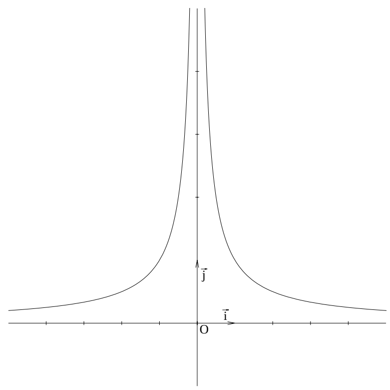

Figura 3.5:

$$\frac{1}{1+x^2+(\frac{1}{|x|}-1)^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2+(y-1)^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Se si considera quindi il limite per $|(x,y)| \to +\infty$ in E si hanno due possibilità: o $|x| \to +\infty$ (e $y \to 0$) oppure $y \to +\infty$ (e in questo caso $|x| \to 0$). Nel primo dei due casi dalla stima di sopra si ottiene che $f(x,y) \to 0$. Nel secondo caso possiamo stimare la f come segue, visto che $|x| \leqslant 1/y$:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{y^2}+(\frac{1}{|x|}-1)^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2+(y-1)^2} \leqslant \frac{1}{1+(y-1)^2}\,.$$

Conlcusione:

$$\lim_{\substack{|(x,y)| \to +\infty \\ (x,y) \in E}} f(x,y) = 0$$

(in realtà $\lim_{|(x,y)|\to+\infty} f(x,y) = 0$! mostrarlo per esercizio). Poiché f è sempre positiva, il limite all'infinito è zero e inoltre dalla stima (3.1) si conclude che la funzione ha un punto di massimo assoluto in $(0,1)$ e non ha minimo.

Soluzione 3.10 - Derivando la funzione f rispetto a x_k si ha:

$$\tfrac{\partial}{\partial x_k} \textstyle\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_jx_i = 2\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j$$

$$\tfrac{\partial}{\partial x_k}(x_1^2 + \ldots + x_n^2) = 2x_k$$

quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{2|x|^2 \sum_{j=1}^n a_{kj}x_j - 2x_k\langle Ax, x\rangle}{|x|^4} = \frac{2\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j - 2x_k f(x)}{|x|^2}$$

per ogni $k = 1, \ldots n$. Di conseguenza, anullando le derivate, si ha

$$\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j - x_k f(x) = 0 \qquad \text{per ogni } k = 1, \ldots n$$

e ciò è equivalente a dire che

$$Ax = f(x)x$$

cioè x è un autovettore e $f(x)$ è un autovalore. Senza bisogno di trovare le soluzioni x sicuramente $f(x)$ è un autovalore, quindi il minimo valore assunto da f è il minimo autovalore di A e il massimo valore assunto da f è il massimo autovalore di A.

Volendo risolvere il problema con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si osservi innanzitutto che la funzione f può essere ridefinita sulla ipersfera in $\mathbf{R}^n$

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| = 1\}$$

dato che

$$f(x) = \frac{\langle Ax, x\rangle}{|x|^2} = \left\langle A\frac{x}{|x|}, \frac{x}{|x|}\right\rangle$$

e quindi

$$f(\alpha x) = f(x) \qquad \text{per ogni } \alpha \neq 0\,.$$

Per cui ci si può limitare a considerare

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_jx_i$$

definita in S^{n-1}. Si consideri la funzione

$$H(x, \lambda) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_jx_i + \lambda(x_1^2 + \ldots + x_n^2 - 1)$$

visto che cerchiamo i punti stazionari in S^{n-1} e $|x| = 1$ se e solo se $|x|^2 = 1$. Le derivate forniscono (la matrice è simmetrica)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial x_k} = 2\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j + 2\lambda x_k = 0 \qquad k = 1, \ldots n \\ \dfrac{\partial H}{\partial \lambda} = x_1^2 + \ldots + x_n^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Dalle prime n equazioni si ricava che

$$A \cdot x + \lambda x = 0$$

il che significa che x deve essere un autovettore (e λ un autovalore). I punti stazionari di H in $\mathbf{R}^{n+1}$ sono quindi tutte le $(n+1)$-uple (x, λ) con x autovettore di norma 1 e λ autovalore di A.
Si osservi come dalle equazioni sopra si ricava

$$x_k(a_{kk} + \lambda) + \sum_{\substack{j\,=\,1 \\ j\,\neq\,k}}^{n} a_{kj}x_j = 0$$

che nel caso in cui A sia diagonale fornisce subito il fatto che gli autovalori sono gli elementi della diagonale e gli autovettori sono del tipo $(0, \ldots 0, 1, 0 \ldots 0)$.

Soluzione 3.11 - L'insieme E è quello in Figura 3.6, quelle tratteggiate sono curve di livello (parabole). Risolveremo il problema senza fare calcoli, ma osser-

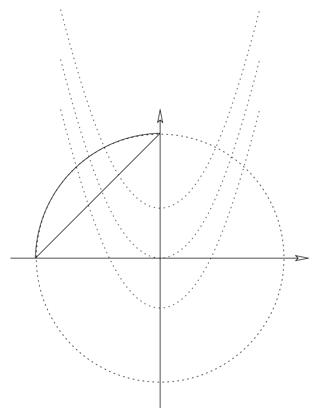

Figura 3.6:

vando gli insiemi di livello della funzione (svolgere per esercizio i calcoli, anche per confronto, studiando il gardiente, la matrice hessiana e studiando sul bordo il comportamento della funzione come di solito).
Fissiamo $c \in \mathbf{R}$ e vediamo dove $f(x, y) = c$: la risposta è l'insieme Γ_c rappresentato dall'intersezione di E con la parabola di equazione (si veda anche la Figura 3.6)

$$y = x^2 + \sqrt[3]{c}$$

Chiaramente il valore massimo (rispettivamente il minimo) che assume f è il massimo c (rispettivamente il minimo c) per cui Γ_c non è vuoto (cioè il massimo c per cui la parabola $y = x^2 + \sqrt[3]{c}$ interseca l'insieme E). Concludendo: il minimo sarà assunto nel vertice di E dato dal punto $(-2, 0)$ e il massimo nel vertice di E dato dal punto $(0, 2)$.

Per calcolare i valori basta valutare la funzione in questi due punti o trovare i valori di c per cui le parabole passano per questi punti (farlo per esercizio!!). Per concludere i valori minimo e massimo sono rispettivamente -64 e 8.

Soluzione 3.12 - La funzione è continua su un compatto, quindi sicuramente ammette massimo e minimo. L'insieme su cui è definita f e tre suoi insiemi di livello sono disegnati in Figura 3.7 (le linee tratteggiate allo stesso modo fatto parte dello stesso insieme di livello). Si fissi $c \in \mathbf{R}$ e si denoti con

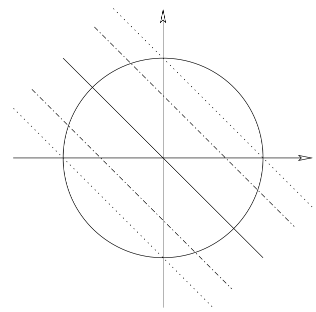

Figura 3.7:

$\Gamma_c = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x,y) = c\}$. Chiaramente per $c < 0$ l'insieme Γ_c è il vuoto, per $c = 0$ si ha che $\Gamma_c = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = -x\}$, per $c > 0$ $\Gamma_c = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = -x + \sqrt{c}\} \cup \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = -x - \sqrt{c}\}$. Per cui il minimo di f è 0 assunto in tutto l'insieme $\Gamma_0 \cap E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = -x, [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]\}$, il massimo è assunto dove l'insieme di livello interseca E sul bordo e precisamente nei punti $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ (trovare le equazioni dell rette!). Il valore massimo è $f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 8$.

Soluzione 3.13 - L'insieme E è una corona circolare e gli insiemi di livello sono delle ellissi (si veda Figura 3.8), come si può facilmente ricavare ponendo

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 = c\,, \qquad c \geqslant 0\,.$$

Minore è il valore c e minori sono i semiassi dell'ellisse, l'insieme sul quale la funzione assume il valore costante c. Per cui i punti di minimo sono $(-1,0)$ e $(1,0)$ dove l'ellisse descritta da $x^2 + 2y^2 = 1$ interseca la parte di bordo di E data dal cerchio di raggio 1 (quindi il valore minimo è 1), i punti di massimo sono $(0,2)$ e $(0,-2)$ dove l'ellisse descritta da $x^2 + 2y^2 = 8$ interseca la parte di bordo di E data dal cerchio di raggio 2 (quindi il valore minimo è 8).

Soluzione 3.14 - La funzione $\operatorname{senh} t = (e^t - e^{-t})/2$ è strettamente crescente per cui i punti critici, e la loro natura, sono gli stessi per la funzione

$$g(x,y) = x^4 + y^3 - 4x^2 - 3y^2\,.$$

Attenzione: a questo punto è possibile studiare la funzione g anziché f perché $\operatorname{senh} t$ è *strettamente* crescente e quindi la sua derivata è sempre diversa da

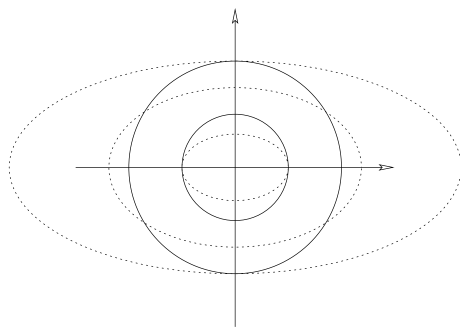

Figura 3.8:

zero, se fosse solamente crescente (non decrescente) ciò non sarebbe possibile. Un'altra cosa: se si avesse una funzione strettamente decrescente il ragionamento può essere applicato comunque, con l'attenzione che la natura dei punti viene mutata, un punto di massimo per g sarebbe un minimo per f e viceversa.
Vediamo ora di capire com'è fatto l'insieme E. La disequazione $|x|(1+(y-2)^2)-2<0$ è equivalente a

$$|x| < \frac{2}{1+(y-2)^2}\,,$$

per cui l'insieme E è un insieme illimitato come quello in Figura 3.9. Per ricavarlo si noti che la diseguaglianza denota la parte interna alle due curve di equazione $x = \frac{2}{1+(y-2)^2}$ e $x = -\frac{2}{1+(y-2)^2}$.
Veniamo ai conti: posto il gradiente di g uguale a $(0,0)$ si trovano i punti $(0,0), (0,2), (\sqrt{2},0), (\sqrt{2},2), (-\sqrt{2},0), (-\sqrt{2},2)$. Attenzione: i punti $(-\sqrt{2},0)$ e $(\sqrt{2},0)$ non appartengono ad E, per cui non ci interessano.
Calcolando le derivate seconde si ottiene che la matrice hessiana è

$$H_g(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2-8 & 0 \\ 0 & 6y-6 \end{pmatrix}$$

Questo è il caso più fortunato: la matrice è diagonale per cui conosciamo già gli autovalori il cui segno ci fornisce le informazioni sulla natura dei punti:

$$H_g(0,0) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \qquad \text{punto di massimo locale}$$

$$H_g(0,2) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{punto di sella}$$

$$H_g(\pm\sqrt{2},0) = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \qquad \text{punti di sella}$$

$$H_g(\pm\sqrt{2},2) = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{punti di minimo locale}$$

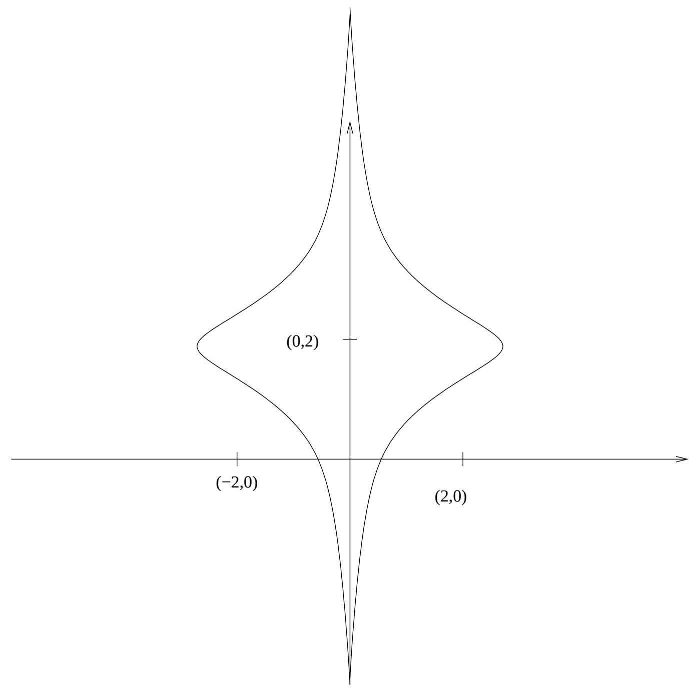

Figura 3.9:

La funzione f ammette massimo e minimo su $\mathbf{R}^2$? (assoluti). NO! Infatti

$$\lim_{|x|\to+\infty} g(x,0) = +\infty\,, \qquad\qquad \lim_{y\to-\infty} g(0,y) = -\infty\,,$$

per cui poiché il seno iperbolico va a $-\infty$ a $-\infty$ e a $+\infty$ a $+\infty$ anche f risulta illimitata sia dal basso che dall'alto.

Soluzione 3.15 - Annullando il gradiente si arriva alle equazioni

$$\begin{cases} x^3 = y \\ y^3 = x \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x^9 = x \\ y^3 = x \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x(x^8-1) = 0 \\ y^3 = x \end{cases}$$

per cui le soluzioni sono $(0,0), (1,1), (-1,-1)$. La matrice hessiana è

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo il punto $(0,0)$:

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Valutiamo il segno degli autovalori: anche se Δ_1, il determinante del minore principale 1×1 (di fatto il termine $[H_f(0,0)]_{11}$ della matrice) è nullo, si ha che $\Delta_2 = -16$ è anche il determinante della matrice nonché il prodotto degli autovalori: ne deduciamo che necessariamente uno è positivo e l'altro negativo per cui $(0,0)$ è di sella.
Per quanto riguarda il punto $(1,1)$ si ha che

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}.$$

che si può verificare essere definita positiva, per cui $(1,1)$ è di minimo locale. Si può calcolare anche il determinante che è positivo, da cui si deduce che il prodotto dei due autovalori è positivo $(144-16)$, per cui si potrebbero avere due autovalori positivi o due negativi. Ma un altro invariante è la traccia, la somma degli elementi sulla diagonale, che è anche la somma degli autovalori. La traccia è 24 per cui se la somma degli autovalori è positiva deduciamo che il segno dei due autovalori non può essere altro che positivo. Lo stesso vale per il punto $(-1,-1)$.
Per concludere si vede che

$$\lim_{|(x,y)|\to+\infty} f(x,y) = +\infty$$

per cui la funzione non ammette massimo e ammette due punti di minimo assoluto.

Soluzione 3.16 - Anullando il gradiente si ottiene

$$\begin{cases} 4x^3 - 4(x-y) = 0 \\ 4y^3 + 4(x-y) = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 4x^3 + 4y^3 = 0 \\ 4y^3 + 4(x-y) = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava che $x = -y$ e quindi dalla seconda $4y(y^2-2) = 0$. Per cui le soluzioni sono $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. La matrice hessiana è

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}.$$

Si ha che

$$H_f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = H_f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}.$$

che è definita positiva, per cui i due punti sono di minimo locale, ma

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

ha determinante 0 e quindi almeno uno dei due autovalori è 0 (la traccia in questo caso non aiuta). Come fare per stabilire la natura del punto $(0,0)$? Un modo possibile è studiare il segno di f per capire se il punto in questione è di sella: si osservi che

$$f(x,x) = 2x^4 + 2$$

e quindi $(0,0)$ risulta di minimo per f ristretta alla retta $x=y$, mentre risulta di massimo per f ristretta alla retta $x=-y$. Infatti

$$f(x,-x) = 2x^4 - 8x^2 - 2$$

che ha un massimo in $x=0$ ($\frac{d}{dx}(2x^4-8x^2-2)|_{x=0} = 0$, $\frac{d^2}{dx^2}(2x^4-8x^2-2)|_{x=0} = -8$). Si conclude che $(0,0)$ è un punto di sella per f.

Soluzione 3.17 - Al solito si calcolino le derivate parziali e le si annullino. Si ottiene

$$\begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ 4y^3 + 2y = 0 \\ 3z^2 - 2x \end{cases}$$

da cui si ottengono i punti $(0,0,0)$ e $(2/3,0,2/3)$. La matrice hessiana è data da

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 12y^2+2 & 0 \\ -2 & 0 & 6z \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$H_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Valutando i determinanti dei minori pricipali: $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 4$, $\Delta_3 = -8$. La matrice non è definita positiva e il prodotto degli autovalori (Δ_3) è negativo: gli autovalori potrebbero essere tutti negativi oppure due positivi e uno negativo. Ma $\Delta_1 > 0$ e $\Delta_2 > 0$, per cui due autovalori sono positivi (un altro invariante è la *traccia* della matrice, ossia la somma degli elementi sulla diagonale che corrisponde alla somma degli autovalori: poiché la somma è 4 anche da ciò si può dedurre che i tre autovalori non possono essere tutti negativi). Conclusione: $(0,0,0)$ non è né di massimo, né di minimo.

$$H_f(2/3,0,2/3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 22/3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

i cui minori hanno determinanti $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 44/3$, $\Delta_3 = 88/3$, per cui il punto $(2/3,0,2/3)$ è di minimo locale.

Soluzione 3.18 - Le derivate prime di f sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -24x^2 + 24xy + 2x - 2y - 6y^2\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 2y - 2x + 3y^2 - 12xy + 12x^2$$

che si annullano in $(0,0)$, unico punto critico. Studiamo le derivate seconde. La matrice hessiana in $(0,0)$ è

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

che ha determinante nullo: almeno uno dei due autovalori è nullo. In realtà solo uno visto che la traccia è positiva, ma questo non ci aiuta a capire la natura del punto. Gli autovalori dovrebbero essere 0 e 4 dato che il determinante è 0 e la traccia 4, ma in dimensione più alta non è possibile determinare gli autovalori in questo modo (se conosco la somma e il prodotto di n numeri posso determinare gli n numeri solo se $n = 2$). Calcoliamo allora il polinomio caratteristico e le sue radici:

$$P(\lambda) = (2 - \lambda)(2 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 4\lambda\,.$$

Le radici effettivamente sono 0 e 4. Gli autospazi: relativamente a $\lambda = 0$ si ha

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che fornisce la retta $y = x$. L'altro non è importante calcolarlo, l'autovalore è positivo e la funzione ristretta all'autospazio relativo all'autovalore 4 sarà convessa (farlo per esercizio!). Bisogna capire che succede restringendo la funzione alla retta $y = x$: valutiamo

$$f(x, x) = -x^3$$

che non è convessa, per cui il punto $(0, 0)$ non è di minimo. Se la funzione fosse più complicata si studia derivando per $x = 0$ la funzione $f(x, x)$ (farlo per esercizio: la derivata prima è zero, la seconda pure, la terza finalmente è -6 il che implica che $x = 0$ è un flesso).

Soluzione 3.19 - Derivando f si ottiene che l'unico punto critico è $(0, 0, 0)$. La matrice hessiana in quel punto è data da

$$H_f(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 3/2 & 7 & 0 \\ 7 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

che ha determinante nullo, per cui almeno uno degli autovalori è nullo, e traccia positiva, per cui non conosciamo il segno degli due autovalori (potrebbero essere tutti e due positivi oppure uno positivo e l'altro nullo, non entrambi negativi). Il polinomio caratteristico è dato da

$$P(\lambda) = \lambda\big[(3/2 - \lambda)(16 - \lambda) - 49\big]$$

che si annulla per $\lambda = 0$ e per le soluzioni di $(3/2 - \lambda)(16 - \lambda) - 49 = 0$. Risolvendo si ottengono due soluzioni, una positiva e una negativa (si osservi come tutte le entrate della matrice siano positive anche se un autovalore è negativo). Concludiamo che lungo una direzione la funzione è concava, ungo un'altra è convessa e non c'è bisogno di verificare lungo l'autospazio relativo all'autovalore nullo il comportamento della funzione.

Soluzione 3.20 - L'insieme E è illimitato (quello tratteggiato in Figura 3.10) e le derivate parziali non si annullano mai contemporaneamente su E. Infatti

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = e^{-xy}(1-xy) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -x^2 e^{-xy} \end{cases}$$

e la derivata rispetto a y non è mai zero all'interno di E! Vediamo sul bordo:

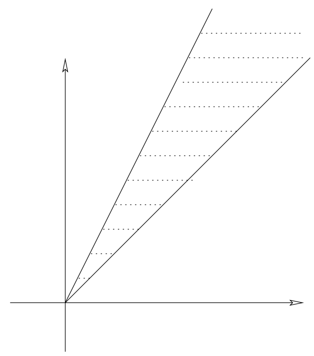

Figura 3.10:

parametrizzando il bordo con le curve $t \mapsto (t,t)$ e $t \mapsto (t,2t)$ con $t \in (0,+\infty)$ si ottiene prima

$$\frac{d}{dt} f(t,t) = \frac{d}{dt} te^{-t^2} = e^{-t^2}(1-2t^2)$$

che si annulla per $t = 1/\sqrt{2}$ che corrisponde al punto $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, poi

$$\frac{d}{dt} f(t,2t) = \frac{d}{dt} te^{-2t^2} = e^{-t^2}(1-4t^2)$$

che si annulla per $t = 1/2$, che corrisponde al punto $(1/2, 1)$. Vediamo all'infinito: poiché in E

$$x^2 \leqslant xy \leqslant 4x^2 \Rightarrow -4x^2 \leqslant -xy \leqslant -x^2$$

si ha che

$$xe^{-4x^2} \leqslant f(x,y) \leqslant xe^{-x^2}$$

per cui

$$\lim_{\substack{|(x,y)| \to +\infty \\ (x,y) \in E}} f(x,y) = 0\,.$$

Esaminiamo i candidati, i due punti trovati e il vertice:

$$\begin{aligned} &f(0,0) = 0\,, && \text{minimo} \\ &f(1/2,1) = \tfrac{1}{2}e^{-1/2}\,, && \text{massimo} \\ &f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}\,. && \end{aligned}$$

Soluzione 3.21 - I punti $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ sono di minima distanza, $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ e $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ di massima.

