

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Appunti del corso di
Analisi Matematica II
c.d.l. Ingegneria Civile e Ambientale ¹

Michele Miranda

a.a. 2008-2009

¹Versione aggiornata al 23 gennaio 2009

Nel presente fascicolo sono raccolti gli appunti relativi ad alcuni capitoli del corso di Analisi Matematica 2 tenuto presso la facoltà di Ingegneria dell'Università di Ferrara, corso di laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale.

Il materiale contenuto in queste note vuole essere semplicemente una guida per gli argomenti trattati durante il corso; è inevitabilmente incompleto, così come è inevitabile che siano presenti errori ed inesattezze. Non si risponde tuttavia degli errori che possono essere contenuti in questo fascicolo, in quanto è cura del lettore rilevare ed eventualmente segnalare eventuali imprecisioni.

Riteniamo imprescindibile, pur con la riduzione dei contenuti dei corsi imposta dal nuovo ordinamento degli studi, conservare intatti l'impianto concettuale e l'impostazione metodologica dell'Analisi, e riteniamo che questo obiettivo sia conseguibile solo dando enunciati sintetici e precisi. Per semplificare un enunciato si può rinunciare alla massima generalità possibile, ma non al rigore della presentazione. Per questa ragione abbiamo ritenuto opportuno, e, speriamo, utile agli studenti, raccogliere in poche pagine le definizioni ed i risultati principali che vengono esposti durante le lezioni.

È per altro evidente che questi appunti non hanno la pretesa di sostituire il libro di testo, che resta indispensabile per acquisire una conoscenza dignitosa della materia. La loro funzione è piuttosto, come già detto, quella di sostituire gli appunti di lezione, troppo poco affidabili per tanti motivi, e di indicare il bagaglio *minimo* di conoscenze richieste per affrontare l'esame.

Il corso è strutturato come segue; i primi capitoli saranno un complemento del corso di Analisi Matematica I. Si tratteranno alcuni argomenti che, causa il poco tempo a disposizione, non sono stati affrontati nel corso di Analisi Matematica I, quali ad esempio le formule di Mac Laurin–Taylor e lo studio dei numeri complessi.

In un successivo capitolo si studiano le equazioni differenziali; si affronteranno equazioni differenziali di ordine al più due, con solo alcuni cenni alla teoria delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di ordine superiore.

Nei restanti capitoli si affronta quello che è più propriamente il programma di Analisi Matematica II, e cioè lo studio delle funzioni di più variabili. Si estenderanno quindi alle più variabili i concetti studiati nel primo corso di Analisi, quali la continuità, la derivabilità e l'integrabilità delle funzioni.

Si consiglia infine di prestare attenzione alla data di aggiornamento della presente dispensa, in quanto in continua evoluzione e correzione. In particolare, per la sezione riguardante le Domande, si dovrà prendere come riferimento, per ogni sezione del presente volume, la versione che verrà messa on-line ad inizio Marzo 2009.

Michele Miranda, Ferrara

Indice

1	Approssimazione polinomiale e formula di Taylor	5
1.1	Infinitesimi e il simbolo o	7
1.2	Formula di Mac Laurin-Taylor	8
1.3	Algebra degli o e formule di Taylor di funzioni composte	12
1.4	Applicazioni della formula di Taylor	14
2	I Numeri Complessi	17
2.1	Definizione e prime proprietà	18
2.2	Coniugato e modulo di un numero complesso	20
2.3	Forma polare ed esponenziale	21
2.4	Polinomi e radici n -esime	23
3	Equazioni differenziali	27
3.1	Equazioni del primo ordine	28
3.1.1	Equazioni a variabili separabili	32
3.1.2	Equazioni lineari del primo ordine	33
3.1.3	Equazioni di Bernoulli	35
3.2	Equazioni lineari del secondo ordine	35
3.2.1	Equazioni a coefficienti costanti	37
3.3	Equazioni lineari di ordine superiore	40
4	Domande	43
4.1	Sviluppi di Taylor: domande	43
4.2	Numeri complessi: domande	43
4.3	Equazioni differenziali: domande	44

Capitolo 1

Approssimazione polinomiale e formula di Taylor

Uno strumento molto importante in matematica è quello della approssimazione lineare e polinomiale; iniziamo con la prima, detta anche approssimazione del primo ordine.