Soluzione 3.22 - Traccia - Il vincolo può essere visto come grafico per cui una delle parametrizzazioni possibili e più semplici è

$$(u,v) \mapsto \Big(u, v, \frac{1}{6}(2u + 4v + 5)\Big)$$

(ma anche $(u,v) \mapsto (\frac{1}{2}(6v - 4u - 5), u, v)$ e $(u,v) \mapsto (u, \frac{1}{4}(6v - 2u - 5), v)$ vanno bene). Ci si riduce così ad una funzione di due variabili

$$f\big(u, v, \frac{1}{6}(2u + 4v + 5)\big) .$$

Soluzione 3.24 - Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange consideriamo la funzione

$$H(x_1, \dots x_n, \lambda) = x_1 + \ldots + x_n + \lambda(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n - 1) .$$

La derivata parziale rispetto a x_j di H è $1 - \lambda x_1 \ldots x_{j-1} \cdot x_{j+1} \ldots x_n = 1 - \lambda \frac{x_1 \ldots x_{j-1} x_j x_{j+1} \ldots x_n}{x_j}$, quindi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial x_j} = 1 - \lambda \, \dfrac{x_1 \ldots x_{j-1} x_j x_{j+1} \ldots x_n}{x_j} = 1 - \dfrac{\lambda}{x_j} = 0 \,, \qquad j = 1, \ldots n \\ x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = 1 \end{cases}$$

da cui si deduce che $\lambda = x_j$ per $j = 1, \ldots n$. Si noti che non è necessario risolvere il sistema per concludere perché il valore di λ non è indispensabile. Per cui si deduce che la soluzione (l'unica) del sistema è tale che $x_1 = x_2 = \ldots x_n$ (che sarà uguale anche al valore di λ, ma non è importante). Se tutti i valori devono essere uguali e il loro prodotto è 1 si ha necessariamente

$$x_j = 1 \qquad \text{per ogni } j \in \{1, \ldots n\} .$$

Per vedere che questo è un punto di minimo per la somma usiamo l'induzione: mostriamo che $x_1 + \ldots x_n \geqslant n$ ogni volta che $\Pi_{i=1}^n x_i = 1$.
Se $n = 2$: dobbiamo vedere che $x_1 + x_2 \geqslant 2$ sapendo che $x_1 x_2 = 1$. Per esercizio mostrare (derivando) che la funzione, definita per $x_1 > 0$, soddisfa

$$f(x_1) = x_1 + \frac{1}{x_1} \geqslant 2 .$$

Supponiamo quindi che l'affermazione sia vera per n e mostriamola per $n+1$. Siano quindi x_j, $j = 1, \ldots n+1$, $n+1$ numeri tali che $x_1 \cdot \ldots x_{n+1} = 1$. È chiaro che se questi numeri non sono tutti uguali a 1 (e avremmo concluso) ne esiste uno minore di uno e uno maggiore. Diciamo che siano $x_n < 1$, $x_{n+1} > 1$. Chiamando $y = x_n x_{n+1}$ si hanno n numeri $x_1, \ldots, x_{n-1}, y$ il cui prodotto è 1 e quindi, per l'ipotesi induttiva, sappiamo che

$$x_1 + \ldots + x_{n-1} + y = x_1 + \ldots + x_{n-1} + x_n \cdot x_{n+1} \geqslant n\,.$$

Vogliamo però mostrare che questa somma è maggiore o uguale a $n+1$:

$$\begin{aligned}
x_1 + \ldots + x_{n+1} &= (x_1 + \ldots + x_{n-1} + x_n x_{n+1}) + x_n + x_{n+1} - x_n x_{n+1} \\
&\geqslant n + x_n + x_{n+1} - x_n x_{n+1} = \\
&= n + x_{n+1}(1 - x_n) + x_n = \\
&= n + 1 + x_{n+1}(1 - x_n) + x_n - 1 = \\
&= n + 1 + (x_{n+1} - 1)(1 - x_n) \geqslant n + 1
\end{aligned}$$

perché stiamo assumendo $x_{n+1} - 1 > 0$ e $1 - x_n > 0$.
Conseguenza interessante: da questo fatto si può mostrare che la media geometrica è minore o uguale della media aritmetica ($a_j > 0$)

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqslant \frac{a_1 + \ldots a_n}{n} \tag{3.2}$$

Infatti è sufficiente considerare le quantità

$$x_j := \frac{a_j}{\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}}$$

il cui prodotto è 1, per cui per quanto mostrato si ha $\sum_{j=1}^{n} x_j \geqslant n$, cioè

$$\frac{a_1 + \ldots a_n}{\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}} \geqslant n\,.$$

Soluzione 3.25 - Il volume è dato dal prodotto delle lunghezze dei tre lati. Indicando con x, y, z le tre lunghezze la funzione da massimizzare è allora $f(x, y, z) = xyz$. La superficie di ogni singola faccia è il prodotto delle lunghezze dei due lati che la determinano, per cui il vincolo è $2(xy + xz + yz) = S$. Uso il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: si consideri la funzione $H(x, y, z, \lambda) = xyz + 2\lambda(xy + xz + yz) - \lambda S$ e le sue derivate parziali

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial H}{\partial x} = yz + 2\lambda(y + z) \\
\dfrac{\partial H}{\partial y} = xz + 2\lambda(x + z) \\
\dfrac{\partial H}{\partial z} = xy + 2\lambda(x + y) \\
\dfrac{\partial H}{\partial \lambda} = 2(xy + xz + yz) - S
\end{cases}$$

Dalla prima e dalla seconda equazione si ricava che

$$2\lambda = -\frac{yz}{y+z} = -\frac{xz}{x+z}$$

e da cui (si ricordi che $x, y, z > 0$) $x = y$. Analogamente dalla prima e dalla terza si ricava $x = z$, per cui si conclude che $x = y = z$. Questa è la soluzione, che corrisponde a dire che se c'è un parallelepipedo di volume massimo questo deve essere un cubo. Vediamo si stabilire quanti punti ci sono che verificano questa condizione: si sa che $2(xy + xz + yz) = S$ e d'altra parte che $x = y = z$. Quindi esiste solo un punto sul vincolo dato da

$$2(x^2 + x^2 + x^2) = S \qquad \Rightarrow \qquad x = \sqrt{\frac{S}{6}}\,.$$

Il volume corrispondente a questo valore è

$$\left[\sqrt{\frac{S}{6}}\,\right]^3 = \left(\frac{S}{6}\right)^{3/2}.$$

Vediamo in due modi che $(\sqrt{S/6})^3$ è il massimo valore possibile per il volume. Si può utilizzare la formula (3.2). Infatti presi $a_1 = xy, a_2 = yz, a_3 = xz$ si ha da (3.2)

$$\sqrt[3]{xy\ yz\ xz} = (xyz)^{3/2} \leqslant \frac{xy + xz + yz}{3} = \frac{S}{6}$$

da cui

$$f(x, y, z) = xyz \leqslant \left[\frac{S}{6}\right]^{3/2}$$

ogniqualvolta la somma $2(xy + xz + yz) = S$.
Un altro modo è il seguente: la funzione volume $f(x, y, z) = xyz$ è sempre positiva e ha un unico punto critico. Vediamo che all'infinito la funzione tende a zero (o equivalentemente che $1/f(x, y, z)$ tende a $+\infty$) quando $|(x, y, z)| \to +\infty$ sul vincolo:

$$\frac{S}{2}\frac{1}{xyz} = \frac{xy + yz + xz}{xyz} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\,.$$

È chiaro che quando $|(x, y, z)| \to +\infty$ sul vincolo $M = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2(xy + yz + xz) = S\}$ non tutte le variabili possono andare a $+\infty$, e almeno una delle tre deve quindi convergere a 0. Per cui

$$\lim_{\substack{|(x,y,z)| \to +\infty \\ (x,y,z) \in M}} f(x, y, z) = +\infty\,.$$

Soluzione 3.26 - L'insieme E è quello delimitato dalle curve in Figura 3.11 e dall'asse $y = 0$. Infatti abbiamo le seguenti limitazioni: $y \geqslant 0$ e $y \leqslant x + 2/\sqrt[3]{5}$ che definiscono due semipiani. La terza $3x^5 + 5y^3 \leqslant 8$ può essere vista come

$$y \leqslant \left(\frac{8 - 3x^5}{5}\right)^{1/3}.$$

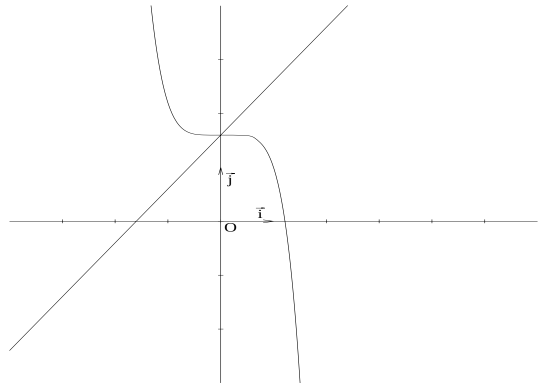

Figura 3.11:

Le derivate parziali si annullano solo nell'origine, che non appartiene all'interno di E, quindi va scartato. Vediamo il bordo. Prima la parte in cui $y = 0$: chiaramente $f(x, 0) = 0$ (provare ad usare i moltiplicatori). La parte di bordo che appartiene alla retta si può parametrizzare con $\varphi(t) = (t, t + 2/\sqrt[3]{5})$ con $t \in (-2/\sqrt[3]{5}, 0)$.
Si ottiene $f(\varphi(t)) = t^2 + t2/5^{1/3}$ la cui derivata è

$$2t + \frac{2}{5^{1/3}}$$

che si annulla per $t = -1/5^{1/3}$. Quindi il punto $\varphi(-1/5^{1/3}) = (-1/5^{1/3}, 1/5^{1/3})$ è un punto candidato. Sull'ultimo tratto di bordo usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: cerchiamo i punti stazionari (in $\mathbf{R}^3$) della funzione

$$H(x, y, \lambda) = xy + \lambda(3x^5 + 5y^3 - 8)\,.$$

Derivando si ottiene

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial x} = y + 15\lambda x^4 = 0 \\ \dfrac{\partial H}{\partial y} = x + 15\lambda y^2 = 0 \\ \dfrac{\partial H}{\partial z} = 3x^5 + 5y^3 - 8 = 0 \end{cases}$$

Dalla prima e dalla seconda si ha che $15\lambda = -y/x^4 = -x/y^2$ da cui

$$y^3 = x^5\,.$$

Inserendo quest'informazione nella terza equazione si ricava

$$x = 1\,, \quad y = 1\,.$$

Valutando f nei punti $(-1/5^{1/3}, 1/5^{1/3})$, $(1,1)$, $(x,0) \in E$, e il vertice $(0, 2/5^{1/3})$ si ottiene

$$
\begin{aligned}
& f(-1/5^{1/3}, 1/5^{1/3}) = -\tfrac{1}{\sqrt[3]{25}}\,, && \text{minimo} \\
& f(1,1) = 1\,, && \text{massimo} \\
& f(x,0) = 0\,, && \\
& f(0, 2/5^{1/3}) = 0\,. &&
\end{aligned}
$$

Soluzione 3.27 - Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si consideri la funzione

$$H(x,y,z,\lambda) = 2x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2yz - 1)$$

e annullando le sue derivate si ottiene

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial H}{\partial x} = 4x + 2\lambda xyz = 0 \\
\dfrac{\partial H}{\partial y} = 2y + \lambda x^2 z = 0 \\
\dfrac{\partial H}{\partial z} = 2z + \lambda x^2 y = 0 \\
x^2yz = 1
\end{cases}
$$

Dalla seconda e dalla terza si ottiene

$$\lambda = -\frac{2y}{x^2z} = -\frac{2z}{x^2y} \qquad \Longrightarrow \qquad z^2 = y^2\,.$$

Dalla quarta equazione si ricava che $x^2 = 1/yz$ per cui yz è positivo (o sia y che z sono positivi, o entrambi sono negativi, quindi la possibilità $z = -y$ va scartata).
Dalla prima equazione, sfruttando $y = z$ e $x^2 = 1/yz$, si ha

$$4x + 2\Big(-\frac{2y}{x^2z}\Big)xyz = 4\Big(x - \frac{1}{x^3}\Big) = 0$$

da cui si ricava che $x = 1$ oppure $x = -1$. Per cui i punti trovati sono

$$P_1 = (1,1,1)\,, P_2 = (1,-1,-1)\,, P_3 = (-1,1,1)\,, P_4 = (-1,-1,-1)\,.$$

Si ha che $f(P_i) = 4$ per ogni i. Come fare per capire se sono massimi o minimi? Dalla risoluzione dell'Esercizio 3.24 sappiamo che se $y, z > 0$ e $x^2yz = 1$ allora $x^2 + y + z \geqslant 3$ da cui $2x^2 + 2y + 2z \geqslant 6$. Si ha usando $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$

$$2x^2 + (y^2+1) + (z^2+1) \geqslant 2x^2 + 2y + 2z \geqslant 6$$

da cui

$$2x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 4\,.$$

Se $y, z < 0$ considero $-y$ e $-z$ che sono positivi e il cui prodotto è sempre yz e ripeto il ragionamento. Conclusione:

$$f(x, y, z) \geqslant 4 \qquad \text{sul vincolo}$$

per cui P_i, $i = 1, 2, 3, 4$, sono tutti punti di minimo.

Soluzione 3.28 - Con due vincoli considero la funzione

$$H(x, y, z, \lambda, \mu) = x + 3y - z + \lambda(x^2 + y^2 - z) + \mu(z - 2x - 4y)\,.$$

Si trovano i punti $P_1 = (1 + \sqrt{5/2}, 2 + \sqrt{5/2}, 10 + 6\sqrt{5/2})$ e $P_2 = (1 - \sqrt{5/2}, 2 - \sqrt{5/2}, 10 - 6\sqrt{5/2})$ che sono rispettivamente di minimo e di massimo.

Capitolo 4

Curve e Campi Vettoriali

ESERCIZIO 4.1 - Calcolare la lunghezza della curva

$$y = \log x, \quad x \in [3/4, 4/3].$$

ESERCIZIO 4.2 - Calcolare la lunghezza della curva

$$\begin{cases} y = x^2 \\ 3z = 2xy \end{cases}$$

dal punto $(0, 0, 0)$ al punto $(2, 4, 16/3)$.

ESERCIZIO 4.3 - Calcolare la lunghezza della curva

$$|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = 1$$

parametrizzata da $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos^3 t, \text{ sen }^3 t)$. Calcolare poi i versori tangente e normale (dove possibile).

ESERCIZIO 4.4 - Calcolare la lunghezza delle curve

$$\gamma(t) = (e^{2t}, 2e^t, t), \quad t \in [0, 1]$$

$$\beta(s) = (8s/3, 2s^2, 2s - 1), \quad s \in [0, 1]$$

e calcolare l'angolo tra le due curve nel punto $(1, 2, 0)$. Calcolare inoltre l'ascissa curvilinea e i versori della terna intrinseca.

ESERCIZIO 4.5 - Calcolare per la curva

$$\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \,\text{sen}\, t, \sqrt{2}e^t)$$

l'ascissa curvilinea $s(t)$ a partire dal punto $t = 0$ e riscrivere l'equazione della curva assumendo come parametro s. Calcolare quindi la terna intrinseca e provare che formano angoli costanti con l'asse z.

ESERCIZIO 4.6 - Calcolare l'integrale della funzione

$$f(x,y) = xy$$

lungo la curva $\gamma(t) = (t, t^2)$, $t \in [0,1]$.

ESERCIZIO 4.7 - Calcolare l'integrale della funzione

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)^2$$

lungo la curva $\varrho = e^{2\vartheta}$ con $\vartheta \in (-\infty, 0]$.

ESERCIZIO 4.8 - Calcolare la lunghezza dell'arco di cicloide

$$\begin{cases} x(t) = a(t - \operatorname{sen} t) \\ y(t) = a(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in (0, 2\pi).$$

e calcolare l'area della regione compresa fra tale arco e la retta $y = 0$.

ESERCIZIO 4.9 - Calcolare l'area del dominio racchiuso dalla cardioide di equazioni polari $\varrho = (1 - \cos\vartheta)$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$.

* ESERCIZIO 4.10 Calcolare

$$\int_C (-x^2 y dx + x y^2 dy)$$

dove $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2\}$.

* ESERCIZIO 4.11 **(Problema Isodiametrico)** Dimostrare che tra tutte le curve chiuse di diametro 2, la circonferenza è quella che racchiude una regione di area massima (si tenga presente che per un insieme $A \subset \mathbf{R}^n$, si definisce il diametro tramite

$$\operatorname{diam} A = \sup_{x,y \in A} \|x - y\|).$$

Suggerimento: si osservi prima di tutto che all'insieme conviene essere convesso per racchiudere area maggiore, e quindi si ponga il sistema di coordinate in un punto della curva con un asse tangente alla curva e uno perpendicolare, e calcolare quindi l'area usando le coordinate polari.

ESERCIZIO 4.12 - Dire se il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

è conservativo o meno e, in caso affermativo, calcolarne il potenziale.

ESERCIZIO 4.13 - Dire se il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{2x + y}{(x^2 + xy)^{2/3}}, \frac{x}{(x^2 + xy)^{2/3}} + 2y \right)$$

è conservativo o meno e, in caso affermativo, calcolarne il potenziale.

ESERCIZIO 4.14 - Dire se il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2} \right)$$

è conservativo o meno e, in caso affermativo, calcolarne il potenziale.

ESERCIZIO 4.15 - Dimostrare che il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(\frac{2xz-y}{x^2+y^2}, \frac{x+2yz}{x^2+y^2}, \log(x^2+y^2) \right)$$

non è conservativo ma è dotato di potenziali locali.

ESERCIZIO 4.16 - Verificare che il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{2y}{x^2+y^2+z^2} + 1, \frac{2z}{x^2+y^2+z^2} + 3 \right)$$

è conservativo e determinarne i potenziali.

ESERCIZIO 4.17 - Verificare che il campo elettrico

$$F(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z)$$

è conservativo e a divergenza nulla e determinarne i potenziali.

Soluzioni

Soluzione 4.1 - La curva che stiamo considerando è data dalla funzione $\gamma : [3/4, 4/3] \to \mathbf{R}^2$,

$$\gamma(x) = (x, \log x);$$

quindi siccome

$$\gamma'(x) = \left(1, \frac{1}{x}\right)$$

troviamo che

$$L(\gamma) = \int_{3/4}^{4/3} |\gamma'(x)| dx = \int_{3/4}^{4/3} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx = \frac{17}{12}$$

Soluzione 4.2 - La curva che stiamo considerando può essere espressa dalla funzione $\gamma : [0, 2] \to \mathbf{R}^3$ data da

$$\gamma(x) = \left(x, x^2, \frac{2}{3}x^3\right).$$

Quindi si ottiene che $\gamma'(x) = (1, 2x, 2x^2)$, da cui

$$L(\gamma) = \int_0^2 (1 + 2x^2) dx = \frac{22}{3}.$$

Soluzione 4.3 - Il luogo dei punti che soddisfano $|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = 1$ è quello disegnato in Figura 4.1. Valutando la derivata di γ si ottiene che in effetti per i valori $t = 0$, $t = \pi/2$, $t = \pi$, $t = 3\pi/2$, corrispondenti rispettivamente ai punti $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$, la curva non è regolare. Si ha

$$\gamma'(t) = (-3\cos^2 t \operatorname{sen} t, 3 \operatorname{sen}^2 t \cos t)$$

'che ha modulo 0 per i valori di t sopra elencati. Il versore tangente si può trovare semplicemente dividendo $\gamma'(t)$ per il suo modulo $|\gamma'(t)|$. Valutiamo quindi il modulo:

$$|\gamma'(t)|^2 = 9\cos^4 t \operatorname{sen}^2 t + 9 \operatorname{sen}^4 t \cos^2 t \qquad \Rightarrow \qquad |\gamma'(t)| = 3|\cos t \operatorname{sen} t|.$$

Si ha quindi che il vettore tangente τ è dato da

$$\tau(t) = \left(\frac{-3\cos^2 t \operatorname{sen} t}{3|\cos t \operatorname{sen} t|}, \frac{3 \operatorname{sen}^2 t \cos t}{3|\cos t \operatorname{sen} t|}\right).$$

Nel primo quadrante, ad esempio, dove sia $\operatorname{sen} t$ che $\cos t$ sono positivi, si ha

$$\tau(t) = (-\cos t, \operatorname{sen} t).$$

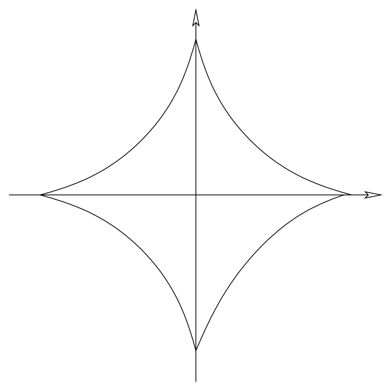

Figura 4.1:

Derivando ulteriormente (ed eventualmente normalizzando nuovamente, ma in questo caso non è necessario perché la derivata di τ ha già norma 1) si ottiene il versore tangente ν

$$\nu(t) = \frac{d}{dt}\tau(t) = (\,\mathrm{sen}\, t, \cos t)\,.$$

Valutare τ e ν anche negli altri quadranti.