Data una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ con I intervallo di \mathbb{R} e $x_0 \in I$, dire che f è derivabile, o differenziabile, in x_0 significa richiedere l'esistenza di un numero reale $m \in \mathbb{R}$ tale che

$$(1.1) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)}{x - x_0} = 0,$$

e si pone $m = f'(x_0)$, la derivata o differenziale di f in x_0 . La precedente espressione ci dice che la retta

$$(1.2) \quad y(x) = f(x_0) + m(x - x_0),$$

rappresentante la retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$, ha la proprietà che la differenza

$$(1.3) \quad f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

è infinitesima, cioè tende a zero, per x che tende a x_0 ; in altri termini possiamo riscrivere la (1.1) dicendo che

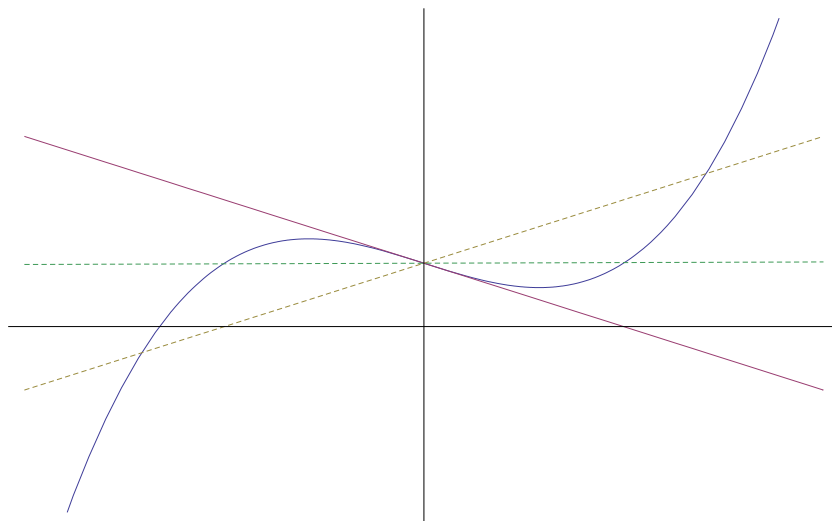
$$(1.4) \quad f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (x - x_0)E_{x_0}(x)$$

con $E_{x_0}(x)$ una quantità che tende a zero per x che tende ad x_0 . L'equazione (1.4) dice anche che la differenza (1.3) è infinitesima di ordine 1 in x_0 , cioè tende a zero se divisa per $(x - x_0)$. La retta (1.2) viene detta anche linearizzazione, o approssimazione del primo ordine di f in x_0 e definisce l'unica retta $ax + b$ per la quale

$$(1.5) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - ax - b}{(x - x_0)} = 0;$$

difatti, la precedente espressione, per avere limite finito, deve avere il numeratore che tende a zero in quanto il denominatore tende a zero, cioè

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - ax - b = 0;$$



da cui $b = f(x_0) - ax_0$. Inoltre, dato che (1.5) si presenta a questo punto come una forma indeterminata, applicando il Teorema di De l'Hôpital, la (1.5) diventa equivalente a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) - a = 0,$$

cioè $a = f'(x_0)$. Alcuni esempi di linearizzazione:

x	per $\sin x$	in $x_0 = 0$,
1	per $\cos x$	in $x_0 = 0$,
$-x + \pi/2$	per $\cos x$	in $x_0 = \pi/2$,
$x - 1$	per $\ln x$	in $x_0 = 1$,
$x + 1$	per e^x	in $x_0 = 0$.

Vediamo ora come andare oltre ed ottenere approssimazioni di ordine successivo; se partiamo dal limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

che può equivalentemente essere scritto come

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x - x^2/2}{x^2} = 0$$

oppure nella forma

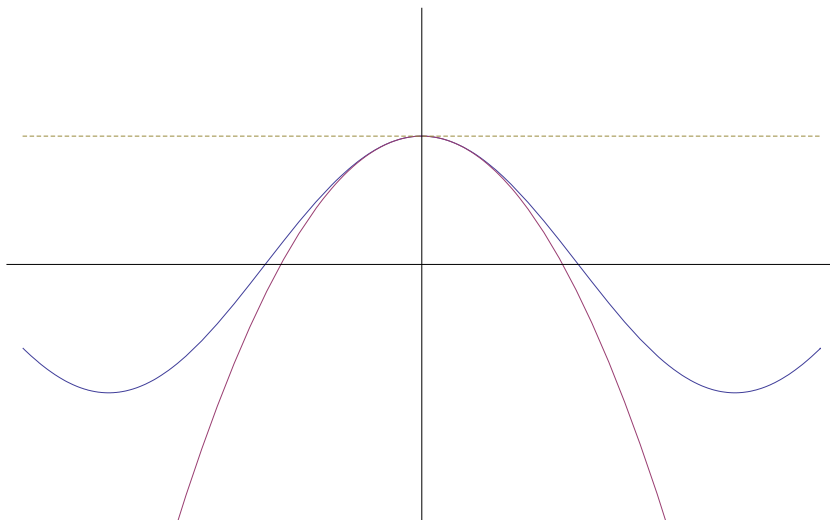
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} - x^2 E_0(x)$$

con $E_0(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0$, notiamo che nel sostituire alla funzione $\cos x$ la parabola $1 - \frac{x^2}{2}$ si ottiene un errore, $x^2 E_0(x)$, che è infinitesimo di ordine 2, cioè tende a zero se diviso per x^2 . Un vantaggio nella sostituzione della funzione $\cos x$ non con la sua linearizzazione ma con la parabola $1 - x^2/2$ sta nel fatto che ad esempio si può dedurre che $x_0 = 0$ è un punto di massimo per $\cos x$, in quanto la parabola trovata ha la concavità rivolta verso il

basso (maggiori dettagli su questo verranno dati nella sezione 1.4). Si può in qualche modo affermare che la parabola trovata è la parabola tangente al grafico di $\cos x$ in $x_0 = 0$, nel senso che è l'unica parabola $ax^2 + bx + c$ tale che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - ax^2 - bx - c}{x^2} = 0.$$

Per formalizzare meglio questi concetti e più in generale il concetto di “polinomio tangente”,



è utile introdurre il simbolo di Landau, anche detto o (leggasi *o piccolo*).

1.1 Infinitesimi e il simbolo o

La trattazione che svilupperemo qui è quella relativa al concetto di infinitesimo e del simbolo di Landau o .

Definizione 1.1 Dato un punto $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ e due funzioni f, g definite in un intorno I di x_0 , $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, diremo che f è infinitesima rispetto a g in x_0 (oppure che f è un o piccolo di g in x_0 , ossia $f \in o_{x_0}(g)$), se esiste il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Nel caso in cui $g(x) = 1$ su I , si dice che f è infinitesima in x_0 , cioè

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

e scriveremo $f \in o_{x_0}(1)$. Nel caso in cui $x_0 = 0$, si scrive semplicemente $f \in o(g)$.

Osservazione 1.2 Si può pensare ad $o_{x_0}(g)$ come ad una non meglio precisata funzione, o famiglia di funzioni, con la proprietà

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o_{x_0}(g)}{g(x)} = 0.$$

In relazione a quanto visto in precedenza, si ha che

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x - x}{x} \right)$$

e quindi $\sin x - x = o(x)$, cioè $\sin x = x + o(x)$, o più in generale, per una funzione derivabile, $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0)$. Analogamente, si avrà che $\cos x = 1 + o(1)$ e $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Un modo per confrontare i due errori dati dalle precedenti formule è quello di confrontare i due infinitesimi $o(1)$ e $o(x^2)$. Abbiamo in generale che se $a, b \in \mathbb{R}$, allora $x^a = o(x^b)$ se e solo se

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^a}{x^b} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{a-b},$$

cioè se e solo se $a > b$. Quindi ad esempio $x \in o(1)$, $x^2 \in o(x)$, ecc. Nel caso $a > b$ scriveremo anche $o(x^a) \subset o(x^b)$, così ad esempio $o(x^2) \subset o(1)$. Vediamo come utilizzare la nozione di o per definire le approssimazioni polinomiali.

1.2 Formula di Mac Laurin-Taylor

Nella precedente sezione abbiamo dato, per una funzione derivabile, la sua linearizzazione o approssimazione al primo ordine; vediamo ora come arrivare ad approssimazioni di ordine superiore. Per ottenere ciò occorrerà richiedere maggiore regolarità sulla funzione f . Il seguente Teorema fornisce l'approssimazione polinomiale nel punto $x_0 = 0$.

Teorema 1.3 (Formula di Mac Laurin con resto di Peano) *Sia f una funzione derivabile n volte con derivata n -esima continua in $x_0 = 0$; esiste allora un unico polinomio di grado n , denotato con T_n^f o semplicemente T_n , per il quale vale*

$$(1.6) \quad f(x) = T_n(x) + o(x^n).$$

La quantità $o(x^n)$ viene detta resto di Peano ed il polinomio T_n viene detto polinomio di Mac Laurin di grado n ed è determinato dalla formula

$$(1.7) \quad \begin{aligned} T_n(x) &= f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \end{aligned}$$

ed è l'unico polinomio di grado n per il quale

$$T_n(0) = f(0), \quad T_n'(0) = f'(0), \quad \dots, \quad T_n^{(n)}(0) = f^{(n)}(0).$$

DIM. Per vedere che il polinomio definito dalla formula (1.7) verifica la (1.6) basta applicare n volte il Teorema di de L'Hôpital; infatti

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - T_n(x)}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - T_n'(x)}{nx^{n-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - T_n^{(n)}(x)}{n!} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{n!} = 0 \end{aligned}$$

grazie alla continuità della derivata n -esima. Per dimostrare l'unicità di T_n , si supponga che esista un altro polinomio $p_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ di grado n che soddisfa la (1.6); allora $f(x) - p_n(x) = o(x^k)$ per ogni $k = 0, \dots, n$. In particolare, per $k = 0$, si ha che

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - p_n(x)) = 0,$$

da cui $p_n(0) = f(0)$; analogamente, applicando nuovamente il Teorema di de L'Hôpital, si ricava che

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - p_n(x)}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(k)}(x) - p_n^{(k)}(x)}{k!},$$

da cui $f^{(k)}(0) = p^{(k)}(0) = k!a_k$. Questo implica che

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad \forall k = 0, \dots, n.$$

□

Il primo, e più semplice, esempio che si può fare è la funzione esponenziale; difatti, per $f(x) = e^x$ si ha $f^{(n)}(x) = e^x$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e quindi

$$T_n^{e^x}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!},$$

da cui

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

In modo analogo si ottengono gli sviluppi

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+2}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k+1}).$$

Non è sorprendente trovare che lo sviluppo di Mac Laurin della funzione coseno contiene solo potenze pari di x , essendo la funzione coseno una funzione pari; allo stesso modo, dato che la funzione seno è dispari, lo sviluppo di Mac Laurin avrà solo potenze dispari.