Soluzione 4.4 - Per quanto riguarda la curva γ, se calcoliamo l'ascissa curvilinea si ha che

$$s_\gamma(t) = \int_0^t \sqrt{4e^{4\tau} + 4e^{2\tau} + 1}\,d\tau = e^{2t} + t - 1,$$

e quindi

$$L(\gamma) = s_\gamma(1) = e^2.$$

Per la curva β, si ha che l'ascissa curvilinea è data da

$$s_\beta(t) = \int_0^t \sqrt{16\tau^2 + 16\tau + 4}\,d\tau = 2\tau^2 + s\tau,$$

da cui

$$L(\beta) = s_\beta(1) = 4.$$

Per calcolare l'angolo ϑ tra le due curve nel punto $(1, 2, 0)$, bisogna prima di tutto calcolare i valori di t e s per i quali $\gamma(t) = \beta(s) = (1, 2, 0)$, e poi sfruttare la formula

$$\langle \gamma'(t), \beta'(s) \rangle = |\gamma'(t)| \cdot |\beta'(s)| \cos\vartheta.$$

Si trova che $t = 0$ mentre $s = 1$, da cui

$$\cos\vartheta = 1,$$

cioè $\vartheta = 0$; questo si può ricavare direttamente osservando che $\beta'(1) = 2\gamma'(0)$, cioè i due vettori sono paralleli e con lo stesso verso.

Soluzione 4.5 - Calcoliamo l'ascissa curvilinea:

$$s(t) = \int_0^t |\gamma'(\tau)| d\tau = 2e^t - 2.$$

Quindi per poter riscrivere la curva in funzione di s, bisogna ricavarsi t e sostituire, cioè

$$\gamma(s) = \frac{s+2}{2} \left(\cos \log \left(\frac{s+2}{2} \right), \text{ sen } \log \left(\frac{s+2}{2} \right), \sqrt{2} \right).$$

Provare a verificare che $|\gamma'(s)| = 1$; per calcolare la terna intrinseca, il versore tangente è dato dalla velocità della curva normalizzata in modo da avere norma 1, cioè

$$\tau_\gamma(t) = \frac{1}{2}(\cos t - \text{ sen } t, \cos t + \text{ sen } t, \sqrt{2})$$

se si utilizza la parametrizzazione in t, mentre se si passa alla variabile s, si ha

$$\tau_\gamma(s) = \frac{1}{2} \left(\cos \log \left(\frac{s+2}{2} \right) - \text{ sen } \log \left(\frac{s+2}{2} \right), \cos \log \left(\frac{s+2}{2} \right) + \text{ sen } \log \left(\frac{s+2}{2} \right), \sqrt{2} \right).$$

Si noti che il versore normale altro non è che

$$\tau_\gamma(s) = \frac{d\gamma(s)}{ds}$$

che come si può facilmente notare è parallelo alla velocità della curva ed ha norma 1; si noti infatti che

$$\frac{d\gamma(s)}{ds} = \frac{d\gamma(t)}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}.$$

Per quanto riguarda il versore normale, siccome $|\tau_\gamma(s)| = 1$ per ogni s, allora se se ne fa la derivata, non cambiando il modulo, si ottiene sempre e solo la variazione del verso di tale vettore, e tale variazione è ortogonale a τ_γ stesso. Quindi ha senso definire il versore normale come tale derivata, normalizzata in modo da avere norma 1. Quindi in definitiva

$$\begin{aligned} \nu_\gamma(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(- \cos \log \left(\frac{s+2}{2} \right) - \text{ sen } \log \left(\frac{s+2}{2} \right), \\ \cos \log \left(\frac{s+2}{2} \right) - \text{ sen } \log \left(\frac{s+2}{2} \right), 0 \Big). \end{aligned}$$

La binormale b_γ è semplicemente il versore normale ad entrambi i versori precedenti ed in modo tale che $(\tau_\gamma, n_\gamma, b_\gamma)$ formino una terna sinistrorsa (come la terna cartesiana $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$). Quindi si trova che

$$b_\gamma(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\cos\log\left(\frac{s+2}{2}\right) - \operatorname{sen}\log\left(\frac{s+2}{2}\right), \\ \cos\log\left(\frac{s+2}{2}\right) + \operatorname{sen}\log\left(\frac{s+2}{2}\right), 0\Big).$$

Infine l'angolo con l'asse z è dato dai prodotti scalari

$$\begin{aligned} \langle \tau_\gamma(s), (0,0,1)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \langle \nu_\gamma(s), (0,0,1)\rangle &= 0 \\ \langle b_\gamma(s), (0,0,1)\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

che non dipendono da s.

Soluzione 4.6 - La curva è data da $\gamma(t) = (t, t^2)$, quindi $\gamma'(t) = (1, 2t)$, da cui

$$\int_\gamma f = \int_0^1 f(t,t^2)|\gamma'(t)|dt = \int_0^1 t^3\sqrt{1+4t^2}dt = \frac{5\sqrt{5}}{24} + \frac{1}{120}.$$

Soluzione 4.7 - La curva in questione è data da $\gamma(\vartheta) = (e^{2\vartheta}\cos\vartheta, e^{2\vartheta}\operatorname{sen}\vartheta)$, e quindi l'integrale diventa

$$\int_\gamma f = \int_{-\infty}^0 e^{10\vartheta}\sqrt{5}d\vartheta = \frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

Soluzione 4.8 - L'arco di cicloide (si veda la Figura 4.2) può essere pensato come la curva tracciata nel piano da un punto fissato su un circonferenza che ruota sull'asse x (si pensi di fissare un punto sul copertone di una ruota di bicicletta che corre, il cui raggio è a, e di osservarne il movimento). La

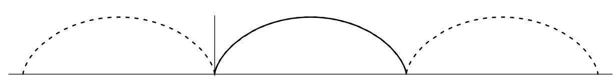

Figura 4.2:

derivata è data da

$$\dot{x}(t) = a(1-\cos t)\,, \qquad \dot{y}(t) = a\operatorname{sen} t\ .$$

Si noti che il puntino sulla ruota è fermo per un istante ogni giro ($t = 0$ e $t = 2\pi$ nel nostro caso, ma se la bicicletta prosegue per ogni $t = 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$), mentre la componente y si annulla anche per $t = \pi$ (quando la ruota ha percorso mezzo giro). La lunghezza è data da

$$a \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2(2 \operatorname{sen}^2 t/2)}dt = 2a \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t/2 dt = 8a\,.$$

Per calcolare l'area si potrebbe passare alle coordinate polari (provare a farlo), oppure utilizzare il teorema della divergenza. Procederemo seguendo questo secondo approccio; l'area della cicloide C può essere calcolata tramite la formula

$$A(C) = \int_C dxdy = \int_C \operatorname{div} F dxdy = \int_{\partial C} \langle F, \nu_C \rangle \, ds$$

dove F è un campo vettoriale con div $F = 1$, il secondo integrale è l'integrale curvilineo calcolato sulla curva $\gamma_1 \cup \gamma_2$ con $\gamma_1(t) = (t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$ e $\gamma_2(t) = a(2\pi - t + \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Campi F con la proprietà cercata sono ad esempio $F(x, y) = \alpha x + \beta y$ con $\alpha + \beta = 1$; nel nostro caso conviene prendere $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, in modo che $F(x, y) = (0, y)$, e quindi l'itegrale curvilineo di F lungo γ_1 si annulla; resta solo il secondo integrale, che diventa

$$\int_{\gamma_2} \langle F, \nu_C \rangle \, ds = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)^2 dt = 3\pi a.$$

Soluzione 4.9 - L'area della cardioide C può essere calcolata usando le coordinate polari

$$\begin{cases} x = \varrho \cos \vartheta \\ y = \varrho \operatorname{sen} \vartheta \end{cases}$$

dove $\vartheta \in [0, 2\pi]$, mentre a ϑ fissato il raggio ϱ varia tra 0 e $\varrho(\vartheta) = (1 - \cos \vartheta)$. Quindi

$$A(C) = \int_C dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\varrho(\vartheta)} \varrho d\varrho d\vartheta = \frac{3\pi}{2}.$$

Allo stesso risultato si potrebbe giungere usando il teorema della divergenza; infatti se F è un campo vettoriale con div $F = 1$, allora

$$A(C) = \int_C dxdy = \int_C \operatorname{div} F dxdy = \int_{\partial C} \langle F, \nu_C \rangle \, ds$$

dove ν_C è la normale esterna alla cardioide e l'ultimo integrale è inteso essere l'integrale curvilineo sul bordo di C. Quindi se parametrizziamo il bordo con la curva

$$\gamma(\vartheta) = \varrho(\vartheta)(\cos \vartheta, \operatorname{sen} \vartheta) = (\cos \vartheta - \cos^2 \vartheta, \operatorname{sen} \vartheta - \operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta),$$

$\vartheta \in [0, 2\pi]$; si ottiene quindi che

$$\gamma'(\vartheta) = (2 \operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta - \operatorname{sen} \vartheta, \cos \vartheta - \cos^2 \vartheta + \operatorname{sen}^2 \vartheta),$$

mentre la normale esterna è data da

$$\nu_C(\vartheta) = \frac{(\cos\vartheta - \cos^2\vartheta + \operatorname{sen}^2\vartheta, 2\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta)}{\sqrt{2 - 2\cos\vartheta}},$$

da cui, siccome $|\gamma'(\vartheta)| = \sqrt{2 - 2\cos\vartheta}$,

$$A(C) = \frac{3\pi}{2}.$$

Soluzione 4.10 - L'insieme C è una curva che può essere parametrizzata tramite $\gamma(\vartheta) = R(\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta)$m $\vartheta \in [0, 2\pi]$; per calcolare l'integrale, bisogna dare significato a dx e dy. Con un passaggio che andrebbe formalizzato meglio, si può dire che se $x = R\cos\vartheta$ con R indipendente da ϑ, allora $dx = -R\operatorname{sen}\vartheta d\vartheta = -yd\vartheta$; analogamente otteniamo che $dy = R\cos\vartheta d\vartheta = xd\vartheta$. Quindi si ha che

$$\int_C (-x^2ydx + xy^2dy) = s\int_0^{2\pi} x^2y^2d\vartheta = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Si poteva ottenere lo stesso risultato utilizzando il teorema della divergenza; infatti nel punto $(x, y) \in C$, la normale esterna è data da dal vettore $(x/R, y/R)$, mentre l'elemento di linea è dato da $ds = Rd\vartheta$, da cui, definendo il campo vettoriale $F(x, y) = (xy^2, x^2y)$, si ha che

$$\begin{aligned}
2\int_0^{2\pi} x^2y^2d\vartheta &= \int_0^{2\pi} \left\langle (xy^2, x^2y), \left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}\right)\right\rangle Rd\vartheta \\
&= \int_{C=\partial B} \langle F, \nu_B\rangle\, ds = \int_B \operatorname{div} F(x, y)dxdy \\
&= \int_B (x^2 + y^2)dxdy = \frac{\pi R^4}{2}.
\end{aligned}$$

Soluzione 4.11 - Data una curva chiusa $\gamma : [0, 1] \to \mathbf{R}^2$, una prima osservazione da fare è che se γ racchiude una regione di area massima, allora tale regione deve essere convessa (se non lo fosse, se cioè ci fosse una regione di non convessità, si potrebbe 'tappare' tale regione convessificando l'insieme, operazione che aumenterebbe l'area della regione senza aumentare il diametro dell'insieme). Quindi, se la regione è convessa, ogni punto della curva vede ogni altro punto della curva stessa; possiamo quindi porre un sistema di coordinate centrate in un punto O della curva stessa in cui l'asse y è tangente alla curva e l'asse x è perpendicolare alla curva, diretto verso l'interno della curva. Scrivendo quindi la curva usando coordinate polari centrate in tale punto O, otterremmo

$$\{x = \varrho\cos\vartheta y = \varrho\operatorname{sen}\vartheta$$

con $\vartheta \in [-\pi/2, \pi.2]$ e a ϑ fissato, il raggio ϱ varia tra 0 e un certo raggio $\varrho(\vartheta)$. Otteniamo quindi per l'area che

$$A(\gamma) = \int_{\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\varrho(\vartheta)} \varrho d\varrho d\vartheta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\varrho(\vartheta)^2}{2} d\vartheta.$$

A questo punto notiamo che l'integrale possiamo restringerlo a $\vartheta \in [0, \pi/2]$, se oltre a $\varrho(\vartheta)^2$ consideriamo anche $\varrho(\vartheta - \pi/2)^2$, e notare infine che $\varrho(\vartheta)$ e $\varrho(\vartheta - \pi/2)$ sono i due cateti di un triangolo rettangolo la cui ipotenusa ha estremi che stanno sulla curva, e quindi la sua lunghezza è minore del diametro dell'insieme, cioè

$$\varrho(\vartheta)^2 + \varrho(\vartheta - \pi/2) \leqslant (\mathrm{diam}(\gamma))^2 \leqslant 4.$$

In definitiva, troviamo che

$$A(\gamma) \leqslant \pi,$$

e quest'ultimo altro non è che l'area del cerchi di diametro 2.

Soluzione 4.12 - Se si considera il cammino chiuso $\gamma(t) = (\cos t,\ \mathrm{sen}\, t)$, si ottiene che

$$\int_\gamma F \cdot ds = \int_0^{2\pi} F(\cos t,\ \mathrm{sen}\, t) \cdot (-\,\mathrm{sen}\, t, \cos t) dt = 2\pi\,,$$

e quindi il campo risulta non essere conservativo. Otteniamo però che rot $F = 0$, quindi F ammette potenziale locale ϕ; per calcolare tale potenziale bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2 + y^2} \\[2ex] \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

che ha per soluzione, integrando la prima rispetto a x e sostituendo nella seconda, la funzione

$$\phi(x, y) = -\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) + c.$$

Il campo ammette quindi potenziale locale, ma il dominio è dato da $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ che non è semplicemente connesso; per rendere il campo conservativo, dovremmo rendere il dominio semplicemente connesso, cosa che può essere fatta se consideriamo il dominio

$$D = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geqslant 0\} \quad \text{o più in generale} \quad \mathbf{R}^2 \setminus S$$

dove S è una qualunque semiretta uscente dall'origine. Consideriamo per semplicità il dominio D: un potenziale C^1 (verificare che è C^1!) in D è dato allora dalla funzione

$$\phi = \begin{cases} -\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{y}\right) & y > 0 \\ \pi/2 & x < 0\,, y = 0 \\ -\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{y}\right) + \pi & y < 0\,. \end{cases}$$

Soluzione 4.13 - Notare che il dominio del campo è dato da

$$\mathbf{R}^2 \setminus \{(x,y) : x = 0 \text{ o } y = -x\},$$

che è semplicemente connesso anche se non connesso. Quindi per vedere se il campo è conservativo basta e serve che si abbia rot $F = 0$, cosa facilmente verificata. Per trovare il potenziale locale ϕ, bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = \dfrac{2x + y}{(x^2 + xy)^{2/3}} \\ \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = \dfrac{x}{(x^2 + xy)^{2/3}} + 2y \end{cases}$$

che ammette per soluzione la funzione

$$\phi(x,y) = 3(x^2 + xy)^{2/3} + y^2 + c$$

con la costante c che può assumere valori diversi su ogni componente connessa.

Soluzione 4.14 - È facile vedere che il dominio naturale di F è $\mathbf{R}^2$ e che le derivate incrociate sono uguali, per cui il campo è conservativo. Per valutare un potenziale utilizziamo il fatto che per un campo conservativo l'integrale $\int_\gamma F \cdot ds$ su γ cammino che unisce due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) è indipendente dal cammino γ. Possiamo fissare quindi arbitrariamente un punto, per comodità l'origine, e il poyenziale in un generico punto (x, y) sarà dato dall'integrale lungo quel cammino di F. Per semplicità scegliamo il cammino che unisce l'origine a (x, y) dato da

$$\gamma : [0,1] \to \mathbf{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = (tx, ty)\,.$$

Si ha allora

$$\begin{aligned} \phi(x,y) &= \int_\gamma F \cdot ds = \int_0^1 \left[\frac{2tx}{1 + t^2x^2 + t^2y^2}x + \frac{2ty}{1 + t^2x^2 + t^2y^2}y\right]dt = \\ &= \log(1 + t^2x^2 + t^2y^2)\Big|_0^1 = \log(1 + x^2 + y^2)\,. \end{aligned}$$

Soluzione 4.15 - Si noti che preso il cammino chiuso $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$ si ha

$$\int_\gamma F \cdot ds = 2\pi,$$

e quindi il campo non è conservativo. Però si ha che rot $F = 0$, e quindi il campo ammette potenzile locale, che si ricava essere

$$\phi(x, y, z) = z \log(x^2 + y^2) - \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) + c.$$

Soluzione 4.16 - Il dominio è semplicemente connesso e rot $F = 0$, quindi il campo è conservativo. Il potenziale infine è dato dalla funzione

$$\phi(x, y, z) = \log(x^2 + y^2 + z^2) + y + 3z + c.$$

Soluzione 4.17 - Il dominio è semplicemente connesso e rot $F = 0$, quindi il campo è conservativo, e il potenziale è dato da

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} + c.$$

Si nota inoltre abbastanza immediatamente che per il campo elettrico F si ha che div $F = 0$; come per i campi vettoriali il cui rotore è nullo si dimostra che ammette un potenziale, cioè una funzione il cui gradiente è il campo, anche per i campi la cui divergenza è nulla si può dimostrare che esiste un qualche potenziale, quello che si chiama il potenziale vettore, cioè una funzione vettoriale $A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che

$$F = \text{rot } A.$$

Capitolo 5

Equazioni differenziali

Equazioni lineari di primo grado

Ricordo: per le equazioni di primo grado del tipo $y' + ay = f$ (dove a e f sono noti) una soluzione è data da

$$y(t) = e^{-A(t)}\left[\int e^{A(t)} f(t)dt + c\right] \tag{5.1}$$

dove $A(t)$ è una primitiva di a.

Esercizio 5.1 - Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $y' - y = -t$.

Esercizio 5.2 - Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $y' - \dfrac{y}{t} = t$.

Esercizio 5.3 - Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + y \operatorname{tg} t = \dfrac{\operatorname{sen} t}{1 + \operatorname{sen} t} \\ y(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Equazioni a variabili separabili

Sono equazioni del tipo $y' = f(x)g(y)$ con f e g continue. La funzione g deve essere diversa da zero (si veda l'Esercizio 5.5. Si divide per $g(y)$, si integra

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))}dx = \int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx$$

dopodiché si inverte la primitiva di $1/g(y)$ in modo da esplicitare y.

ESERCIZIO 5.4 - Integrare l'equazione $y' = (1+2x)e^{-y}$.

ESERCIZIO 5.5 - Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{f'(x)}{y} \\ y(x_0) = y_0 \, . \end{cases}$$

ESERCIZIO 5.6 - Integrare l'equazione $y' = x \, \dfrac{y+1}{y}$.

Equazioni di Bernoulli

Sono equazioni del tipo

$$y' = a(x)y + b(x)y^{\alpha}$$

con $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ (per $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$ l'equazione è lineare). Si divide per y^{α} e si cambia variabile ponendo $v = y^{1-\alpha}$. Si ottiene

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} = ay^{1-\alpha} + b$$

che nella nuova variabile diventa lineare

$$\frac{1}{1-\alpha} v' = av + b \, .$$

ESERCIZIO 5.7 - Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = xy + x\sqrt{y} \\ \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

ESERCIZIO 5.8 - Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y} \\ \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Equazioni di tipo omogeneo

Sono equazioni della forma $y' = f(\frac{y}{x})$ con f continua. Si risolvono con il cambio di variabile

$$z(x) = \frac{y(x)}{x}$$

che porta all'equazione a variabili separabili $z' = \frac{1}{x}(f(z) - z)$. Dividendo per $f(z) - z$ si ottiene l'equazione

$$\frac{z'}{f(z) - z} = \frac{1}{x}\,.$$

Deve essere quindi $f(z) \neq z$ il che significa $f(\frac{y}{x}) \neq \frac{y}{x}$, ma nel caso $f(\frac{y}{x}) = \frac{y}{x}$ l'equazione si risolve direttamente. Se si ha una condizione iniziale $y(x_0) = y_0$ si deve avere $x_0 \neq 0$.

Esercizio 5.9 - Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x}{y} + 2\dfrac{y}{x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Alcune equazioni di secondo grado

In generale le equazioni di secondo gardo in forma normale sono della forma $y'' = f(x, y, y')$. Vedremo casi particolari:

1. $y'' = f(x)$,
2. $y'' = f(y)$,
3. $y'' = f(x, y')$,
4. $y'' = f(y, y')$.

Si osservi che in realtà questi quattro esempi sono due, in quanto il caso 1. è un caso particolare di 3. e il caso 2. è un caso particolare di 4.. Vediamo come risolverle (si vedano anche i quattro esercizi che seguono).

1. Questo è l'esempio più semplice, è sufficiente integrare.
2. Si può utilizzare il metodo spiegato al punto 4. oppure più semplicemente moltiplicare l'equazione per $2y'$ (y' deve essere diversa da zero, quindi se si risolve un problema di Cauchy si deve avere $y'(x_0) \neq 0$). A questo punto si ottiene $2y'y''$ che può essere visto come $\frac{d}{dx}(y')^2$. Supponendo di dover risolvere ($y_1 \neq 0$)
$$\begin{cases} y'' = f(y) \\ y'(x_0) = y_1 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$
si ottiene
$$\frac{d}{dx}(y'(x))^2 = 2f(y(x))y'(x)$$

e integrando fra x_0 e x si ottiene

$$(y'(x))^2 = y_1^2 + 2\int_{y_0}^{y(x)} f(s)ds\,.$$

Se $y_1 > 0$ si considera $y'(x) = \sqrt{y_1^2 + 2\int_{y_0}^{y(x)} f(s)ds}$, se $y_1 < 0$ invece $y'(x) = -\sqrt{y_1^2 + 2\int_{y_0}^{y(x)} f(s)ds}$. In entrambi i casi l'equazione è a variabili separabili.

3. È di fatto un'equazione del prim'ordine in y'.

4. Si effettua il cambio di variabile $p(y) = y'$ (attenzione! p dipende da y, cioè y viene vista come variabile indipendente, anche se poi sostituendo a y la funzione $y(x)$ si ha $p(y(x)) = y'(x)$). Si ottiene derivando rispetto a x
$$\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$
espressione che sostituita nell'equazione fornisce
$$p' = \frac{1}{p}f(y,p)$$
dove però il segno $'$ a sinistra denota la derivata di p rispetto alla variabile y (e non rispetto alla variabile x!). Si integra, se si può, nella variabile y e una volta trovata p si integra $y'(x) = p(y(x))$.

Le soluzioni di equazioni del tipo 4. (e quindi anche del tipo 2.) non sempre sono esprimibili in maniera esplicita (si veda la soluzione dell'Esercizio 5.31).

Esercizio 5.10 - Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = \operatorname{sen} x \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Esercizio 5.11 - Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = y^2 \\ y'(2) = \sqrt{2/3} \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

Esercizio 5.12 - Si integri la seguente equazione

$$y'' = \frac{1}{x}y' + x^2 \operatorname{sen} x$$

ESERCIZIO 5.13 - Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = yy' \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Equazioni lineari a coefficienti costanti

Sono le equazioni del tipo

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f \,. \tag{5.2}$$

Prima si risolve l'equazione omogenea

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{5.3}$$

trovando le soluzioni $\lambda_i \in \mathbf{C}$ di (si vedano le dispense di teoria)

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

cosicché il polinomio potrà essere scritto anche

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \ldots (\lambda - \lambda_n) \,.$$

Denotando con D l'operatore differenziale $\frac{d}{dx}$ possiamo riscrivere l'equazione (5.3) come segue

$$P(D)y = \big(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0\big)y = 0 \tag{5.4}$$

cioè l'espressione $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y$ può essere vista come un polinomio nella "variabile" D applicato ad una funzione y cosicché, una volta trovate le radici λ_i di P, si potrà scrivere

$$P(D)y = (D - \lambda_1) \ldots (D - \lambda_n)y$$

Per trovare l'espressione generale della soluzione all'equazione non omogenea può essere applicato il metodo della varizione delle costanti o dei parametri (si veda, ad esempio, l'ESERCIZIO 5.19).
Tuttavia in qualche caso si può risparmiare lavoro (esempi nell'ESERCIZIO 5.20, ESERCIZIO 5.21, ESERCIZIO 5.22) se ci si rende conto che il dato f è soluzione di un'equazione a coefficienti costanti, cioè esistono $b_i \in \mathbf{R}$, $i = 0, \ldots m-1$, tali che $f^{(m)} + \ldots + b_1 f' + b_0 f = 0$, cioè, denotando con $Q(\lambda)$ il polinomio $\lambda^m + \ldots + b_1\lambda + b_0 f$, possiamo scrivere

$$Q(D)f = 0 \,.$$

Supponendo allora che y sia una soluzione di (5.2) si avrà

$$P(D)y = f \qquad \Rightarrow \qquad Q(D)\big[P(D)y\big] = \big(Q(D)P(D)\big)y = 0$$

che è come dire che y è soluzione di un'equazione omogenea di grado $n+m$. Denotate con $\lambda_{n+1}, \dots \lambda_{n+m}$ le radici del polinomio Q si può scrivere

$$\big(Q(D)P(D)\big)y = (D-\lambda_1)\dots(D-\lambda_n)(D-\lambda_{n+1})\dots(D-\lambda_{n+m})y = 0\,.$$

Trovate tutte le radici si può cercare y tra le soluzioni della precedente equazione omogenea (attenzione! e non tra le soluzioni dell'equazione $Q(D)y=0$, si veda l'Esercizio 5.22 per un esempio).

Esercizio 5.14 - Trovare le soluzioni di $y''-3y'+2y=0$.

Esercizio 5.15 - Trovare le soluzioni di $y''+4y'+4y=0$.

Esercizio 5.16 - Trovare le soluzioni di $y''+6y'+10y=0$.

Esercizio 5.17 - Trovare le soluzioni di $y'''-7y'+6y=0$.

Esercizio 5.18 - Trovare la soluzione di

$$\begin{cases} y'''-2y''+4y'-8y=0 \\ y''(0)=1 \\ y'(0)=0 \\ y(0)=0\,. \end{cases}$$

Esercizio 5.19 - Trovare le soluzioni di $y''+y=\dfrac{1}{\cos t}$.

Esercizio 5.20 - Trovare le soluzioni di $y^{(4)}-16y=x^2+1$.

Esercizio 5.21 - Trovare le soluzioni di $y''-5y'+6y=xe^x$.

Esercizio 5.22 - Risolvere $y''+y=\operatorname{sen} t$.

Esercizi di vario genere

Esercizio 5.23 - Si integri l'equazione $y'=(x+2y-1)^2$.

Esercizio 5.24 - Si integri l'equazione $y'=\dfrac{xy^2-4x^3+y^3}{xy^2}$.

Esercizio 5.25 - Data l'equazione differenziale

$$(x+1)y'+3y+(1-x^2)=0$$

stabilire se esiste ed è unica la soluzione $y:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ tale che $\lim_{x\to 0^+} y(x)=+\infty$.

Esercizio 5.26 - Determinare, se ne esistono, le soluzioni limitate all'equazione

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{2+x} \qquad\qquad x > 0\,.$$

Esercizio 5.27 - Determinare tutte le soluzioni limitate dell'equazione

$$y' - y + y^3 = 0\,.$$

Esercizio 5.28 - Data l'equazione differenziale

$$y'' - 2y' - 8y = 2xe^{-x}$$

i) determinarne la soluzione generale,

ii) caratterizzare le soluzioni y tali che $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$,

iii) caratterizzare le soluzioni tali che $\int_0^{+\infty} |y(x)|dx < +\infty$.

Esercizio 5.29 - Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\operatorname{sen} y^2}{y} \\ y(0) = \sqrt{\pi/2} \end{cases}$$

Esercizio 5.30 - Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2yy'' - {y'}^2 - 1 = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Esercizio 5.31 - Si integri $y^5 y'' = 1$.

Esercizio 5.32 - Si integri $y' = g\Big(\dfrac{ax+by+c}{dx+ey+f}\Big)$.

Esercizio 5.33 - Si integri $y' = \dfrac{2x+y-1}{4x+2y+5}$.

Esercizio 5.34 - Si integri $y' = \dfrac{4x-y+7}{2x+y-1}$.

Esercizio 5.35 - Posta $f(x) = \operatorname{sen} x$ per $x \in (0,\pi)$, $f(x) = 0$ altrimenti determinare la soluzione del problema

$$\begin{cases} y'' + y = f & \qquad x > 0 \\ y'(0) = 3/2 \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

ESERCIZIO 5.36 - Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{1+2x}{\cos y} \\ \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ESERCIZIO 5.37 - Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (x + y'(x))^2 - x - y''(x) - 1; \\ \\ y(0) = 0; \\ \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

ESERCIZIO 5.38 - Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{x^2 + y^2(x)}{xy(x)}.$$

ESERCIZIO 5.39 - Risolvere la seguente equazione differenziale

$$4y'(x) + y(x) = y^3(x)(x^3 - 4x).$$

ESERCIZIO 5.40 - Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y^{(4)}(x) - 2y^{(3)}(x) + 2y^{(2)}(x) - 2y'(x) + y(x) = 0.$$

ESERCIZIO 5.41 - Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y^{(3)}(x) = \frac{y^{(2)}(x)}{(x+1)^3}.$$

ESERCIZIO 5.42 - Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y(x)y''(x) - (y'(x))^2 = y^4(x).$$

ESERCIZIO 5.43 - Risolvere la seguente equazione differenziale

$$(1 + x^2)y'(x) + xy(x) = \frac{1}{(1 + x^2)}.$$

ESERCIZIO 5.44 - Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{2}{x}y(x) + \frac{x+1}{x}.$$

ESERCIZIO 5.45 - Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'(x)(1 - x^2) - xy(x) - xy^2(x) = 0.$$

Esercizio 5.46 - Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{6x} + \frac{x}{y^5(x)}.$$

Esercizio 5.47 - Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y(x)e^{2x} - (1+e^{2x})y'(x) = 0.$$

Esercizio 5.48 - Risolvere la seguente equazione differenziale

$$e^{x+y(x)}y'(x) + x = 0.$$

Esercizio 5.49 - Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{x^3 + y^3(x)}{xy^2(x)}.$$

Esercizio 5.50 - Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = -\dfrac{x}{y'(x)} \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 5.51 - Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} (x+1)y''(x) - (x+2)y'(x) + x + 2 = 0 \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 5.52 - Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y(x)y''(x) = y^2(x)y'(x) + y'(x)^2 \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 5.53 - Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y(x)y''(x) - y'(x)(1 + y'(x)) = 0.$$

Esercizio 5.54 - Utilizzando il metodo delle variazioni delle costanti, risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy''(x) - xy'(x) = 3x^2 \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 5.55 - Risolvere la seguente equazione differenziale

$$2y''(x) - y'(x) - y(x) = 4xe^{2x}.$$

Esercizio 5.56 - Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y''(x) + y(x) = x \operatorname{sen} x.$$

Esercizio 5.57 - Risolvere la seguente equazione differenziale

$$\frac{y'(x) - y(x)}{y''(x)} = 3.$$

Esercizio 5.58 - Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = xe^x \cos 2x - x^2 e^x \operatorname{sen} 2x.$$

Esercizio 5.59 - Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + 4y(x) = \cos x \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 5.60 - Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y''(x) + y(x) = 2x \cos x \cos 2x.$$

Esercizio 5.61 - Utilizzando il metodo della variazione delle costanti, risolvere la seguente equazione differenziale

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \frac{e^{-x}}{x}.$$

Esercizio 5.62 - Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y''(x) - 2y(x) = 4x^2 e^{x^2}.$$

Esercizio 5.63 - Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y^{(3)}(x) + y^{(2)}(x) = x^2 + 1 + 3xe^x.$$

Esercizio 5.64 - Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y^{(4)}(x) - 2y^{(3)}(x) + y^{(2)}(x) = x^3.$$

Esercizio 5.65 - Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{(3)}(x) + 2y^{(2)}(x) + 2y'(x) + y(x) = x \\ y(0) = y'(0) = y^{(2)}(0) = 0. \end{cases}$$

Soluzioni

Soluzione 5.1 - Usando l'espressione (5.1) calcoliamo prima una primitiva di $a(t) = -1$, $A(t) = -t$, poi

$$y(t) = e^t \Big[- \int e^{-t} t dt + c \Big] = ce^t + t + 1 \,.$$

Si osservi che i grafici non si intersecano (disegnare i grafici di $ce^t + t + 1$ al variare di c); infatti considerando $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ si ha che $c_1 e^t + t + 1 = c_2 e^t + t + 1$ per qualche t solo se $c_1 = c_2$. Ciò è dovuto al fatto che l'equazione, fissato un dato valore di y in un punto t_0, ha soluzione unica.

Soluzione 5.2 - Usando l'espressione (5.1) calcoliamo prima una primitiva di $a(t) = -1/t$, che è continua in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $A(t) = -\log|t|$, infine

$$y(t) = e^{\log|t|} \Big[\int e^{-\log|t|} t dt + c \Big] = |t| \ \Big[\int t/|t| dt + c \Big] = |t|(|t| + c)$$

definite in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$ (si veda la Figura 5.1). Poiché a non è continua in 0 l'equazione non si può risolvere con un dato iniziale

$$y(0) = x_0 \,.$$

Si osservi però che, poiché il limite per $t \to 0^+$ e $t \to 0^-$ delle soluzioni è zero,

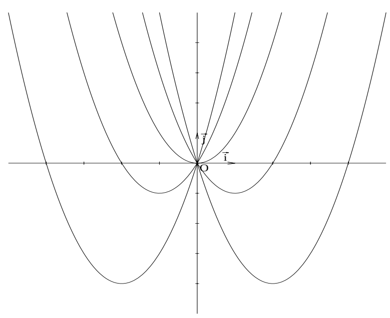

Figura 5.1:

nel caso in cui x_0 sia 0, si possono cercare soluzioni C^1 su tutto $\mathbf{R}$ scegliendo

$$y_c(t) = \begin{cases} |t|(|t| - c) = t^2 + ct & t \in (-\infty, 0) \\ |t|(|t| + c) = t^2 + ct & t \in (0, \infty) \,. \end{cases}$$

Si osservi che tutte queste sono soluzioni del problema con dato iniziale nullo in $t = 0$, quindi poiché a non è continua in zero il problema di Cauchy non ha soluzione con dato iniziale definito per $t = 0$ oppure se ha soluzione questa può non essere unica (in questo caso infinite).

Soluzione 5.3 - Questo problema ha una sola soluzione. Valutiamo prima una primitiva di $a(t) = \operatorname{tg} t$:

$$\int \operatorname{tg} t dt = \int \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} dt = -\log|\cos t|\,.$$

Si osservi che $\log|\cos t|$ è definita per $\cos t \neq 0$ ed è quindi continua negli intervalli $(-\pi/2, \pi/2)$, $(\pi/2, 3\pi/2)$ e così via (in tutti gli intervalli del tipo $((2k+1)\pi/2, (2k+3)\pi/2)$ con $k \in \mathbf{Z}$). Poiché siamo interessati a trovare una soluzione in un intorno di $t = 0$ consideriamo come primitiva di $\operatorname{tg} t$ la funzione $-\log\cos t$ perché intorno a $t = 0$ il coseno è positivo.
Ora valutiamo

$$\int e^{-\log\cos t} \frac{\operatorname{sen} t}{1 + \operatorname{sen} t} dt = \int \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t(1 + \operatorname{sen} t)} dt\,.$$

Ponendo $z = \operatorname{sen} t$ l'integrale diviene

$$\int \frac{z}{(1 - z^2)(1 + z)} dz\,.$$

Scrivendo

$$\frac{z}{(1 - z^2)(1 + z)} = \frac{z}{(1 - z)(1 + z)^2} = \frac{a}{1 + z} + \frac{b}{(1 + z)^2} + \frac{c}{1 - z}$$

si ottiene

$$\frac{z}{(1 - z^2)(1 + z)} = \frac{1}{4(1 + z)} - \frac{1}{2(1 + z)^2} + \frac{1}{4(1 - z)}$$

per cui integrando si ottiene

$$\frac{1}{4}\log|1 + z| + \frac{1}{4}\log|1 - z| + \frac{1}{2(1 + z)}$$

per cui

$$\int \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t(1 + \operatorname{sen} t)} dt = \frac{1}{4}\log\frac{1 + \operatorname{sen} t}{1 - \operatorname{sen} t} + \frac{1}{2}\frac{1}{1 + \operatorname{sen} t} + c$$

e quindi infine

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{\log\cos t}\Big[\frac{1}{4}\log\frac{1 + \operatorname{sen} t}{1 - \operatorname{sen} t} + \frac{1}{2}\frac{1}{1 + \operatorname{sen} t} + c\Big] = \\ &= \frac{1}{4}\cos t \log\frac{1 + \operatorname{sen} t}{1 - \operatorname{sen} t} + \frac{1}{2}\frac{\cos t}{1 + \operatorname{sen} t} + c\cos t\,. \end{aligned}$$

Per trovare *la* soluzione valuto $y(0)$ e impongo che valga $1/2$:

$$y(0) = \frac{1}{2} + c = \frac{1}{2}$$

da cui $c = 0$. La soluzione è

$$y(t) = \frac{1}{4}\cos t \log\frac{1+\operatorname{sen} t}{1-\operatorname{sen} t} + \frac{1}{2}\frac{\cos t}{1+\operatorname{sen} t}\,.$$

Si calcoli il limite per $t \to \frac{\pi}{2}^-$ e $t \to -\frac{\pi}{2}^+$ di y e della sua derivata (si ottiene

Soluzione 5.4 - Dividendo per e^{-y} si ottiene

$$e^y y' = 1 + 2x\,.$$

Integrando

$$\int e^y dy = \int (1+2x)dx$$

da cui

$$e^y = x + x^2 + c$$

per cui le soluzioni sono $y(x) = \log(x + x^2 + c)$.

Soluzione 5.5 - Denotiamo con $g(y)$ la funzione $\frac{1}{y}$ che è continua in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Questo significa che il problema può essere risolto se $y \neq 0$, cioè per un dato iniziale $y(x_0) \neq 0$.
Si ha semplicemente $yy' = f'(x)$ da cui

$$y^2(x) = f(x) + c\,.$$

Se $y_0 \neq 0$ ricavando c da $y_0^2 = f(x_0) + c$ si ottiene che la soluzione è

$$y(x) = \begin{cases} \sqrt{f(x) + y_0^2 - f(x_0)} & \text{se } y_0 > 0 \\ -\sqrt{f(x) + y_0^2 - f(x_0)} & \text{se } y_0 < 0 \end{cases}$$

Si osservi che la funzione $h(y) = y^2$ non è invertibile nel punto $y = 0$ (e g non è definita in $y = 0$). Questo fa sì che non si possa ricavare $y(x)$ se il dato iniziale è $y(x_0) = 0$.
A titolo di esempio, vediamo un problema con il dato iniziale $y_0 = 0$ il quale potrebbe comunque avere soluzione anche se $g(y)$ non è continua in 0, ma in questo caso si perde l'unicità. Si consideri

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2x^3}{y} \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

L'equazione ha come soluzioni x^2 e $-x^2$ definite in $(-\infty)$ e in $(0, +\infty)$. Poiché queste soluzioni in 0 valgono 0 e il limite in 0 delle loro derivate è zero si possono prolungare le soluzioni anche in zero scegliendo una soluzione nell'intervallo $(-\infty)$ raccordandola con un'altra soluzione definita nell'intervallo $(0, +\infty)$. Si avrebbe che le seguenti quattro funzioni soddisfano il precedente problema di Cauchy

$$y_1(x) = \begin{cases} x^2 & x \geqslant 0 \\ x^2 & x < 0\,. \end{cases} \qquad y_2(x) = \begin{cases} -x^2 & x \geqslant 0 \\ x^2 & x < 0\,. \end{cases}$$
$$y_3(x) = \begin{cases} x^2 & x \geqslant 0 \\ -x^2 & x < 0\,. \end{cases} \qquad y_4(x) = \begin{cases} -x^2 & x \geqslant 0 \\ -x^2 & x < 0\,. \end{cases}$$

Soluzione 5.6 - Dividendo per $(y+1)/y$ (cosa che si può fare solo se $y \neq -1$ visto che questa funzione si annulla per $y = -1$) e integrando si ha

$$\int \frac{y}{y+1} dy = \int x dx \qquad \text{se } y \neq -1$$

che fornisce l'espressione

$$y(x) - \log|1 + y(x)| = \frac{x^2}{2} + c\,.$$

Questo se $y \neq -1$. Se $y(x)$ fosse -1 per un qualche valore di x si ha che l'equazione $y' = x\,\frac{y+1}{y}$ in quel punto diventa

$$y' = 0\,.$$

Quindi $y(x) \equiv -1$ è soluzione dell'equazione (che non viene trovata con il metodo precedente poiché si è diviso $\frac{y+1}{y}$).
Si osservi inoltre che la funzione $g(t) = t - \log|1+t|$ non è invertibile in un intorno di $y = 0$ (si veda il grafico in Figura 5.2). Quindi se si avesse un problema

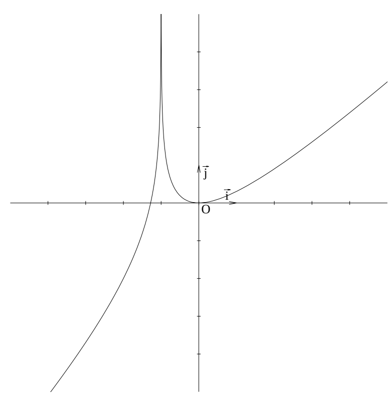

Figura 5.2:

di Cauchy con $y_0 \neq -1$, $y_0 \neq 0$

$$\begin{cases} y' = x \, \dfrac{y+1}{y} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

la soluzione sarebbe data, in forma implicita, da $y(x) - \log|1 + y(x)| = \frac{x^2}{2} + c$ con la condizione

$$y_0 - \log|1 + y_0| = \frac{x_0^2}{2} + c$$

dalla quale si ricava il valore di c. Formalmente (perché in questo caso non è semplice invertire $g(t) = t - \log|1 + t|$) la soluzione sarebbe

$$y(x) = g^{-1}\Big(\frac{x^2}{2} + c\Big),$$

dove g è invertibile, ma ci si accontenta della forma implicita. Se $y_0 = -1$ la soluzione è data da

$$y(x) = -1.$$

Soluzione 5.7 - Dividendo per $\sqrt{y}$ si ottiene

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} = x\sqrt{y} + x$$

e ponendo $v = \sqrt{y}$ si ha l'equazione

$$2v' - xv = x.$$

La soluzione è

$$e^{-\int x/2dx}\Big[\int e^{\int t/2dt}\frac{t}{2}dt + c\Big]$$

da cui si ricava

$$v(x) = e^{x^2/4}\Big[-e^{-x^2/4} + c\Big] = -1 + ce^{x^2/4}.$$

Di conseguenza ($v(x) = \sqrt{y(x)}$)

$$y(x) = \Big[ce^{x^2/4} - 1\Big]^2.$$

La condizione iniziale la si ricava imponendo

$$y(1) = \Big[ce^{1/4} - 1\Big]^2 = 1$$

da cui $c = 2e^{-1/4}$.