Come esercizio, si provi a ricavare gli sviluppi di Mac Laurin per le funzioni

$$\ln(1+x), \sqrt{1+x}, (1+x)^\alpha, \sinh(x), \cosh(x).$$

Il seguente Teorema fornisce una stima più precisa dell'errore che si commette approssimando una funzione con il suo polinomio di Mac Laurin; esso fornisce una valutazione della quantità $o(x^n)$.

Teorema 1.4 (Formula di Taylor; resto integrale e di Lagrange) *Sia f una funzione derivabile $n+1$ volte con derivata $(n+1)$ -esima continua; allora il resto della formula di Mac Laurin può essere espresso in forma integrale come*

$$(1.8) \quad o(x^n) = x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(tx) dt = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \quad (\text{resto integrale})$$

oppure in forma differenziale

$$(1.9) \quad o(x^n) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (\text{resto di Lagrange})$$

con c elemento dell'intervallo di estremi x e 0 .

DIM. La dimostrazione della formula con resto integrale si può fare per induzione partendo dalla funzione $g(t) = f(tx)$; notando che $g(0) = f(0)$, $g(1) = f(x)$ e $g'(t) = (x)f'(tx)$, dal Teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene

$$g(1) = g(0) + \int_0^1 g'(t) dt,$$

da cui

$$f(x) = f(0) + x \int_0^1 f'(tx) dt.$$

Si noti che

$$x \int_0^1 f'(tx) dt = o(1)$$

e quindi la formula di Taylor di ordine 0 è dimostrata. Per procedere con il passo induttivo, si integra per parti ottenendo

$$\begin{aligned} \int_0^1 f'(tx) dt &= -(1-t)f'(tx) \Big|_0^1 \\ &\quad + x \int_0^1 (1-t)f''(tx) dt \\ &= f'(0) + x \int_0^1 (1-t)f''(tx) dt \end{aligned}$$

o più in generale

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(tx) dt = \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!} + x \int_0^1 \frac{(1-t)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+2)}(tx) dt,$$

da cui la formula

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(n)!} f^{(n+1)}(tx) dt;$$

si noti che la (1.8) è immediata. Per la (1.9) si applicherà invece il Teorema di Lagrange; esso infatti afferma che esiste c nell'intervallo di estremi x e 0 tale che

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(c),$$

cioè

$$f(x) = f(0) + f'(c)x$$

che è la formula di Taylor di ordine 0; per ottenere la formula generale si procederà per induzione. \square

La formula con il resto di Lagrange permette di dare una stima del tipo

$$|f(x) - T_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(c)||x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ad esempio, se si vuole calcolare \sqrt{e} (sapendo a priori $e \leq 3$), si può utilizzare lo sviluppo di Mac Laurin per $f(x) = e^x$ con $x = 1/2$: ad esempio, se fissiamo $n = 3$, avremo che

$$T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

con $T_3(1/2) = \frac{79}{48}$. Inoltre $|\sqrt{e} - T_3(1/2)| = \frac{e^c}{2^4 4!} \leq \frac{\sqrt{3}}{2^4 4!} \sim 0,0045$ in quanto $c \in [0, 1/2]$.

Tutti i discorsi fatti nel caso del polinomio di Mac Laurin per $x_0 = 0$ possono essere trasferiti ad un generico punto x_0 ; si definisce quindi il polinomio di Taylor di grado n centrato nel punto x_0 nel seguente modo.

Teorema 1.5 (Formula di Taylor) *Sia f una funzione derivabile n volte con derivata n -esima continua in un punto x_0 ; esiste allora un unico polinomio di grado n in $(x - x_0)$, denotato con $T_{x_0,n}^f$ o semplicemente T_n se la funzione f ed il punto x_0 sono chiari, per il quale vale*

$$(1.10) \quad f(x) = T_{x_0,n}^f(x) + o((x - x_0)^n). \quad (\text{Formula di Taylor con resto di Peano}).$$

Il polinomio di Taylor è dato da

$$(1.11) \quad \begin{aligned} T_{x_0,n}^f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \end{aligned}$$

Se poi la funzione f è derivabile $n + 1$ volte in x_0 , allora si ottengono le formule di Taylor con resto integrale e di Lagrange

$$\begin{aligned} f(x) &= T_{x_0,n}^f(x) + (x - x_0)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t(x - x_0)) dt \\ &= T_{x_0,n}^f(x) + \int_{x_0}^x \frac{(x - x_0 - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \\ &= T_{x_0,n}^f(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \end{aligned}$$

dove c è un punto compreso nell'intervallo di estremi x_0 e x .

Ad esempio, si possono calcolare i polinomio di Taylor di

$$f(x) = \sin x, x_0 = \frac{\pi}{2}, \quad f(x) = e^x, x_0 = 1, \quad f(x) = \ln(1 + x), x_0 = 2.$$

Osservazione 1.6 Una domanda che ci si potrebbe porre è se l'approssimazione che si ottiene al variare del grado n del polinomio di Taylor possa migliorare per n crescente. Supponiamo quindi che la funzione sia derivabile infinite volte in x_0 ; in questo caso possiamo

costruirci i polinomi $T_{x_0,n}^f$ per ogni grado n . Per passare al limite per $n \rightarrow \infty$ subentrano però due problemi; il primo è che stiamo definendo una serie, quindi bisogna porsi il problema della convergenza della serie in considerazione. Il secondo, ammesso che la serie converga, consiste nel chiedersi se la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k := g(x),$$

che viene detta serie di Taylor associata ad f , coincida o meno con f , cioè se $g(x) = f(x)$. Questo non è sempre vero, come mostra la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0; \end{cases}$$

tale funzione è derivabile infinite volte in 0 con derivate tutte nulle, quindi la serie associata $g(x)$ definisce la funzione nulla, mentre f non è nulla. Il problema delle serie di Taylor non verrà affrontato in questo corso, ma sarà argomento di corsi più avanzati.

1.3 Algebra degli o e formule di Taylor di funzioni composte

Usando le potenze di x , si può dare la seguente definizione.

Definizione 1.7 Sia $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ e sia f una funzione definita in un intorno I di x_0 , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Avremo allora le seguenti possibilità:

1. nel caso $x_0 \in \mathbb{R}$, se esiste $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che per $a \neq 0$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^a} = \lambda,$$

diremo che f è infinitesima di ordine a se $a > 0$, mentre f è infinita di ordine a se $a < 0$;

2. nel caso $x_0 = \pm\infty$, se esiste $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ed esiste $a \neq 0$ tale che il limite

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x^a} = \lambda,$$

diremo che f è infinitesima di ordine a se $a < 0$, mentre f è infinita di ordine a se $a > 0$.

In entrambi i precedenti casi si potrà anche dire che f ha ordine a in x_0 e si scriverà $\text{ord}_{x_0}(f) = a$.

Ad esempio, dal limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

si ricava che $\sin x$ è infinitesima di ordine 1 in $x_0 = 0$ o anche che

$$\text{ord}_0(\sin x) = 1,$$

mentre dal limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{1 - \cos x} = 1$$

si deduce che la funzione $\frac{2}{1 - \cos x}$ è infinita di ordine 2 per $x_0 = 0$ o anche che

$$\text{ord}_0 \left(\frac{2}{1 - \cos x} \right) = -2.$$

Abbiamo la seguente proposizione.

Proposizione 1.8 (Algebra degli o e relazioni tra o e ord) *Sia $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, siano f e g due funzioni definite in un intorno I di x_0 , $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Valgono allora le seguenti proprietà;*

1. $o_{x_0}(f) \pm o_{x_0}(f) = o_{x_0}(f)$;
2. $\lambda o_{x_0}(f) = o_{x_0}(f)$;
3. $o_{x_0}(f)o_{x_0}(g) = o_{x_0}(fg)$;
4. se $f \in o_{x_0}(g)$, allora $o_{x_0}(f) \subset o_{x_0}(g)$, $o_{x_0}(f) + o_{x_0}(g) = o_{x_0}(g)$;
5. se $\text{ord}_{x_0}(f) = a$, allora, se $x_0 \in \mathbb{R}$ si avrà $f \in o_{x_0}((x - x_0)^b)$ per ogni $b < a$, mentre se $x_0 = \pm\infty$ si avrà che $f \in o_{\pm\infty}(x^b)$ per ogni $b > a$.

DIM. Grazie all'Osservazione 1.2, si ha che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o_{x_0}(f) \pm o_{x_0}(f)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o_{x_0}(f)}{f(x)} \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o_{x_0}(f)}{f(x)} = 0,$$

da cui la 1. Analogamente,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\lambda o_{x_0}(f)}{f(x)} = \lambda \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o_{x_0}(f)}{f(x)}$$

da cui l'equivalenza 2. in quanto $\lambda \neq 0$. Per la 3. si nota che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o_{x_0}(f)o_{x_0}(g)}{f(x)g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o_{x_0}(f)}{f(x)} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o_{x_0}(g)}{g(x)} = 0.$$

Per la proprietà 4. si nota che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o_{x_0}(f)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \frac{o_{x_0}(f)}{f(x)} = 0.$$