Soluzione 5.8 - Anche questa è di Bernoulli con $a(x) \equiv 0$. Dividendo per $\sqrt{y}$ si ottiene $y'/\sqrt{y} = 1$ e ponendo $v = y^{1-1/2} = \sqrt{y}$ si ottiene

$$v' = \frac{1}{2}, \qquad v(1) = \sqrt{2}\,.$$

Risolvendo si ha $v(x) = \frac{1}{2}x + c$ e imponendo la condizione iniziale si ottiene $c = \sqrt{2} - 1/2$. Elevando al quadrato

$$y(x) = \frac{1}{4}x^2 + \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)x + \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)^2$$

Soluzione 5.9 - L'equazione è del tipo $y' = f(y/x)$ con $f(z) = \frac{1}{z} + 2z$. Effettuando il cambio di variabile si ottiene l'equazione

$$z' = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{z} + z\right)$$

e separando le variabili

$$z'\frac{z}{1+z^2} = \frac{1}{x}$$

che integrata fornisce

$$\frac{1}{2}\log(1+z^2) = \log x + c$$

da cui, ponendo $c = \log\alpha$ con $\alpha > 0$,

$$z^2 = \alpha^2 x^2 - 1\,.$$

La condizione iniziale per y si trasforma per la funzione z come segue

$$z(x_0) = \frac{y(x_0)}{x_0} = \frac{y(1)}{1} = 1 > 0$$

per cui fra le due possibili soluzioni si scelga quella che per $x = 1$ possa assumere il valore 1, cioè quella positiva

$$z(x) = \sqrt{\alpha^2 x^2 - 1}$$

e non $z(x) = -\sqrt{\alpha^2 x^2 - 1}$. A questo punto si ricavi il valore di α imponendo

$$1 = z(1) = \sqrt{\alpha^2 - 1}$$

da cui $\alpha = \sqrt{2}$. La soluzione è allora $y(x) = x\sqrt{2x^2 - 1}$.

Soluzione 5.10 - Integrando fra 0 e x si ottiene $y'(x) = 1 - \cos x + \cos 0 = 2 - \cos x$ e integrando nuovamente fra 0 e x si ottiene $y(x) = 1 + 2x - \operatorname{sen} x$.

Soluzione 5.11 - Moltiplichiamo per $2y'$, integriamo e otteniamo

$$y'(x) = \sqrt{\frac{2}{3} + \int_1^{y(x)} 2s^2 ds} = \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{2}{3}(y(x))^3 - \frac{2}{3}}$$

per cui separando le variabili

$$\frac{y'}{y^{3/2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,.$$

Integrando fra 2 e x

$$\int_2^{y(x)} \frac{y'(x)}{(y(x))^{3/2}} dx = \sqrt{\frac{2}{3}}\ (x-2)$$

cioè

$$-2\frac{1}{\sqrt{y(x)}} + 2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\ (x-2)$$

da cui si ricava

$$y(x) = \frac{9}{(3-(x-2))^2}\,.$$

Soluzione 5.12 - Sostituendo v al posto di y' si ottiene l'equazione del primo ordine

$$v' - \frac{1}{x}v = x^2 \operatorname{sen} x$$

che si integra con usando la formula (5.1) che fornisce

$$\begin{aligned} v(x) &= e^{-\int[-\frac{1}{x}]dx}\Big[\int e^{\int[-\frac{1}{x}]dx} x^2 \operatorname{sen} x\ dx + c\Big] = \\ &= |x|\Big[\int \frac{1}{|x|} x^2 \operatorname{sen} x\ dx + c\Big] = \\ &= |x|\Big[\int |x| \operatorname{sen} x\ dx + c\Big] = \\ &= -x^2 \cos x + x \operatorname{sen} x + c|x|\,. \end{aligned}$$

A questo punto è sufficiente integrare l'equazione

$$y'(x) = v(x) = -x^2 \cos x + x \operatorname{sen} x + c|x|$$

che fornisce l'espressione generale della soluzione dell'equazione

$$y(x) = -x^2 \operatorname{sen} x - 3x \cos x + 3 \operatorname{sen} x + c\frac{x|x|}{2} + c'\,.$$

Soluzione 5.13 - Ponendo $p(y) = y'$ si perviene all'equazione

$$p' = y\,.$$

Integriamo: anziché considerare una generica primitiva si può integrare fra estremi definiti. Partendo dai valori in $x_0 = 0$ si ha

$$\int_{y'(0)}^{p} p'(y)dy \Big(= \int_{y'(0)}^{p} dt \Big) = \int_{y(0)}^{y} z dz$$

cioè

$$p - 1 = \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}\,.$$

Ora sostituendo a p y' si ha

$$y' = \frac{y^2+1}{2}\,.$$

Integrando nuovamente (separando le variabili)

$$\int_{y(0)}^{y(x)} \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \frac{1}{2} dt$$

si ottiene

$$\operatorname{arctg} y(x) - \operatorname{arctg} 1 = \frac{1}{2} x$$

da cui infine si ricava

$$y(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Soluzione 5.14 - La soluzione è $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{t}$.

Soluzione 5.15 - Il polinomio $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ ha come soluzione -2 (con molteplicità due). La soluzione è $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}$.

Soluzione 5.16 - Il polinomio $\lambda^2 + 6\lambda + 10$ ha soluzioni complesse per cui la soluzione generale ha la forma $y(t) = c_1 e^{-3t} \cos 2t + c_2 e^{-3t} \operatorname{sen} 2t$.

Soluzione 5.17 - La soluzione è $y(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-3t}$.

Soluzione 5.18 - Si consideri il polinomio carattersistico

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda - 8$$

che si annulla per $\lambda = 2$. Dividendo il polinomio per $\lambda - 2$ si ottiene che

$$P(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 4)\,.$$

Quindi la soluzione generale è della forma

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 \cos 2t + c_3 \operatorname{sen} 2t\,.$$

Valutando le derivate prima e seconda di y e valutandole per $t = 0$ si ottiene

$$\begin{cases} y''(0) = 4c_1 - 4c_2 = 1 \\ y'(0) = 2c_1 + 2c_3 = 0 \\ y(0) = c_1 + c_2 \end{cases}$$

da cui si ricava che la soluzione è $y(t) = \dfrac{1}{8}e^{2t} - \dfrac{1}{8}\cos 2t - \dfrac{1}{8}\operatorname{sen} 2t$.

Soluzione 5.19 - La soluzione generale dell'omogenea è $c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t$. Utilizzando il metodo della variazione dei parametri, cerco una soluzione all'equazione data del tipo

$$y(t) = a(t)\cos t + b(t)\operatorname{sen} t$$

con a, b funzioni da determinarsi. Inserendo quest'espressione nell'equazione arriviamo all'equazione $y''(t) + y(t) = -a'(t)\operatorname{sen} t + b'(t)\cos t = \frac{1}{\cos t}$. Risolvo quindi il sistema

$$\begin{cases} a'(t)\cos t + b'(t)\operatorname{sen} t = 0 \\ -a'(t)\operatorname{sen} t + b'(t)\cos t = \dfrac{1}{\cos t}\,. \end{cases}$$

Ricavando a' dalla prima equazione e sostituendo nella seconda si ottiene l'equazione $b'(t) = 1$, da cui

$$\begin{cases} b(t) = t \\ a(t) = \log|\cos t|\,. \end{cases}$$

Quindi la soluzione generale dell'equazione è

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + \cos t \log|\cos t| + t \operatorname{sen} t$$

con $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.

Soluzione 5.20 - Il polinomio caratteristico $P(\lambda) = \lambda^4 - 16$ si annulla per $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 2i$, $\lambda_4 = -2i$. La famiglia delle soluzioni dell'equazione omogenea

$$P(D)y = (D^4 - 16)y = 0$$

è allora

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 \cos 2x + c_4 \operatorname{sen} 2x\,.$$

Anziché usare il metodo della variazione dei parametri (per esercizio risolvere l'equazione anche con questo metodo) possiamo più semplicemente osservare che un polinomio che annulla il dato $f(x) = x^2 + 1$ è $Q(D) = D^3$, infatti

$$Q(D)f = D^3 f = \frac{d^3}{dx^3}(x^2 + 1) = 0$$

(in generale un polinomio di grado $n-1$ è annullato dal polinomio $Q(D) = D^n$).
La soluzione generale di

$$D^3(D^4 - 16)y = 0$$

è del tipo

$$c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 \cos 2x + c_4 \operatorname{sen} 2x + c_5 + c_6 x + c_7 x^2 \,.$$

Cerchiamo quindi una soluzione all'equazione non omogenea del tipo $c_5 + c_6 x + c_7 x^2$. Quindi imponendo

$$(D^4 - 16)(c_5 + c_6 x + c_7 x^2) = x^2 + 1$$

si ottengono $c_5 = c_7 = -\frac{1}{16}$ e $c_6 = 0$. Per concludere la soluzione generale è $c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 \cos 2x + c_4 \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} x^2$.

Soluzione 5.21 - Il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$ che ha come radici 2 e 3 e l'equazione omogenea può essere scritta $(D^2 - 5D + 6)y = (D - 2)(D - 3)y = 0$ (da cui le soluzioni dell'omogenea sono del tipo $k_1 e^{2x} + k_2 e^{3x}$). Usando il metodo della variazione delle costanti o dei parametri cerchiamo soluzioni del tipo $c_1(x)e^{2x} + c_2 e^{3x}$ (c_1 e c_2 funzioni incognite). Si perviene al sistema di equazioni

$$\begin{cases} c_1' e^{2x} + c_2' e^{3x} = 0 \\ 2c_1' e^{2x} + 3c_2' e^{3x} = xe^x \,. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ottiene $c_1' = -c_2' e^x$ da cui, usando la seconda equazione, si ottiene l'espressione $c_2' = xe^{-2x}$. Quest'equazione risolta fornisce

$$c_2(x) = -\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + k_1$$

tramite la quale si trova anche

$$c_1(x) = xe^x + e^{-x} + k_2 \,.$$

Inserendo c_1 e c_2 nell'espressione generale si ottiene

$$(xe^x + e^{-x} + k_2)e^{2x} + (-\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + k_1)e^{3x} = k_1 e^{3x} + k_2 e^{2x} + \frac{3}{4} e^x + \frac{1}{2} x e^x \,.$$

Possiamo evitare di usare questo metodo se osserviamo che

$$(D-1)e^x = 0 \qquad \text{e} \qquad (D-1)^2 x e^x = (D-1)(D-1) x e^x = 0$$

(si osservi che in generale $(D-1)^{k+1} x^k e^x = 0$). Per cui la soluzione può essere cercata fra le soluzioni dell'equazione, detto $Q(\lambda)$ il polinomio $(\lambda - 1)^2$,

$$Q(D)P(D)y = (D-1)^2 (D^2 - 5D + 6)y = 0 \,.$$

Il polinomio $Q(\lambda)P(\lambda)$ ha come radici 2, 3, e 1, quest'ultima con molteplicità due. Per cui la soluzione $y(x)$ avrà la forma

$$c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^x + c_4 x e^x \,.$$

Applicando $P(D)$ a questa funzione si ottiene

$$(2c_3 - 3c_4)e^x + 2c_4 x e^x = x e^x$$

da cui si ricava che $c_4 = 1/2$ e $c_3 = 3/4$. Per cui la famiglia di soluzioni è data, al variare di $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$, da

$$c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} + \frac{3}{4} e^x + \frac{1}{2} x e^x \,.$$

Soluzione 5.22 - Le soluzioni dell'omogenea $y'' + y = 0$ si ottengono trovando le soluzioni del polinomio caratteristico $P(\lambda) = \lambda^2 + 1$ che sono i e $-i$. Per cui le soluzioni di

$$y'' + y = P(D)y = (D^2 + 1)y = 0$$

sono $c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t$. Per risolvere l'equazione completa cerco un polinomio (un operatore differenziale) che annulla il dato $f(t) = \operatorname{sen} t$. È ancora $D^2 + 1$, cioè

$$Q(D)f = (D^2 + 1)f = 0 \,.$$

Cerco y tra le soluzioni dell'equazione omogenea

$$Q(D)P(D)y = (D^2 + 1)^2 y = 0$$

(e non tra le soluzioni di $Q(D)y = (D^2 + 1)y = 0$ che sono le combinazioni lineari di $\operatorname{sen} t$ e $\cos t$). Le radici di QP sono i e $-i$ con molteplicità due, per cui la soluzione va cercata tra le funzioni della forma

$$c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t + c_3 t \operatorname{sen} t + c_4 t \cos t \,.$$

Applicando $P(D)$ alla famiglia di funzioni precedente si ha

$$\begin{aligned} &P(D)(c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t + c_3 t \operatorname{sen} t + c_4 t \cos t) = \\ &\qquad = P(D)(c_3 t \operatorname{sen} t + c_4 t \cos t) = 2c_3 \cos t - 2c_4 \operatorname{sen} t \end{aligned}$$

che deve essere uguale a $\operatorname{sen} t$. Per cui la generica soluzione è

$$y(t) = c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t - \frac{1}{2} t \cos t \,.$$

Soluzione 5.23 - L'equazione è del tipo $y' = f(x + 2y)$ dove $f(z) = (z-1)^2$. Conviene porre quindi $z(x) = x + 2y(x) - 1$ e scrivere

$$z' = 1 + 2y'$$

da cui

$$z' = 1 + 2z^2 \,.b$$

Si osservi che svolgendo il quadrato si ottiene $y' = 4y^2 + 4y(x-1) + x^2 - 2x + 1$ che non è di nessuno dei tipi visti precedentemente. Risolvendo 'eqauzione nella nuova variabile si ottiene, ponendo $t = \sqrt{2}z$,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{2}z'}{1+2z^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{1+t^2} dt = \int dx$$

da cui

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{2} z(x) = x + c \quad \Rightarrow \quad z(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg}\left(\sqrt{2}x + c'\right)$$

e quindi infine

$$y(x) = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg}\left(\sqrt{2}x + c'\right) + 1 - x\Big].$$

Soluzione 5.24 - Innanzitutto si deve avere $xy^2 \neq 0$. L'equazione è omogenea: infatti

$$\frac{xy^2 - 4x^3 + y^3}{xy^2} = 1 - 4\frac{x^2}{y^2} + \frac{y}{x} = f(y/x)$$

con $f(z) = 1 - 4\frac{1}{z^2} + z$. Effettuando il cambio di variabile $z = y/x$ si perviene a

$$z' = \frac{1}{x}\Big(\frac{z^2-4}{z^2}\Big).$$

Separando le variabile si vede che deve essere $z^2 \neq 4$. Suppondendo allora $z^2 \neq 4$ proseguiamo: scrivendo

$$\frac{z^2}{z^2-4} = \frac{z^2-4+4}{z^2-4} = 1 + \frac{1}{z+2} - \frac{1}{z-2}$$

integrando l'equazione si ottiene

$$z + \log|z+2| - \log|z-2| = z + \log\frac{z+2}{z-2} = \log|x| + c.$$

Per esercizio vedere che la funzione $g(z) = z + \log\frac{z+2}{z-2}$ è invertibile in $(-\infty, -2)$, in $(-2, 2)$, in $(2, +\infty)$. Per cui sicuramente è possibile scrivere

$$z(x) = \frac{y(x)}{x} = g^{-1}(\log|x| + c)$$

anche se la funzione g^{-1} non riusciamo a scriverla, possiamo mantenerci una scrittura *implicita* del tipo

$$\frac{y(x)}{x} + \log\frac{y(x)+2x}{y(x)-2x} = \log|x| + c. \tag{5.5}$$

Rimane ancora il caso $z^4 - 4 = 0$: in tal caso è semplice ottenere

$$y^2(x) = 4x^2$$

quindi le possibili soluzioni sono anche

$$y(x) = 2x\,, \qquad y(x) = -2x \tag{5.6}$$

Per cui se si avesse un problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{xy^2 - 4x^3 + y^3}{xy^2} \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

si sceglierebbe la soluzione data in (5.5) (la costante c va trovata) nell'intervallo $(2, +\infty)$ visto che se $x_0 = 1$, $y_0 = 3$ si ha che $z_0 = y_0/x_0 = 3 \in (2, +\infty)$. Se invece si avesse lo stesso problema con un dato differente

$$\begin{cases} y' = \dfrac{xy^2 - 4x^3 + y^3}{xy^2} \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

cioè $z_0 = 2$, la soluzione sarebbe $y(x) = 2x$.

Soluzione 5.25 - Dividendo per $1+x$ (che è positivo visto che siamo interessati ad una soluzione in $(0, +\infty)$) si ottiene l'equazione di Bernoulli

$$y' = -\frac{3}{1+x} - (1 - x^2)y^2$$

che risolta fornisce

$$y(x) = \frac{1}{x(1+x) + c(1+x)^3}\,.$$

Effettuando il limite richiesto si ha che

$$\lim_{x \to 0^+} y(x) = \frac{1}{c}$$

per cui l'unica soluzione che soddisfa la richiesta è quella per cui $c = 0$.

Soluzione 5.30 - La soluzione localmente esiste (motivare perché). Il dato $y(0) \neq 0$ quindi localmente la soluzione sarà diversa da zero, per cui possiamo dividere per y. Si ottiene

$$y'' - \frac{y'^2}{2y} - \frac{1}{2y} = 0\,.$$

Effettuando il cambio di variabile spiegato al punto 4. del paragrafo dedicato alle equazioni di secondo grado

$$p(y) = y'$$

si ottiene l'equazione nella incognita p (e nella variabile y)

$$\frac{pp'}{1+p^2} = \frac{1}{2y}\,.$$

Integrando si ha

$$\int_{y'(0)}^{y'(x)} \frac{t}{1+t^2}dt = \int_{y(0)}^{y(x)} \frac{1}{2t}dt$$

cioè

$$\frac{1}{2}\log(1+t^2)\Big|_{y'(0)}^{y'(x)} = \frac{1}{2}\log t\Big|_{y(0)}^{y(x)}$$

da cui

$$\log\left(y'(x)^2+1\right) = \log y(x) \qquad \Longrightarrow \qquad y'(x)^2+1 = y(x)\,.$$

Attenzione! ci sono quattro possibilità visto che

$$y'(x) \quad \text{può essere sia} \quad \sqrt{y(x)-1} \quad \text{che} \quad -\sqrt{y(x)-1}\,.$$

Intergrando

$$\int_{y(0)}^{y(x)} \frac{dt}{\sqrt{t-1}} = \pm\int_0^x dt$$

si ottiene che

$$2\sqrt{y(x)-1} \quad \text{può essere} \quad x \quad \text{oppure} \quad -x\,.$$

In ogni caso

$$y(x) = \frac{1}{4}x^2+1\,.$$

Soluzione 5.31 - Moltiplicando per $2y'$ e dividendo per y^5 si ottiene

$$\frac{d}{dt}(y')^2 = 2\frac{y'}{y^5} \qquad \Rightarrow \qquad (y')^2 = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{y^4}+c$$

da cui

$$y' = \pm\sqrt{\frac{2cy^4-1}{2y^4}}$$

per cui

$$\int \frac{\sqrt{2}y^2}{\sqrt{2cy^4-1}}dy = \pm x$$

che rimane in forma implicita.

Soluzione 5.32 - Se $ae = bd$ (il determinante della matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$) significa che le due rette $ax+by+c=0$ e $dx+ey+f=0$ sono parallele. Si può scrivere

$$\frac{ax+by+c}{dx+ey+f} = \frac{\frac{b}{e}(dx+ey)+c}{dx+ey+f}$$

e ponendo $z = dx + ey$ si perviene ad un'equazione a variabili separabili

$$\frac{z' - d}{e} = g\Big(\frac{\frac{b}{e}z + c}{z + f}\Big).$$

Se invece $ae \neq bd$ si ottiene un'equazione omogenea nel modo seguente: si cerca il punto d'incontro (x_0, y_0) fra le due rette $ax + by + c = 0$ e $dx + ey + f = 0$ (che in questo caso non sono parallele) risolvendo il sistema

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ dx + ey + f = 0\,. \end{cases}$$

Introcendo le nuove variabili $u = x - x_0$ e $v = y - y_0$ si può riscrivere

$$\frac{ax + by + c}{dx + ey + f} = \frac{a(x - x_0) + b(y - y_0) + ax_0 + by_0 + c}{d(x - x_0) + e(y - y_0) + dx_0 + ey_0 + f} = \frac{au + bv}{du + ev} = \frac{a + b\frac{v}{u}}{d + e\frac{v}{u}}$$

Ponendo $z(u) = \frac{v(u)}{u}$ $(y' = v')$ si perviene ad un'equazione

$$z(u) + uz'(u) = g\Big(\frac{a + bz}{d + ez}\Big).$$

Soluzione 5.33 - Si veda lo svolgimento dell'Esercizio 5.32 (si perviene alla forma implicita e quindi la soluzione è data nella forma implicita

$$\frac{2y(x)}{5} + \frac{7}{25}\ln|10x + 5y(x) + 9| = \frac{x}{5} + c\,).$$

Soluzione 5.34 - Si veda lo svolgimento dell'Esercizio 5.32 (si perviene alla forma implicita

$$\Big|\frac{y(x) + 4x + 1}{x + 1}\Big|^{2/5}\Big|\frac{y(x) - x - 4}{x + 1}\Big|^{3/5} = c|x + 1|\,).$$

Soluzione 5.35 - Innanzitutto si osservi che le soluzioni saranno infinite dal momento che manca il dato relativo a y' nel punto $x = 0$.
La funzione f è continua in x, non dipende da y e y' per cui il problema ammette soluzione. Denotiamo

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x) & x \in (0, \pi) \\ y_2(x) & x > \pi \end{cases}$$

La soluzione per $x \geqslant \pi$ $(f(x) = 0)$ è del tipo $c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$, per $0 \leqslant x \leqslant \pi$ $(f(x) = \operatorname{sen} x)$ è del tipo $d_1 \operatorname{sen} x + d_2 \cos x - \frac{1}{2}x\cos x$ (si veda lo svolgimento dell'ESERCIZIO 5.22). Per trovare y_1 inseriamo i dati iniziali nel punto $x = 0$: si ottengono

$$d_1 = 2\,, \qquad d_2 = 0\,.$$

Di conseguenza la soluzione sarà

$$y(x) = y_1(x) = 2\,\mathrm{sen}\,x - \frac{1}{2}x\cos x\,, \qquad \text{per } x \in [0, \pi]\,.$$

Per trovare y per $x > \pi$ consideriamo l'espressione generale della soluzione e poiché la soluzione in $(0, +\infty)$ deve essere C^2 (visto che f è continua) come dati iniziali imponiamo i valori di y_1 in $x = \pi$. Si ha che

$$y_1(\pi) = \frac{1}{2}\pi\,, \qquad y_1'(\pi) = -\frac{3}{2}\,.$$

Risolviamo

$$\begin{cases} y'' + y = 0 & x > \pi \\ y'(\pi) = -\dfrac{3}{2} & \\ y(\pi) = \dfrac{1}{2}\pi & \end{cases}$$

il che significa trovare c_1 e c_2. Imponendo i dati iniziali nell'espressione di y_2 si ha

$$c_2 = -\pi/2\,, \qquad c_1 = 3/2\,.$$

Concludendo la soluzione è

$$y(x) = \begin{cases} 2\,\mathrm{sen}\,x - \dfrac{1}{2}x\cos x & x \in [0, \pi] \\ \dfrac{3}{2}\,\mathrm{sen}\,x - \dfrac{\pi}{2}\cos x & x > \pi\,. \end{cases}$$

La soluzione è C^2 in quanto $y'' = f - y$ e sia f che y sono continue, da cui anche y'' è continua (verificarlo per esercizio).