Infine, dimostriamo la 5. solo nel caso $x_0 \in \mathbb{R}$ (essendo il caso $x_0 \pm \infty$ analogo); dalla definizione di ordine, si ottiene che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^b} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^{a-b} \frac{f(x)}{(x - x_0)^a} = \lambda \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^{a-b} = 0$$

se e solo se $a > b$. □

Con questi strumenti si può ad esempio calcolare il polinomio di Mac Laurin della funzione $f(x) = e^{\sin x}$ senza calcolare le sue derivate; difatti, sfruttando gli sviluppi di e^x e $\sin x$, si ottiene

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= e^{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} \\ &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{6} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3\right) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3) \end{aligned}$$

da cui

$$T_3^{e^{\sin x}}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

1.4 Applicazioni della formula di Taylor

Una prima applicazione della formula di Taylor si può avere ad esempio nel calcolo dei limiti. Abbiamo infatti il seguente risultato.

Proposizione 1.9 *Sia $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ e siano f , f_1 e g tre funzioni definite in un intorno I di x_0 , $f, f_1, g : I \rightarrow \mathbb{R}$; allora, se $f_1 \in o_{x_0}(f)$, il limite*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + f_1(x)}{g(x)}$$

esiste se e solo se esiste il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

e vale

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + f_1(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

DIM. La dimostrazione segue semplicemente osservando che

$$\frac{f(x) + f_1(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \left(1 + \frac{f_1(x)}{f(x)}\right)$$

e dal fatto che, essendo $f_1 \in o_{x_0}(f)$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 + \frac{f_1(x)}{f(x)}\right) = 1.$$

□

Abbiamo quindi che se $f(x) = T_{n,x_0}^f(x) + o_{x_0}((x-x_0)^n)$ e $g(x) = T_{m,x_0}^g(x) + o((x-x_0)^m)$ con polinomi non nulli, allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{T_{n,x_0}^f(x)}{T_{m,x_0}^g(x)}$$

almeno ogni qualvolta il limite di destra non si presenti in forma indeterminata. Questa osservazione rende il calcolo dei limiti un problema più semplice in quanto ridotto al limite di una espressione razionale. Così ad esempio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6}}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

Così ad esempio se si volesse studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \operatorname{sen} \frac{1}{n} \right),$$

il limite precedente ci dice che il termine generale è asintoticamente equivalente a $\frac{1}{6n^3}$, e quindi la serie è assolutamente convergente.

Altra applicazione si può avere nello studio della convessità e nella classificazione dei punti stazionari. Supponiamo ad esempio che $f'' \geq 0$; dalla formula di Taylor con resto di Lagrange si ottiene quindi che

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)(x - x_0)^2}{2} \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

quindi il grafico di f si trova al di sopra del grafico della sua retta tangente in $(x_0, f(x_0))$. Inoltre, se x_0 è un punto stazionario e $f''(x_0) > 0$, allora dalla formula di Taylor di ordine 2 si ottiene

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o_{x_0}((x - x_0)^2)$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^2} = \frac{f''(x_0)}{2} > 0$$

da cui la positività di $f(x) - f(x_0)$ in un intorno di x_0 , cioè il fatto che $f(x_0)$ è un punto di minimo.

Usando il polinomio di Taylor di grado superiore, si può enunciare il seguente risultato riguardante la classificazione dei punti stazionari di una funzione.

Proposizione 1.10 *Supponiamo che f sia una funzione derivabile n volte con continuità in x_0 e supponiamo che*

$$f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Allora:

1. *se n è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0$, x_0 è un punto di minimo;*
2. *se n è pari e $f^{(n)}(x_0) < 0$, x_0 è un punto di massimo;*
3. *se n è dispari, x_0 è un punto di flesso, ascendente se $f^{(n)}(x_0) > 0$, discendente se $f^{(n)}(x_0) < 0$.*

Capitolo 2

I Numeri Complessi

In questo capitolo daremo la definizione e le principali proprietà di un nuovo insieme numerico: il campo¹ dei numeri complessi \mathbb{C} .

La motivazione che spinge ad introdurre questo nuovo insieme numerico, quantomeno per il presente corso, viene dalla necessità di risolvere equazioni, principalmente, del secondo ordine, cioè equazioni della forma

$$ax^2 + bx + c = 0;$$

come è ben noto, le soluzioni di tale equazione sono date dalla formula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Tale formula funziona con i seguenti accorgimenti;

1. se $b^2 - 4ac > 0$, allora la radice quadrata è ben definita e si ottengono due soluzioni reali distinte;
2. se $b^2 - 4ac = 0$, la radice non compare e si ottiene una sola soluzione, o meglio due soluzioni coincidenti.

Resta il problema del caso $b^2 - 4ac < 0$, in cui ci si trova di fronte al problema di dover calcolare

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{-|b^2 - 4ac|} = \sqrt{-1} \sqrt{|b^2 - 4ac|};$$

si può notare che nella precedente espressione basta dare un senso alla radice quadrata del numero negativo -1 per ottenere una buona formula risolutiva di ogni polinomio di secondo grado, senza distinzioni sul discriminante (in realtà l'unica distinzione sarà discriminante

¹Ricordiamo che per campo si intende un insieme K sul quale siano definite due operazioni, dette somma e prodotto e denotate con $+$ e \cdot , per le quali valgono le proprietà:

1. $+$ è associativa, ammette elemento neutro, denotato con 0 , e ogni elemento $a \in K$ è invertibile rispetto alla somma con inversa denotata con $-a$;
2. \cdot è associativa, ammette elemento neutro, denotato con 1 , e ogni elemento $a \in K$ con $a \neq 0$ è invertibile rispetto al prodotto con inverso denotato con a^{-1} o $\frac{1}{a}$;
3. le operazioni di somma e prodotto godono della proprietà distributiva.

Se le operazioni di somma e prodotto sono commutative, si parla di campo commutativo o abeliano.

nullo o meno). Si tratta quindi di trovare un insieme numerico in cui l'equazione $x^2 + 1 = 0$ abbia soluzione; come vedremo, risolvere quest'ultima equazione renderà possibile trovare le radici non solo di polinomi di secondo grado, ma di grado arbitrario e a coefficienti non reali (vedi Teorema 2.13).

2.1 Definizione e prime proprietà

In questa sezione daremo la definizione e le principali proprietà dei numeri complessi. Come si è visto nel corso di Analisi Matematica I, si parte dall'insieme numerico \mathbb{N} sul quale sono ben definite le operazioni di somma e prodotto ma nel quale non esistono gli elementi inversi rispetto a queste due operazioni. Si introducono quindi delle estensioni di \mathbb{N} in cui sono ancora definite somma e prodotto, che sono estensioni della somma e prodotto su \mathbb{N} , in modo che esistano gli elementi inversi rispetto alla somma (e si ottiene così l'insieme \mathbb{Z}) e prodotto (ottenendo così \mathbb{Q}). L'introduzione di \mathbb{R} viene fatta in modo che ci sia completezza non tanto rispetto alle operazioni di somma e prodotto, ma rispetto alla convergenza delle successioni di Cauchy, ottenendo in definitiva le seguenti inclusioni $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Vogliamo definire qui il campo \mathbb{C} in modo che $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ e che le operazioni di somma e prodotto su \mathbb{C} non siano altro che estensioni della somma e prodotto su \mathbb{R} .

Esistono vari modi equivalenti di definire \mathbb{C} ; quello che seguiremo è quello di tipo cartesiano.

Definizione 2.1 (Campo complesso) Diremo campo complesso, e lo denoteremo con \mathbb{C} , l'insieme consistente nel piano \mathbb{R}^2 (che prende il nome di piano di Gauss) munito delle operazioni di somma e prodotto

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Un generico elemento di \mathbb{C} si indicherà con le ultime lettere dell'alfabeto, z, w, \dots intendendo $z = (a, b)$, ecc. La prima componente di un numero complesso si chiama parte reale, $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(a, b) = a$ e la seconda componente si chiama parte immaginaria, $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(a, b) = b$ (si tenga ben presente che parte reale e parte immaginaria di un numero complesso sono entrambi numeri reali). Un numero complesso z si dirà reale (o reale puro) se $\operatorname{Im}(z) = 0$, mentre si dirà immaginario puro se $\operatorname{Re}(z) = 0$.

Osservazione 2.2 Dato che l'insieme dei numeri complessi è definito tramite una coppia ordinata, l'uguaglianza tra numeri complessi, $z = w$ con $z = (a, b)$ e $w = (c, d)$, si verificherà se e solo se $a = c$ e $b = d$, cioè se e solo se $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(w)$ e $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(w)$.

La terminologia campo è motivata dalla seguente Proposizione.

Proposizione 2.3 \mathbb{C} è un campo abeliano.

DIM. Le proprietà di associatività e commutatività della somma sono immediate, mentre quelle per il prodotto sono lasciate come verifica. Si nota quindi che gli elementi $(0, 0)$ e $(1, 0)$ sono elementi neutri per la somma e per il prodotto rispettivamente; si nota infine che l'elemento $-z = -(a, b) = (-a, -b)$ è l'inverso additivo di $z = (a, b)$, mentre, se $z \neq (0, 0)$, allora

$$(2.1) \quad z^{-1} = \frac{1}{z} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right)$$

è l'inverso moltiplicativo di z . Si noti che dire $z \neq (0, 0)$ significa che almeno uno tra a e b è diverso da zero, da cui il fatto che $a^2 + b^2 \neq 0$ e cioè la buona definizione di z^{-1} \square

Vediamo ora in che senso \mathbb{C} è una estensione di \mathbb{R} ; si nota che sull'insieme

$$R = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$$

le operazioni sopra definite si riducono a

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0). \quad (a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0).$$

ed inoltre

$$-(a, 0) = (-a, 0), \quad (a, 0)^{-1} = (1/a, 0).$$

Identificando quindi R con \mathbb{R} , avremo che $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$; useremo sempre questa identificazione che ci porta a scrivere la seguente uguaglianza

$$(a, 0) = a.$$

Avremo in particolare che gli elementi neutri rispetto a somma e prodotto in \mathbb{C} sono gli stessi di quelli in \mathbb{R} , essendo $0 = (0, 0)$ e $1 = (1, 0)$.