Soluzione 5.36 - l'equazione proposta si presenta nella forma a variabili separabili, cioè

$$\cos y(x) y'(x) = 1 + 2x.$$

Integrando quindi ambo i membri tra 0 e x, si ottiene

$$\mathrm{sen}\,y(x) - \mathrm{sen}\,0 = x + x^2,$$

da cui

$$y(x) = \mathrm{arcsen}\,(x + x^2).$$

Soluzione 5.37 - Ponendo $z(x) = x + y'(x)$, l'equazione differenziale può essere riscritta nella forma

$$x + y' = (x + y')^2 - y'' - 1,$$

cioè

$$z = z^2 - z'.$$

Questa è una equazione differenziale del prim'ordine a variabili separabili, la cui soluzione è data da

$$\left| \frac{z(x) - 1}{z(x)} \right| = \alpha e^{x - x_0}, \quad \alpha > 0;$$

se imponiamo le condizioni iniziali, notiamo che possiamo togliere il modulo (perchè?) e troviamo che $\alpha = 1/2$ e quindi

$$z(x) = \frac{2}{2 - e^x}.$$

A questo punto il problema diventa

$$\begin{cases} x + y' = \frac{2}{2 - e^x} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Tale problema ha per soluzione la funzione

$$y(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(2 - e^x).$$

Soluzione 5.38 - Riscrivendo l'equazione nella forma

$$y'(x) = \frac{1 + (y(x)/x)^2}{y(x)/x},$$

ci riconduciamo ad una equazione di tipo omogeneo

$$y'(x) = f(y(x)/x).$$

In questo tipo di equazioni si pone $y(x) = xz(x)$, in modo che l'equazione diventi

$$xz'(x) + z(x) = f(z(x)),$$

che si riconduce ad una equazione a variabili separabili. Nel nostro caso troviamo che

$$z(x) = \pm\sqrt{2 \ln |x| + c}, \quad c > 0,$$

da cui la soluzione del problema iniziale è data da

$$y(x) = \pm x\sqrt{2 \ln |x| + c}.$$

Soluzione 5.39 - L'equazione proposta è una equazione di tipo Bernoulli;

dividendo infatti l'equazione per y^3 (si noti che tale operazione è lecita se si cercano soluzioni non nulle), si ottiene

$$4y^{-3}y' + y^{-2} = x^3 - 4x,$$

da cui, ponendo $z = y^{-2}$, si ricava l'equazione

$$-2z' + z = x^3 - 4x.$$

Questa è una equazione differenziale lineare a coefficienti non costanti, la cui soluzione è data da

$$z(x) = ce^{x/2} + x^3 + 6x^2 + 20x + 40.$$

La soluzione del problema sarà quindi data da

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{ce^{x/2} + x^3 + 6x^2 + 20x + 40}}.$$

Soluzione 5.40 - L'equazione data è una equazione lineare a coefficienti costanti; le soluzioni le cerchiamo quindi nella forma $y = e^{\lambda x}$. Quindi tali funzioni sono soluzioni se e solo se λ è una radice del polinomio caratteristico

$$P(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0;$$

polinomio può essere riscritto nella forma

$$P(\lambda) = (\lambda^2 + 1)(\lambda - 1)^2$$

e quindi le radici complesse sono date da $\lambda = 1$ (con molteplicità 2) e $\lambda = \pm i$. La soluzione generale sarà quindi data dalla funzione

$$y(x) = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{ix} + c_4e^{-ix}$$

con $c_i \in \mathbf{C}$, $i = 1, \ldots, 4$, oppure se si vogliono usare solo numeri reali

$$y(x) = c_1e^x + c_2xe^x + c_3 \operatorname{sen} x + c_4 \cos x, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}.$$

Soluzione 5.41 - L'equazione di terzo grado assegnata può essere ridotta ad una equazione del primo ordine con la sostituzione $v = y''$, da cui

$$v' = \frac{v}{(x+1)^3}.$$

Tale equazione ha per soluzione

$$|v(x)| = \alpha e^{-1/2(x+1)^2}, \quad \alpha > 0,$$

e quindi la soluzione del problema originale diventa

$$y(x) = \pm\alpha \int_{x_0}^{t} \int_{x_0}^{\tau} e^{-1/2(\tau+1)^2} d\tau dt + c_1 + c_2.$$

Soluzione 5.42 - Si noti che nell'equazione data non compare la dipendenza da x; in questo tipo di equazioni si cambia in qualche modo il punto di vista, e si vede la funzione y come variabile libera e si cerca di esprimere le varie derivate come derivate in funzione della variabile y. A tale scopo si introduce la funzione

$$z(y) = y'(x),$$

e si calcola la derivata rispetto a y di tale funzione in modo da ottenere

$$\frac{dz(y)}{dy} = \frac{dy'(x)}{dy} = \frac{dy'(x)}{dx}\frac{dx}{dy} = \frac{y''(x)}{y'(x)} = \frac{y''(x)}{z(y)},$$

e quindi si ottiene l'equazione differenziale

$$z\frac{dz}{dy} - \frac{z^2}{y} - y^3 = 0,$$

che può essere riscritta come

$$\frac{d(z^2)}{2dy} - \frac{z^2}{y} = y^3$$

otteniamo la soluzione

$$z^2(y) = y^2\left(c + y^2\right).$$

Si tratta quindi poi di risolvere l'equazione differenziale

$$(y'(x))^2 = y(x)^2\left(c + \frac{y^2}{2}\right).$$

Soluzione 5.43 - L'equazione data è di tipo lineare a coefficienti non costanti, la cui soluzione è data da

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x^1+2}}\left(c - \frac{1}{x^2 - x\sqrt{x^2+1}+1}\right).$$

Soluzione 5.44 - L'equazione data è una equazione lineare a coefficienti non costanti; applicando quindi la formula risolutiva si trova che

$$y(x) = cx^2 - \frac{2x+1}{2}.$$

Soluzione 5.45 - l'equazione data è una equazione di tipo Bernoulli; con la sostituzione $z = y^{-1}$, si ottiene l'equazione lineare a coefficienti non costanti

$$z' = \frac{x}{x^2-1}z + \frac{x}{x^2-1},$$

che ha per soluzione

$$z(x) = \sqrt{|x^2-1|}\left(c + \int \frac{t}{(t^2-1)\sqrt{|t^2-1|}}dt\right),$$

che produce, a seconda dei dati iniziali, una delle seguenti due soluzioni

$$z(x) = c\sqrt{x^2-1} - 1$$

$$z(x) = c\sqrt{1-x^2} - 1.$$

Quindi la soluzione originale sarà una delle due tra

$$\frac{1}{c\sqrt{x^2-1}-1}$$

e

$$\frac{1}{c\sqrt{1-x^2}-1}$$

Soluzione 5.46 - L'equazione data è di tipo Bernoulli, e quindi con la sostituzione $z = y^6$ si ottiene la soluzione

$$z(x) = \frac{1}{|x|}\left(c + \int 6t|t|dt\right).$$

Se cerchiamo la soluzione per $x > 0$, integrando e tornando alla funzione y, si ottiene

$$y(x) = \sqrt[6]{\frac{4x^3-c}{x^2}}.$$

Soluzione 5.47 - L'equazione data è a variabili separabili

$$\frac{y'}{y} = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}},$$

e quindi la soluzione è data da

$$|y(x)| = c\sqrt{e^{2x}+1}, \quad c > 0.$$

Soluzione 5.48 - Riscrivendo l'equazione nella forma

$$y'e^y e^x = -x,$$

notiamo che siamo ricondotti ad una equazione a variabili separabili, la cui soluzione è data da

$$y(x) = \ln(c + (x+1)e^{-x}).$$

Soluzione 5.49 - L'equazione data può essere ricondotta ad una equazione di tipo omogeneo

$$y' = \frac{1 + (y/x)^3}{(y/x)^2},$$

che con la sostituzione $y = xz$ si riconduce all'equazione a variabili separabili

$$z + xz' = \frac{1 + z^3}{z^2},$$

la cui soluzione è data da

$$z(x) = \sqrt[3]{c + 3\ln|x|}.$$

Si tratta quindi poi di porre

$$y'(x) = xz(x) = x\sqrt[3]{c + 3\ln|x|}.$$

Soluzione 5.50 - L'equazione data può essere riscritta come

$$y'y'' = -x$$

o meglio ancora come

$$\frac{d(y')^2}{2dx} = -x.$$

Integrando quindi tra il punto iniziale $x_0 = 0$ e x, si ottiene che

$$\int_0^x \frac{d(y'(t))^2}{2dx} dt = -\int_0^x t dx,$$

da cui si ricava, tenendo presente che $y'(0) = 1 > 0$,

$$y'(x)^2 = 1 - x^2 \Rightarrow y'(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

La soluzione sarà quindi data da, tenendo presente che $y(0) = 1$,

$$y(x) = 1 + \frac{\operatorname{arcsen} x}{2} + \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{2}.$$

Soluzione 5.51 - Notando che nell'equazione non compare la y, si può porre $v = y'$ in modo da ottenere un'equazione lineare a coefficienti non costanti

$$\begin{cases} v' = \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) v - \frac{x+2}{x+1} \\ v(0) = 1 \end{cases}$$

la cui soluzione è data da

$$v(x) = 1.$$

La soluzione del problema iniziale sarà quindi data da

$$y(x) = x.$$

Soluzione 5.52 - Nell'equazione data non compare la variabile x, quindi si può introdurre la funzione $z(y) = y'(x)$; con questa sostituzione otteniamo

$$\dot{z}(y) = \frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dy} = \frac{y''}{z},$$

si ottiene l'equazione

$$\begin{cases} \dot{z} = \frac{z}{y} + y, \\ z(1) = z(y(0)) = y'(0) = 1; \end{cases}$$

la soluzione di tale equazione è data da

$$z(y) = y^2.$$

Si tratta ora di risolvere il problema

$$\begin{cases} y'(x) = y(x)^2 \\ \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

la cui soluzione è data da

$$y(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Soluzione 5.53 - Come nell'esercizio precedente, nell'equazione non compare la variabile x e quindi si pone $z(y) = y'$; si ottiene quindi che

$$|z(y) + 1| = c|y|, \quad c > 0,$$

e quindi il problema è risolto se si risolve l'equazione

$$|y' + 1| = c|y|,$$

dove la possibilità di togliere o meno il modulo dipenderà dai dati iniziali; avremo quindi le due possibili soluzioni

$$|cy(x) - 1| = \alpha e^{x}, \quad c, \alpha > 0$$

$$|cy(x) + 1| = \alpha e^{-x}, \quad c, \alpha > 0.$$

Soluzione 5.54 - L'equazione può essere riscritta nella forma

$$y'' - y' = 3x;$$

la soluzione dell'omogenea data da

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{x},$$

mentre per la soluzione particolare si applica il Teorema 5.23 delle dispense e si trova la funzione

$$y_1(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 3x.$$

La soluzione, imponendo le condizioni iniziali, sarà quindi determinata da

$$y(x) = 4e^{x} - \frac{3}{2}x^2 - 3x - 3.$$

Soluzione 5.55 - La soluzione dell'omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x/2};$$

per la determinazione della soluzione particolare applichiamo il Teorema 5.23 delle dispense ed otteniamo la funzione

$$y_1(x) = \left(\frac{4}{5}x - \frac{12}{25}\right) e^{2x}.$$

La soluzione generale sarà quindi data da

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x/2} + \left(\frac{4}{5}x - \frac{12}{25}\right) e^{2x}.$$

Soluzione 5.56 - La soluzione dell'omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x;$$

per quanto riguarda la soluzione particolare si trova che

$$y_1(x) = \frac{x}{4} \operatorname{sen} x - \frac{x^2}{4} \cos x,$$

e quindi la soluzione generale è data da

$$y(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x + \frac{x}{4} \operatorname{sen} x - \frac{x^2}{4} \cos x.$$

Soluzione 5.57 - L'equazione differenziale può essere riscritta nella forma

$$3y'' - y' + y = 0,$$

e quindi si tratta di una equazione differenziale del secondo ordine lineare omogenea a coefficienti costanti. Il suo polinomio caratteristico è dato da

$$P(\lambda) = 3\lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1/6 - i\sqrt{11}/6)(\lambda - 1/6 + i\sqrt{11}/6);$$

la soluzione generale sarà quindi data da

$$y(x) = e^{x/6} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{11}}{6} x + c_2 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{11}}{6} x \right).$$

Soluzione 5.58 - La soluzione dell'equazione omogenea è data da

$$y_0(x) = e^x (c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x).$$

Usando il Teorema 5.23 delle dispense, si trova che la soluzione particolare è data da

$$y_1(x) = xe^{7x} \left((ax^2 + bx + c) \cos 2x + (dx^2 + ex + f) \operatorname{sen} 2x \right).$$

La soluzione generale sarà data dalla somma delle due.

Soluzione 5.59 - La soluzione dell'equazione omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x;$$

per quanto riguarda la soluzione particolare, si applica il Teorema 5.23 delle dispense, si ottiene

$$y_1(x) = \frac{1}{3} \cos x.$$

A questo punto, imponendo le condizioni iniziali, si ottiene la soluzione

$$y(x) = \frac{1}{3} \operatorname{sen} 2x + \cos 2x + \frac{1}{3} \operatorname{sen} x.$$

Soluzione 5.60 - La soluzione dell'omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x;$$

per calcolare la soluzione particolare scriviamo

$$2x\cos x\cos 2x = 4x\cos^3 x - 2x\cos x,$$

e quindi applicando il principio di sovrapposizione, cioè tenendo conto che la soluzione particolare di una somma di funzioni è data dalla somma delle soluzioni particolari, dal Teorema 5.23 delle dispense, si ricava che le soluzioni particolari sono date da

$$y_1(x) = \frac{x}{4}\cos x + \frac{x^2}{4}\operatorname{sen} x,$$

$$y_2(x) = \frac{3}{32}\operatorname{sen} 3x - \frac{x}{8}\cos 3x.$$

La soluzione generale sarà quindi data da

$$y(x) = c_1\operatorname{sen} x + c_2\cos x + \frac{x}{4}\cos x + \frac{x^2}{4}\operatorname{sen} x + \frac{3}{32}\operatorname{sen} 3x - \frac{x}{8}\cos 3x.$$

Soluzione 5.61 - La soluzione dell'omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x};$$

per calcolare la soluzione generale si applica il metodo della variazione delle costanti, per ottenere la soluzione

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + x e^{-x}\ln|x|.$$

Soluzione 5.62 - La soluzione dell'equazione omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x};$$

per quanto riguarda la soluzione particolare, usando il metodo della variazioni delle costanti, si trova che la soluzione generale è data da

$$y(x) = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x} + e^{x^2}.$$

Soluzione 5.63 - La soluzione dell'equazione omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x},$$

mentre per il calcolo della soluzione particolare usiamo il principio di sovrapposizione delle soluzioni, e cioè utilizziamo il fatto che quando il termine forzante, la parte non omogenea dell'equazione differenziale, è somma di più funzioni, allora la soluzione particolare può essere determinata sommando le varie soluzioni particolari. Utilizzando questo principio, abbiamo che associata a $x^2 + 1$ la soluzione particolare è data da

$$y_1(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2,$$

mentre associata a $3xe^x$ la soluzione particolare è data da

$$y_2(x) = e^x \left(\frac{3}{2}x - \frac{15}{4} \right).$$

La soluzione generale sarà quindi data da

$$y(x) = c_1 + c_2x + c_3e^{-x} + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + e^x \left(\frac{3}{2}x - \frac{15}{4} \right).$$

Soluzione 5.64 - La soluzione dell'equazione omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 + c_2x + c_3e^x + c_4xe^x,$$

mentre una soluzione particolare, grazie al Teorema 5.23 delle dispense, sarà data da

$$y_1(x) = \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + 3x^3 + 12x^2;$$

la soluzione generale sarà quindi data da

$$y(x) = c_1 + c_2x + c_3e^x + c_4xe^x + \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + 3x^3 + 12x^2.$$

Soluzione 5.65 - La soluzione dell'equazione omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1e^{-x} + e^{-x/2} \left(c_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}x \right)$$

mentre la soluzione particolare, ottenuta usando il metodo illustrato nel Teorema 5.23 delle dispense, è data da $y_1 = x - 2$. Imponendo infine le condizioni iniziali, si trova che la soluzione è data dalla funzione

$$y(x) = e^{-x} + e^{-x/2} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + x - 2.$$

Capitolo 6

Integrali

Integrali multipli

Esercizio 6.1 - Integrare la funzione $f(x,y) = y(x^2 + \operatorname{sen} x) + e^x$ sull'insieme $Q = (0,\pi) \times (0,3)$.

Esercizio 6.2 - Calcolare $\displaystyle\int_E (x^2 + y)dxdy$ dove $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant x^2\,,\ 0 \leqslant x \leqslant 2\}$.

Esercizio 6.3 - Calcolare l'integrale

$$\int_E (x^2 - 3y^2) \operatorname{sen}(xy) dxdy$$

dove $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geqslant -3\,,\ y \leqslant 3\,,\ y \geqslant x\}$.

Esercizio 6.4 - Calcolare $\displaystyle\int_E \frac{x}{x^2 + y^2}$ dove $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leqslant x \leqslant 2\,,\ x^2/2 \leqslant y \leqslant x^2\}$.

Esercizio 6.5 - Calcolare $\displaystyle\int_E x dxdy$ dove $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 4\,, x^2 + y^2 \geqslant 1\,, 0 \leqslant y \leqslant 1\,, x \geqslant 0\}$.

Esercizio 6.6 - Calcolare l'integrale

$$\int_E x^3 y^5 dxdy$$

dove $E = E_1 \cup E_2$ con

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\,,\, -1 \leqslant y \leqslant x^2\} \\ E_2 &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geqslant 1\,,\, x^2 + y^2 - 2x \leqslant 0\} \end{aligned}$$

Esercizio 6.7 - Calcolare $\displaystyle\int_E \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ dove $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \geqslant x\,, 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2\}$.

Esercizio 6.8 - Calcolare $\displaystyle\int_E \frac{\operatorname{tg}(x+y)}{x+y} dxdy$ dove $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < x + y \leqslant 1\,, x, y > 0\}$.

Esercizio 6.9 - Calcolare $\displaystyle\int_E (x+y) dxdy$ dove $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < x < y < 2x\,, 1 < xy < 2\,\}$.

Esercizio 6.10 - Calcolare $\displaystyle\int_E x^2(y-x^3)e^{y+x^3} dxdy$ dove $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^3 \leqslant y \leqslant 3\,, x \geqslant 1\}$.

Esercizio 6.11 - Calcolare $\displaystyle\int_E \frac{3}{x^2y^2} dxdy$ dove $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > 1/x\,, x \leqslant y \leqslant 4x\}$.

Esercizio 6.12 - Determinare per quali valori del parametro reale $\alpha \in \mathbf{R}$ risulta integrabile la funzione $f(x,y) = (x^2+y^2)^{-\alpha}$ su $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$.

Esercizio 6.13 - Calcolare $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$ (Suggerimento; considerare la funzione $f(x,y) = \operatorname{sen} x e^{-xy}$ e integrarla sull'insieme $[0,+\infty) \times [0,+\infty)$).

Esercizio 6.14 - Calcolare l'area della regione S compresa tra le curve

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x = 0 \\ \varrho^2 = 2\cos 2\vartheta, \quad \vartheta \in [-\pi/4, \pi/4]. \end{cases}$$

Esercizio 6.15 - Trovare il volume del tetraedro T di vertici $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$.

Esercizio 6.16 - Determinare il volume dell'intersezione dei due cilindri

$$C_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\,\}\,, \qquad C_2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leqslant 1\,\}\,.$$

Esercizio 6.17 - Determinare il volume del toro di raggio R ottenuto ruotando una circonferenza di raggio r.

Esercizio 6.18 - Determinare il volume del solido

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 9(1-\sqrt{x^2+z^2})^2 + 4y^2 \leqslant 1\}.$$

Esercizio 6.19 - Calcolare il volume del solido

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\,, x^2+y^2-2 \leqslant z \leqslant 4-x-y\}.$$

Esercizio 6.20 - Calcolare $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2}dx$ (suggerimento: calcolare in $\mathbf{R}^2$ l'integrale di $e^{-x^2-y^2}$).

Esercizio 6.21 - Determinare l'area dell'ellisse racchiusa dalla curva $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Esercizio 6.22 - Determinare il volume della regione interna sia alla superficie

$$x^2+y^2+z^2 = 4a^2$$

che alla superficie cilindrica

$$x^2+(y-a)^2 = a^2\,.$$

Esercizio 6.23 - Nell'integrale

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$$

si scambi l'ordine di integrazione, cioè si lasci libera la variabile y e si scriva x in dipendanza da y.

Esercizio 6.24 - Calcolare il volume della porzione di cono ($\alpha > 0$)

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; \alpha(x^2+y^2) \leqslant z^2, 0 \leqslant z \leqslant h\right\}$$

Esercizio 6.25 - Si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_S \frac{x^2}{x^2+z^2}dxdydz$ dove

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2 < 2, x^2-y^2+z^2 < 0, y > 0\right\}\,.$$

Esercizio 6.26 - Calcolare, se esiste, l'integrale $\displaystyle\int_E f(x,y)dxdy$ dove

$$f(x,y) = \operatorname{sen}\frac{\pi x}{x+y}\,, \qquad E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x < y < 2x,\ 0 < x+y < 2\}\,.$$

Esercizio 6.27 - Calcolare il seguente integrale

$$\int_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} \operatorname{sen}(x+y+z)dxdydz.$$

Esercizio 6.28 - Calcolare il seguente integrale

$$\int_E e^{\frac{x+y}{\sqrt{2}}}\,dxdydz$$

dove

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1\right\}.$$

Integrali di superficie

Esercizio 6.29 - Calcolare l'area della superficie della sfera

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2 = r^2\right\}.$$

Esercizio 6.30 - Calcolare l'area della superficie

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2 \leqslant 1\,, x^2+y^2-z=0\right\}.$$

Esercizio 6.31 - Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int_\Sigma \frac{z+y^2}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}}\,d\sigma$$

dove

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = x^2-y^2\,, x^2+y^2 \geqslant 1\,, x^2+4y^2 \leqslant 4\}.$$

Esercizio 6.32 - Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int_\Sigma \frac{x}{\sqrt{4z+1}}\,d\sigma$$

dove Σ è la superficie

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = x^2+y^2\,, x^2+y^2-y \leqslant 0\,, y \geqslant 1/2\,, x \geqslant 0\}.$$

Flussi

Esercizio 6.33 - Calcolare l'area del cerchio di raggio $r > 0$.

Esercizio 6.34 - Calcolare il flusso del campo

$$F(x,y,z) = (x^3e^{-z}, 3xz, 3x^2e^{-z})$$

uscente dall'emisfero superiore della sfera di equazione $x^2+y^2+z^2 \leqslant 16$.

ESERCIZIO 6.35 - Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (x^2, y, z)$$

uscente dal tetraedro $T = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x,y,z \geqslant 0\,,\, x+y+z \leqslant 1\}$.

ESERCIZIO 6.36 - Calcolare il flusso del campo

$$F(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{\,3}}(x,y,z)$$

uscente da una qualsiasi superficie chiusa contenente all'interno l'origine (Legge di Gauss).

ESERCIZIO 6.37 - Calcolare il flusso del campo

$$F(x,y,z) = (x+y, z-y, x^3 y)$$

sulla superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = x^2+y^2\,,\, x^2+y^2 \leqslant 4\}$.

Soluzioni

Soluzione 6.1 - Essendo il dominio un rettangolo si può scrivere

$$\int_Q f(x,y)dxdy = \int_0^\pi \Big(\int_0^3 f(x,y)dy\Big)dx = \int_0^3 \Big(\int_0^\pi f(x,y)dx\Big)dy$$

e integrare indifferentemente prima rispetto ad una variabile e poi rispetto all'altra. Scegliamo di integrare prima rispetto alla variabile y:

$$\begin{aligned}
\int_Q f(x,y)dxdy &= \int_0^\pi \Big(\int_0^3 [y(x^2+\operatorname{sen} x)+e^x]dy\Big)dx \\
&= \int_0^\pi \Big(\frac{y^2x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\operatorname{sen} x + ye^x\Big)\Big|_0^3 dx \\
&= \int_0^\pi \Big(\frac{9x^2}{2}+\frac{9}{2}\operatorname{sen} x + 3e^x\Big)dx \\
&= \Big(\frac{9x^3}{6}-\frac{9}{2}\cos x + 3e^x\Big)\Big|_0^\pi \\
&= \frac{9\pi^3}{6}+\frac{9}{2}-\frac{9}{2}+3e^\pi-3\,.
\end{aligned}$$

Soluzione 6.2 - L'insieme E è quello rappresentato in Figura 6.1. Scegliendo

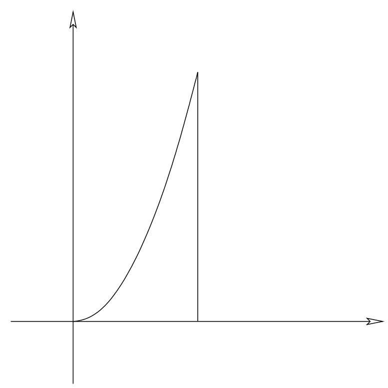

Figura 6.1:

x come variabile libera si può scrivere l'integrale

$$\int_0^2 dx\Big(\int_0^{x^2}(x^2+y)dy\Big)$$

che diventa

$$\int_0^2 dx\Big(x^2y+\frac{y^2}{2}\Big)\Big|_{y=0}^{y=x^2} = \int_0^2 \frac{3}{2}x^4dx = \frac{48}{5}\,.$$

Scegliendo y come variabile libera l'integrale diventa (svolgerlo per esercizio)

$$\int_0^4 dy \Big(\int_{\sqrt{y}}^2 (x^2 + y) dx \Big) \,.$$

Soluzione 6.3 - Il dominio di integrazione è normale rispetto ad entrambe le variabili; scrivendo

$$\int_E (x^2 - 3y^2) \operatorname{sen}(xy) dxdy = \int_E x^2 \operatorname{sen}(xy) dxdy - 3 \int_E y^2 \operatorname{sen}(xy) dxdy$$

conviene tenere nel primo integrale come variabile libera la x, mentre nel secondo conviene tenere come variabile libera la y; quindi

$$\begin{aligned}
\int_E (x^2 - 3y^2) \operatorname{sen}(xy) dxdy &= \int_{-3}^3 x^2 \int_x^3 \operatorname{sen}(xy) dydx + \\
&\quad -3 \int_{-3}^3 y^2 \int_{-3}^y \operatorname{sen}(xy) dxdy \\
&= \int_{-3}^3 (x \cos x^2 - x \cos 3x) dx + \\
&\quad -3 \int_{-3}^3 (y \cos 3y - y \cos y^2) dy = 0,
\end{aligned}$$

in quanto integrali di funzioni dispari su intervalli simmetrici rispetto all'origine.

Soluzione 6.4 - Scegliendo x come variabile libera, l'integrale diventa

$$\begin{aligned}
\int_E \frac{x}{x^2 + y^2} dxdy &= \int_1^2 \left(\int_{x^2/2}^{x^2} \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right) dx \\
&= \int_1^2 (\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} x/2) \, dx \\
&= \left[x \, (\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} x/2) + \log \left(\frac{x^2 + 4}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \right]_1^2 \\
&= 2\operatorname{arctg} 2 - \frac{3}{4}\pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \log \frac{8}{5} \sqrt{\frac{3}{5}}.
\end{aligned}$$

Soluzione 6.5 - Se scegliamo x come variabile libera dobbiamo spezzare in tre l'integrale (in tre insiemi come indicato in Figura 6.2). Conviene quindi

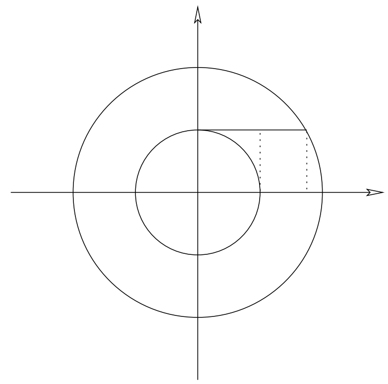

Figura 6.2:

scegliere y come variabile libera:

$$\begin{aligned}\int_E f(x,y)dxdy &= \int_0^1 \Big(\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} xdx\Big)dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}\big(4-y^2-(1-y^2)\big)dy = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Soluzione 6.6 - Notiamo anzitutto che la funzione integranda è dispari rispetto ad entrambe le variabile, inoltre il dominio E_1 è simmetrico rispetto all'asse y mentre E_2 è simmetrico rispetto all'asse x, quindi

$$\int_E x^3y^5dxdy = \int_{E_1} x^3y^5dxdy + \int_{E_2} x^3y^5dxdy = 0.$$

Soluzione 6.7 - L'insieme di integrazione non è normale rispetto a nessuna delle due variabili; notiamo però che se passiamo alle coordinate polari, esso diventa, nelle variabili ϱ e ϑ, il rettangolo $[1,\sqrt{2}]\times[\pi/4,5\pi/4]$. Otteniamo quindi che

$$\begin{aligned}\int_E \frac{xy^2}{x^2+y^2}dxdy &= \int_{[1,\sqrt{2}]\times[\pi/4,5\pi/4]} \frac{\varrho\cos\vartheta\,\varrho^2\operatorname{sen}^2\vartheta}{\varrho^2}\varrho d\varrho d\vartheta \\ &= \int_1^{\sqrt{2}}\int_{\pi/4}^{5\pi/4} \varrho^2\cos\vartheta\operatorname{sen}^2\vartheta d\vartheta d\varrho \\ &= \frac{\sqrt{2}-4}{18}.\end{aligned}$$

Soluzione 6.8 - Notiamo che il dominio di integrazione è normale rispetto ad entrambe le variabili, però la funzione integranda $\operatorname{tg} t/t$ non ammette primitiva; proviamo quindi ad effettuare. Cerchiamo un cambio di variabili tale che la matrice del cambiamento di coordinate abbia determinante 1; un possibile cambio di variabili di questo tipo si può ottenere ponendo $u = x + y$, $v = x$. Nelle variabili (u, v) l'insieme E diventa $\{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < u \leqslant 1\,, 0 < v < u\}$, e quindi

$$\begin{aligned} \int_E \frac{\operatorname{tg}(x+y)}{x+y} dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^u \frac{\operatorname{tg} u}{u} dv \right) du = \int_0^1 \operatorname{tg} u du \\ &= -\log\cos 1. \end{aligned}$$

Soluzione 6.9 - L'insieme E è quello in Figura 6.3. Si può svolgere il calcolo

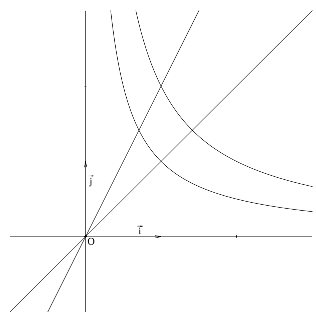

Figura 6.3:

in coordianate cartesiane, ma è più semplice effettuare il cambio di coordinate

$$u = xy\,, \qquad v = \frac{y}{x}$$

da cui si ricava che

$$x = \sqrt{\frac{u}{v}}\,, \qquad y = \sqrt{uv}\,.$$

Lo jacobiano di tale trasformazione è dato da $1/2v$ per cui si ottiene

$$\int_1^2 dv \int_1^2 du \Big(\sqrt{uv} + \sqrt{\frac{u}{v}}\Big) \frac{1}{2v}$$

che svolto dà il risultato.

Soluzione 6.10 - Se effettuiamo la sostituzione $u = y - x^3$, $v = y + x^3$, notiamo che la funzione $F(x, y) = (y - x^3, y + x^3)$ è una applicazione differenziabile con

$$|\det DF(x, y)| = \left| \det \begin{pmatrix} 3x^2 & 1 \\ -3x^2 & 1 \end{pmatrix} \right| = 6x^2,$$

e quindi eccettuato i punti in cui $x = 0$, la funzione F è un diffeomorfismo. Notiamo che sull'insieme E si ha $x \geqslant 1$, e quindi possiamo applicare la formula di cambiamento di variabili, tenendo presente che nelle variabili (u, v) l'insieme E diventa $\{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leqslant u \leqslant 1\,, u + 4 \leqslant v \leqslant 6 - u\}$,

$$\begin{aligned}
\int_E x^2(y - x^3)e^{y+x^3}dxdy &= \frac{1}{6}\int_E |\det DF(x, y)|(y - x^3)e^{y+x^3}dxdy \\
&= \frac{1}{6}\int_0^1 \left(\int_{u+4}^{6-u} ue^v dv\right) du \\
&= -\frac{e^5 + e^4}{6}.
\end{aligned}$$

Soluzione 6.11 - Passando alle coordinate polari, l'insieme E diventa $\{(\vartheta, \rho) \in \mathbf{R}^2 \mid \pi/4 \leqslant \vartheta \leqslant \operatorname{arctg} 4\,, \rho \geqslant 1/\sqrt{\cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta}\}$; quindi l'integrale diventa

$$\begin{aligned}
\int_E \frac{3}{x^2y^2}dxdy &= \int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 4} d\vartheta \int_{1/\sqrt{\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta}} \frac{3}{\rho^4\cos^2\vartheta\operatorname{sen}^2\vartheta}\rho d\rho \\
&= \frac{3}{2}\int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 4} \frac{1}{\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta}d\vartheta \\
&= 3\log 2.
\end{aligned}$$

Soluzione 6.12 - Passando alle coordinate polari otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_E \frac{1}{(x^2 + y^2)^\alpha}dxdy &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \frac{\rho}{\rho^{2\alpha}}d\rho \\
&= 2\pi\int_0^1 \frac{1}{\rho^{2\alpha-1}}d\rho,
\end{aligned}$$

e quindi la funzione sarà integrabile per $\alpha < 1$.

Soluzione 6.13 - Se integriamo la funzione $f(x, y) = \operatorname{sen} x e^{-xy}$ su $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$ prima rispetto a y otteniamo

$$\int_{[0,+\infty)\times[0,+\infty)} f(x, y)dydx = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx,$$

mentre se integriamo prima rispetto a x si ottiene

$$\int_0^{\infty}\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x e^{-xy}dxdy = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + y^2}dy = \frac{\pi}{2},$$

da cui si ricava che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

Soluzione 6.14 - Riscrivendo la prima curva, che è una circonferenza centrata in $(1/2, 0)$ e raggio $1/2$, in coordinate polari, abbiamo che essa è descritta dall'equazione

$$\rho = \cos\vartheta, \vartheta \in [-\pi/2, \pi/2].$$

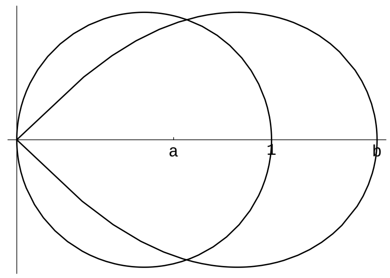

Figura 6.4:

Notando a questo punto che il dominio S di cui si vuole calcolare l'area è simmetrico rispetto all'asse x (si veda la figura (6.4)), la sua area sarà data da

$$\text{Area}(S) = 2\text{Area}(S'),$$

dove S' è individuata, nelle coordinate polari, da $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi/4$. Cerchiamo anzitutto l'angolo ϑ_0 per il quale le due curve si incontrano; esso sarà individuato dalla condizione

$$\cos^2\vartheta = 2\cos 2\vartheta,$$

che ha come soluzione

$$\operatorname{sen}\vartheta_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\vartheta_0 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

L'area di S' sarà quindi data da

$$\begin{aligned}
\text{Area}(S') &= \int_{S'} dxdy = \int_{S'} \varrho d\varrho d\vartheta \\
&= \int_0^{\vartheta_0} d\vartheta \int_0^{\cos\vartheta} \varrho d\varrho + \int_{\vartheta_0}^{\pi/4} d\vartheta \int_0^{\sqrt{2\cos 2\vartheta}} \varrho d\varrho \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{8} + \frac{\pi}{16} - \frac{\vartheta_0}{4}.
\end{aligned}$$

In definitiva

$$\text{Area}(S) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8} - \frac{\vartheta_0}{2}.$$

Soluzione 6.15 - Il tetraedro è il solido delimitato dai quattro piani $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x+y+z = 1$ e rappresentato in Figura 6.5. Per calcolare il volume

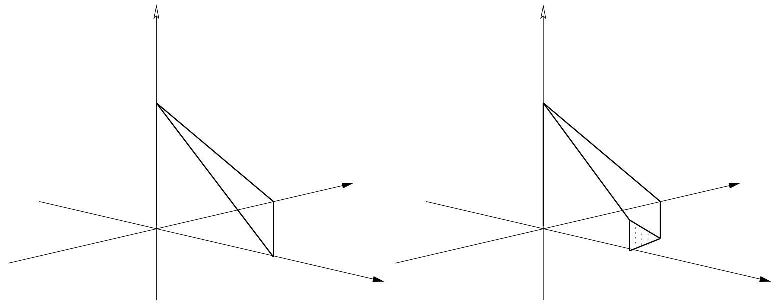

Figura 6.5:

di un solido S (e in generale la misura n-dimensionale di un aperto in $\mathbf{R}^n$) si può calcolare l'integrale della funzione 1 sull'insieme S. Per cui valutiamo

$$\int_T dxdydz\,.$$

Scegliendo x come variabile libera si hanno le limitazioni $0 \leqslant x \leqslant 1$. Per x fissato ora esprimiamo gli estremi per y e z (si veda il secondo disegno in Figura 6.5). Scegliendo y si ottiene $0 \leqslant y \leqslant 1-x$ e infine $0 \leqslant z \leqslant 1-x-y$. Quindi

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}\,(T) &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy(1-x-y) \\
&= \int_0^1 dx\,(y - xy - y^2/2)\Big|_{y=0}^{y=1-x} \\
&= \int_0^1 \left[1 - 2x + x^2 - \frac{x^2-2x+1}{2}\right] dx = \frac{1}{6}\,.
\end{aligned}$$

Soluzione 6.16 - Chiamando V il solido dato dall'intersezione di C_1 e C_2 si ha

$$\int_V dx\,dy\,dz = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} dz = \frac{16}{3}\,.$$

Soluzione 6.17 - Il toro è una figura la cui superficie può essere ottenuta ruotando una circonferenza di raggio r su una circonferenza di raggio R ortogonale alla prima, $0 < r < R$ per ottenere una figura come quella a sinistra

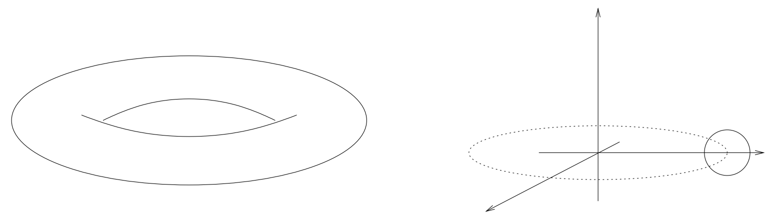

Figura 6.6:

in Figura 6.6. In generale per calcolare il volume di un solido di rotazione, cioè un solido la cui superficie si ottiene ruotando una curva $(z, f(z))$ nel piano con $f > 0$ (si veda la Figura 6.7), si possono usare le coordinate cilindriche. Considerando $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, $f \geqslant 0$, e il solido ottenuto ruotando il grafico di f,

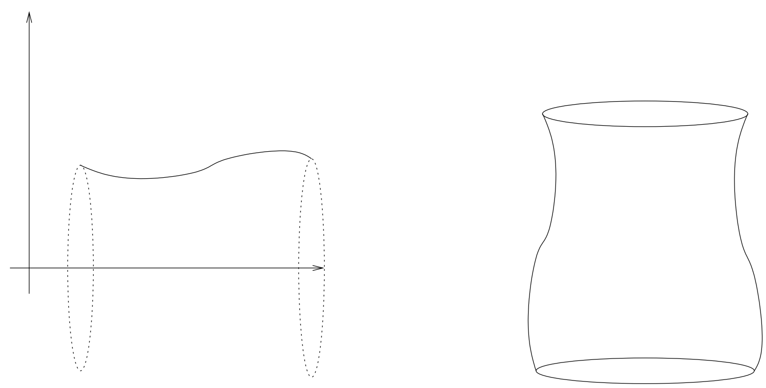

Figura 6.7:

descriviamo il solido con le coordinate

$$(\rho, \vartheta, z) \mapsto (\rho \cos \vartheta, \rho \operatorname{sen} \vartheta, z)$$

il cui jacobiano è ρ. Se denotiamo con S il solido, integrando si ha

$$\operatorname{Vol}(S) = \int_a^b dz \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{f(z)} \rho \, d\rho = \pi \int_a^b f^2(z) dz \, .$$

Per calcolare il volume del toro consideriamo quindi le funzioni $f(z) = \sqrt{r^2 - z^2} + R$ e $g(z) = -\sqrt{r^2 - z^2}$ definite tra $-r$ e r valutando prima l'integrale di f^2 al quale sottraiamo l'integrale di g^2. Si ha quindi

$$\pi \int_{-r}^{r} [f^2(z) - g^2(z)] dz = 4R\pi^2 \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - z^2} dz \, .$$

Si noti che l'integrale da calcolare fornisce l'area del semicerchio, per cui il volume del toro è dato da

$$4R\pi\frac{\pi r^2}{2} = 2\pi^2 Rr^2 .$$

Si noti che questa quantità è data dal prodotto dell'area del cerchio piccolo πr^2 moltiplicata per la lunghezza della circonferenza grande $2\pi R$.

Soluzione 6.18 - Notiamo che l'insieme dato è invariante per rotazioni attorno all'asse y, quindi possiamo provare a passare alle coordinate cilindriche con asse lungo l'asse y, cioè

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\vartheta \\ y = t \\ z = \varrho\,\mathrm{sen}\,\vartheta. \end{cases}$$

In queste nuove coordinate l'insieme E risulta essere determinato da

$$\left\{(\vartheta,\varrho,t) \in [0,2\pi)\times\mathbf{R}^2 \;\middle|\; -\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, 1-\frac{\sqrt{1-4t^2}}{3} \leqslant \varrho \leqslant 1+\frac{\sqrt{1-4t^2}}{3}\right\}.$$

Otteniamo quindi che il volume di E è dato da

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(E) &= \int_E dxdydz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{-1/2}^{1/2} dt \int_{1-\frac{\sqrt{1-4t^2}}{3}}^{1+\frac{\sqrt{1-4t^2}}{3}} \varrho d\varrho \\ &= \frac{4\pi}{3}\int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{1-4t^2}dt = \frac{\pi^2}{3}. \end{aligned}$$

Soluzione 6.19 - L'insieme di sui si vuole calcolare il volume è costituito tra la regione dello spazio in cui z è compresa tra il paraboloide x^2+y^2-2 e il piano $4-x-y$, mentre x e y appartengono alla palla B centrata nell'origine e di raggio 1. Siccome il paraboloide e il piano si incontrano quando x e y appartengono alla circonferenza centrata in $(-1/2, 1/2)$ e raggio $\sqrt{13/2}$ (circonferenza che contiene la palla B), abbiamo che il volume può essere calcolato come integrale triplo della funzione $f(x,y,z) = 1$ sul dominio E che è normale rispetto alla variabile z. Otteniamo quindi che

$$\mathrm{Vol}(E) = \int_E dxdydz = \int_B dxdy \int_{x^2+y^2-2}^{4-x-y} dz = \int_B (6-x-y-x^2-y^2)dxdy$$

Quest'ultimo integrale può infine essere calcolato utilizzando le coordinate polari, in modo da ottenere

$$\mathrm{Vol}(E) = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 (6-\varrho\cos\vartheta-\varrho\,\mathrm{sen}\,\vartheta-\varrho^2)\varrho d\varrho = \frac{11}{2}\pi.$$

Soluzione 6.20 - La funzione $f(x) = e^{-x^2}$ non ammette un'esplicita primitiva. Per calcolare quest'integrale usiamo un trucco: passiamo attraverso un integrale in $\mathbf{R}^2$. Valutiamo

$$\int_{\mathbf{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy\,.$$

Usando le coordinate polari, il cui jacobiano è ρ, otteniamo

$$\int_{\mathbf{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho = \pi\,.$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy &= \int_{\mathbf{R}} dx\Big(\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2-y^2} dy\Big) = \\ &= \int_{\mathbf{R}} dx\Big(e^{-x^2}\int_{\mathbf{R}} e^{-y^2} dy\Big) = \\ &= \Big(\int_{\mathbf{R}} e^{-t^2} dt\Big)^2\end{aligned}$$

da cui si conclude che $\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ e più in generale

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{-|x|^2} dx = (\pi)^{n/2}\,.$$

Soluzione 6.21 - Uso le coordinate polari modificate che possiamo chiamare coordinate ellittiche

$$(\rho, \vartheta) \mapsto (a\rho\cos\vartheta, b\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta)$$

che ha jacobiano $ab\rho$. L'area diventa

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \rho ab\, d\rho = \pi ab\,.$$

Soluzione 6.22 - Sfruttando la simmetria sia rispetto al piano x, y che rispetto al piano y, z il volume del solido risulta essere quattro volte il volume del solido delimitato inoltre dalle condizioni $x > 0$ e $z > 0$.
A questo punto usiamo le coordinate cilindriche con asse lungo l'asse z e centrate nell'origine: il cilindro è determinato dall'equazione

$$\rho^2\cos^2\vartheta + (\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta - a)^2 = a^2$$

che equivalentemente può essere scritto come

$$\rho(\rho - 2a \operatorname{sen} \vartheta) = 0$$

che ha soluzioni $\rho = 0$ e $\rho = 2a \operatorname{sen} \vartheta$. Quindi le limitazioni per le variabili sono

$$0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi/2\,, \qquad 0 \leqslant \rho \leqslant 2a \operatorname{sen} \vartheta\,.$$

Infine da $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ si ricava $z^2 = 4a^2 - \rho^2$ da cui le limitazioni sulla z diventano

$$0 \leqslant z \leqslant \sqrt{4a^2 - \rho^2}\,.$$

Quindi il volume è dato da

$$V = 4 \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{2a \operatorname{sen} \vartheta} d\rho \int_0^{\sqrt{4a^2-\rho^2}} \rho dz$$

che fornisce, usando il fatto che per $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi/2$ $\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \vartheta} = \cos \vartheta$, il seguente risultato

$$V = \frac{16}{9}(3\pi - 4)a^3\,.$$

Soluzione 6.23 - L'insieme delimitato dagli estremi -1 e 1 per la variabile x e $|x|$ e $\sqrt{2 - x^2}$ per la variabile y è quello in Figura 6.8. Quindi l'integrale diventa

$$\int_0^1 dy \int_{-y}^{y} f(x, y)dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y)dx\,.$$

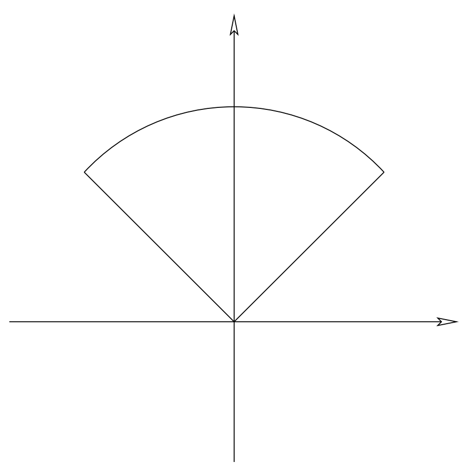

Figura 6.8:

Soluzione 6.24 - Uso le coordinate cilindriche

$$\int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{z/\sqrt{\alpha}} \rho d\rho = \frac{h^3\pi}{3\alpha} .$$

Provare alternativamente ad usare la formula per i solidi di rotazione (si veda la soluzione dell'Esercizio 6.17).

Soluzione 6.25 - Utilizziamo le coordinate cilindriche

$$x = \rho\cos\vartheta\,, \quad y = t\,, \quad z = \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,,$$

con $0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ e $\rho \leqslant t \leqslant \sqrt{2-\rho^2}$. L'integrale diventa

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 d\rho \int_\rho^{\sqrt{2-\rho^2}} \left(\rho\frac{\rho^2\cos^2\vartheta}{\rho^2}\right) dt = (2\sqrt{2}-2)\frac{\pi}{3} .$$

In questo caso potrebbe sembrare più naturale utilizzare le coordinate sferiche: convincersi che non è così.

Soluzione 6.26 - L'insieme E è quello a sinistra in Figura 6.9. Sicuramente l'integrale esiste perché la funzione integranda è limitata e quindi $|\int_E f dxdy| \leqslant |E|$.
Un modo di risolvere questo integrale è effettuare il cambio di variabile

$$\phi(s,t) = \left(\frac{s}{1+t}, \frac{st}{1+t}\right), \qquad 0 \leqslant s \leqslant 2\,, 1 \leqslant t \leqslant 2\,.$$

che porta il rettangolo $\widetilde{E}$ in E. Il cambio ϕ si ottiene ponendo $y/x = t$ e

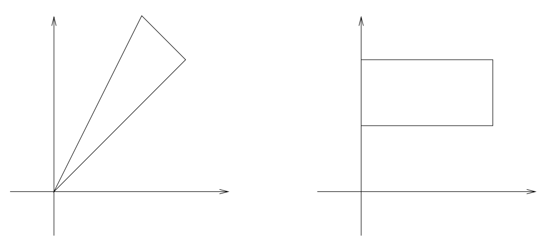

Figura 6.9: a sinistra l'insieme E, a destra $\widetilde{E}$

$x + y = s$. Lo jacobiano è dato da $\frac{s}{(1+t)^2}$, per cui si perviene all'integrale

$$\int_0^2 ds \int_1^2 dt \frac{s}{(1+t)^2}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{1+t}$$

che risolto è

$$\int_0^2 \frac{s}{\pi} \cos \frac{\pi}{1+t}\Big|_{t=1}^{t=2} ds = \int_0^2 \frac{s}{\pi}\Big(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{2}\Big) ds = \frac{1}{\pi}(\sqrt{3}-\sqrt{2})\,.$$

Provare anche con il cambio di variabile

$$\psi(s,t) = (s - ts, ts)\,, \qquad 0 \leqslant s \leqslant 2\,, \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{2}{3}\,.$$

che mappa $\widetilde{\widetilde{E}}$ in E come indicato in Figura 6.10.

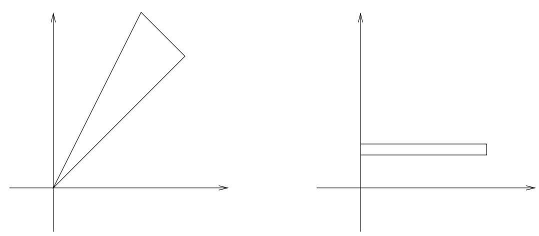

Figura 6.10: a sinistra l'insieme E, a destra $\widetilde{\widetilde{E}}$

Soluzione 6.27 - Per calcolare l'integrale dato, proviamo ad effettuare un cambio di variabili in modo che la funzione integranda si semplifichi ed in modo tale che la matrice del cambiamento di coordinate non dia problemi nell'integrazione e, ancora, che nel nuovo sistema di riferimento l'insieme su cui si vuole integrare non si complichi. Un modo per non avere problemi con la matrice del cambiamento di coordinate è fare in modo che tale matrice abbia determinante pari a 1; particolari trasformazioni con tale determinante sono le rotazioni, trasformazioni che hanno il vantaggio nel nostro caso di trasformare la palla B centrata nell'origine e di raggio 1 in se stessa. Cerchiamo quindi una rotazione dello spazio che ad esempio mandi il piano $x + y + z = 0$ nel piano determinato nelle nuove coordinate (u, v, w) ad esempio da $u = 0$. Una tale rotazione è data ad esempio

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Con tale trasformazione si ottiene che l'integrale diventa

$$\int_B \operatorname{sen}(x+y+z)dxdydz = \int_B \operatorname{sen}(u\sqrt{3})dudvdw.$$

A questo punto notiamo che la funzione integranda è dispari nella variabile u e il dominio B è simmetrico rispetto a tale variabile, e quindi si ottiene che

$$\int_B \operatorname{sen}(u\sqrt{3})\,du dv dw = 0.$$

Soluzione 6.28 - Notiamo che l'insieme di integrazione è invariante per rotazioni intorno all'asse z; seguendo la discussione del punto precedente, cerchiamo una rotazione dello spazio in modo che il piano $x + y = 0$ diventi nelle nuove coordinate (u, v, w) il piano $u = 0$ e consideriamo una rotazione che lasci inalterato l'insieme di integrazione, cioè una rotazione effettuata attorno all'asse z. Una tale rotazione è data ad esempio da

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

L'integrale diventa quindi

$$\int_E e^{\frac{x+y}{\sqrt{2}}} dx dy dz \quad = \quad \int_E e^u du dv dw = \int_{I_u} e^u A_u du,$$

dove A_u è l'area dell'ellisse

$$E_u = \left\{ (v, w) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{v^2}{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{b^2} \frac{z^2}{a^2 - u^2} \right\}$$

e $I_u = [-a, a]$. In definitiva troviamo che

$$\int_E e^{\frac{x+y}{\sqrt{2}}} dx dy dz \quad = \quad \int_{-a}^{a} e^u \pi \frac{b}{a} \left(a^2 - u^2\right) du = 2\pi \frac{b}{a}((a-1)e^a + (a+1)e^{-a})$$

Soluzione 6.29 - Parametrizzando con le coordinate sferiche la superficie

$$f(\vartheta, \varphi) = (r \cos\vartheta \operatorname{sen}\varphi, r \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\varphi, r \cos\varphi)$$

con $0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Le derivate sono

$$f_\vartheta(\vartheta, \varphi) = (-r \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\varphi, r \cos\vartheta \operatorname{sen}\varphi, 0)\,,$$

$$f_\varphi(\vartheta, \varphi) = (r \cos\vartheta \cos\varphi, r \operatorname{sen}\vartheta \cos\varphi, -r \operatorname{sen}\varphi)\,.$$

Il prodotto vettoriale è dato da

$$f_\vartheta \wedge f_\varphi = -r^2(\cos\vartheta \,\mathrm{sen}^2\varphi,\ \mathrm{sen}\,\vartheta\,\mathrm{sen}^2\varphi,\ \mathrm{sen}^2\vartheta\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi + \cos^2\vartheta\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi)$$

da cui

$$|f_\vartheta \wedge f_\varphi| = r^4\,\mathrm{sen}^2\varphi\,.$$

Quindi se S è la sfera l'area è

$$\int_S d\sigma = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\pi} d\varphi\, r^2\,\mathrm{sen}\,\varphi = 4\pi r^2\,.$$

Soluzione 6.30 - La superficie S può essere vista come il grafico della funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$ definita nel dominio $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ (si veda la Figura 6.11). L'integrale diventa

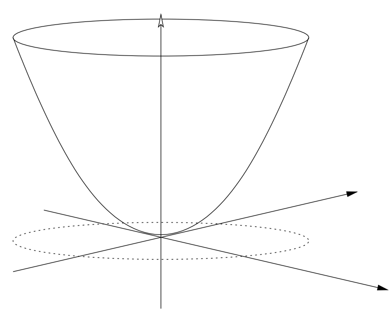

Figura 6.11:

$$\int_S d\sigma = \int_C \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dxdy$$

che trasformato in coordinate polari diventa

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 d\rho\,\rho\sqrt{1+4\rho^2} = \frac{4}{3}\pi\,.$$

Soluzione 6.31 - L'integrale che si vuole calcolare è l'integrale della funzione

$$f(x,y,z) = \frac{z + y^2}{\sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}}$$

sulla superficie, data come grafico della funzione

$$z = g(x,y) = x^2 - y^2$$

sul dominio

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geqslant 1, x^2 + 4y^2 \leqslant 4\}.$$

Usando quindi la definizione di integrale superficiale, si ottiene che

$$d\sigma = \sqrt{1 + |\nabla g(x,y)|^2} dxdy = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dxdy,$$

da cui

$$\begin{aligned} \int_\Sigma \frac{z + y^2}{\sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}} d\sigma &= \int_D \frac{x^2 - y^2 + y^2}{\sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}} \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dxdy \\ &= \int_D x^2 dxdy = \frac{7}{4}\pi. \end{aligned}$$

Soluzione 6.32 - La superficie sulla quale si vuole calcolare l'integrale è dato dal grafico della funzione

$$z = g(x,y) = x^2 + y^2$$

con $(x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 - y \leqslant 0\,,\ y \geqslant 1/2\,, x \geqslant 0\}$. Quindi otteniamo che

$$d\sigma = \sqrt{1 + |\nabla g(x,y)|} dxdy = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dxdy$$

e l'integrale di superficie diventa quindi

$$\int_D \frac{x}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dxdy = \int_D x dxdy = \frac{1}{24}.$$

Soluzione 6.33 - Denotato con C il cerchio di raggio r centrato nell'origine, per il teorema della divergenza si ha

$$\text{Area}(C) = \int_C 1\, dxdy = \int_{\partial C} F \cdot \nu\, ds$$

dove F è un qualunque campo cha abbia divergenza 1 e ν la normale esterna al bordo di C. Si può prendere $F(x,y) = (\alpha x, \beta y)$ con $\alpha + \beta = 1$, l'esempio più semplice è prendere $\alpha = \beta = 1/2$. Parametrizzando poi la circonferenza con $(r\cos t, r\,\text{sen}\, t)$ si ottiene

$$\int_{\partial C} F \cdot \nu\, ds = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2}\cos^2 t + \frac{r^2}{2}\,\text{sen}^{\,2} t\right] dt = r^2\pi\,.$$

Soluzione 6.34 - Per calcolare il flusso di tale campo si puó procedere in due modi, o scrivendo l'integrale di superficie, oppure cercare di applicare il Teorema della divergenza in $\mathbf{R}^3$. Lasciamo il primo caso come esercizio e vediamo come procedere nel secondo caso. Per poter applicare il Teorema dalla divergenza dobbiamo avere a che fare con superfici chiuse, quindi, siccome nel nostro caso abbiamo solo l'emisfero superiore E della sfera $x^2+y^2+z^2 = 16$, dobbiamo prima di tutto chiudere tale superficie; il modo più semplice per fare ciò è considerare l'insieme

$$S = \{(x, y, 0) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant 16\}.$$

A questo punto abbiamo che, se

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z \geqslant 0\,,\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 16\},$$

allora $\partial A = E \cup S$ e quindi

$$\int_{E\cup S} F \cdot \nu d\sigma = \int_{\partial A} F \cdot \nu d\sigma = \int_A \mathrm{div} F dxdydz.$$

Quindi, dato che $\mathrm{div} F = 0$,

$$\int_E F \cdot \nu d\sigma = -\int_S F \cdot \nu d\sigma.$$

Ma su S si ha che $F(x, y, 0) = (x^3, 0, 3x^2)$, $\nu = (0, 0, -1)$ e $d\sigma = dxdy$, quindi

$$\int_S F \cdot \nu d\sigma = -\int_{x^2+y^2\leqslant 16} 3x^2 dxdy = -192\pi;$$

in definitiva abbiamo trovato che

$$\int_E F \cdot \nu d\sigma = -192\pi.$$

Soluzione 6.35 - Utilizzando il Teorema della divergenza, tenendo presente che $\mathrm{div} F(x, y, z) = 2x + 2$, otteniamo che

$$\begin{aligned}\int_{\partial T} F \cdot \nu d\sigma &= \int_T \mathrm{div} F dxdydz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (2x + 2) dz = \frac{5}{12}.\end{aligned}$$

Per controllare che tale risultato sia giusto, si potrebbe calcolare l'integrale di superficie del campo vettoriale F.

Soluzione 6.36 - Notiamo anzitutto che il campo dato ha la proprietà che $\mathrm{div}F(x,y,z) = 0$ per ogni $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Questo vuol dire che se T è un qualsiasi dominio che non contiene l'origine, si ha che

$$\int_{\partial T} F \cdot \nu d\sigma = 0.$$

A questo punto, se $\Sigma = \partial A$ è una qualsiasi superficie chiusa che contiene al suo interno l'origine, non possiamo concludere che il flusso sia nullo in quanto la singolarità del campo F cade proprio nella porzione di spazio racchiusa dalla superficie Σ. Siccome l'origine è un punto interno a Σ, esisterà un raggio R tale che la palla $B_R(0)$ è tutta contenuta all'interno di Σ consideriamo quindi la porzione di spazio $T = A \setminus B_R(0)$, abbiamo che $\partial T = \Sigma \cup \partial B_R(0)$ e a questo punto l'origine non è più all'interno di T, quindi

$$0 = \int_T \mathrm{div}F dxdydz = \int_\Sigma F \cdot \nu d\sigma - \int_{\partial B_R(0)} F \cdot \nu d\sigma$$

dove il segno meno nell'ultimo integrale tiene conto che ν è la normale esterna alla palla $B_R(0)$ che però rappresenta in tali punti la normale entrante nella regione T. Quindi

$$\int_\Sigma F \cdot \nu d\sigma = \int_{\partial B_R(0)} F \cdot \nu d\sigma;$$

su $\partial B_R(0)$ abbiamo che il campo si scrive

$$F(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{R^3}$$

mentre la normale uscente da $B_R(0)$ si scrive come

$$\nu(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{R}.$$

Per calcolare l'integrale utilizziamo le coordinate polari e tenendo presente che $d\sigma = R^2 \operatorname{sen}\varphi d\varphi d\vartheta$, otteniamo che

$$\int_{\partial B_R(0)} F \cdot \nu d\sigma = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2} R^2 \operatorname{sen}\varphi d\vartheta = 4\pi.$$

Soluzione 6.37 - Notiamo anzitutto che $\mathrm{div}F = 0$, quindi possiamo provare ad applicare il Teorema della divergenza; per fare questo dobbiamo considerare una superficie chiusa, dobbiamo cioè chiudere la superficie data. Per fare questo possiamo ad esempio considerare la superficie

$$S = \{(x,y,4) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant 4\}.$$

Se poniamo

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leqslant z \leqslant 4\,,\ x^2 + y^2 \leqslant 4\}$$

abbiamo che $\partial A = S \cup \Sigma$, e quindi dalla condizione $\mathrm{div} F = 0$ si ricava che

$$\int_\Sigma F \cdot \nu d\sigma = -\int_S F \cdot \nu d\sigma.$$

Ma su S la normale uscente è data dal vettore $(0, 0, 1)$ e $d\sigma = dxdy$, quindi

$$\int_\Sigma F \cdot \nu d\sigma = \int_{x^2+y^2 \leqslant 4} x^3 y dxdy = 0.$$