Osservazione 2.4 Si noti che mentre \mathbb{R} è un campo ordinato, su \mathbb{C} non abbiamo introdotto nessuna nozione di ordinamento; questo è dovuto al fatto che non c'è un modo naturale per estendere l'ordinamento \leq su \mathbb{C} e non avrà quindi senso per i numeri complessi l'espressione $z \leq w$.

Notiamo inoltre che con le notazioni appena introdotte, otteniamo che

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1,$$

cioè l'elemento $i = (0, 1)$ ha la proprietà che $i^2 = -1$; tale elemento verrà chiamata unità immaginaria. In questo modo siamo arrivati a poter scrivere un numero complesso, oltre che con la notazione cartesiana, anche in notazione algebrica. Infatti, abbiamo che

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0) = a + ib.$$

La definizione algebrica quindi dei numeri complessi passa tramite la definizione di un numero *speciale* i con la proprietà che $i^2 = -1$, e definito numero complesso tutte le possibili combinazioni lineari degli elementi 1 e i , cioè tutti i numeri della forma appunto

$$a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

In questo modo l'operazione di prodotto diventa più intuitiva; infatti dati due numeri complessi $a + ib, c + id$, abbiamo, tenendo presente che $i^2 = -1$,

$$(a + ib) \cdot (c + id) = a \cdot c + a \cdot id + ib \cdot c + ib \cdot id = ac - bd + i(ad + bc).$$

2.2 Coniugato e modulo di un numero complesso

Sui numeri complessi è definita l'operazione di coniugio; dato cioè un numero complesso $z = a + ib$, si definisce il numero complesso \bar{z} detto coniugato di z tramite

$$\bar{z} = a - ib.$$

Per l'operazione di coniugio abbiamo le seguenti proprietà.

Proposizione 2.5 *Siano $z, w \in \mathbb{C}$; allora*

1. $\bar{\bar{z}} = z$ (proprietà involutiva del coniugio);
2. $\bar{z} = z$ se e solo se z reale;
3. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$;
4. $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$;
5. se $z \neq 0$, allora $\overline{1/z} = 1/\bar{z}$;
6. $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$, $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$.

DIM. Basta scrivere z e w in forma algebrica $z = a + ib$, $w = c + id$ e verificare le identità; vediamo solamente le dimostrazioni di 4. e 5. Dato che $zw = (ac - bd) + i(ad + bc)$, segue che $\overline{zw} = (ac - bd) - i(ad + bc)$, mentre

$$\bar{z} \cdot \bar{w} = (a - ib)(c - id) = (ac - bd) + i(-ad - bc)$$

da cui la 4. Per la 5. si nota che da (2.1) applicata a z e \bar{z} , si ottiene che

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}, \quad \frac{1}{\bar{z}} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{b}{a^2 + b^2},$$

da cui la 5. □

Notiamo che scrivendo $z = a + ib$ si ottiene che $z\bar{z} = a^2 + b^2$, e quindi il fatto che $z\bar{z}$ è un numero reale positivo. Possiamo quindi dare la seguente definizione.

Definizione 2.6 (Modulo di un numero complesso) *Dato un numero complesso $z \in \mathbb{C}$, si definisce il modulo di z tramite*

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Osservazione 2.7 Non si deve confondere la notazione di modulo di un numero complesso con quella di valore assoluto di un numero reale; tuttavia, le due nozioni coincidono nel caso in cui z è reale puro, in quanto in questo caso $b = 0$ e quindi

$$|z| = \sqrt{a^2} = |a|.$$

Per il modulo di un numero complesso valgono le seguenti proprietà.

Proposizione 2.8 *Siano $z, w \in \mathbb{C}$; allora*

1. $|z| \geq 0$, $|z| = 0$ se e solo se $z = 0$;

2. $|z| = |\bar{z}|$, $|-z| = |z|$;
3. $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$, $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$, $|z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$;
4. se $z \neq 0$, $|1/z| = 1/|z|$, $1/z = \bar{z}/|z|^2$;
5. $|zw| = |z||w|$;
6. $|z + w| \leq |z| + |w|$ (disuguaglianza triangolare);
7. $|z + w| \geq ||z| - |w||$ (seconda disuguaglianza triangolare).

DIM. Si scrivono $z = a + ib$ e $w = c + id$ e le proprietà 1., 2. e 3. sono immediate. Notando poi che per $z \neq 0$

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \left| \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} \right| = \sqrt{\frac{a^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{b^2}{(a^2 + b^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{|z|}$$

da cui la 4. (la seconda proprietà della 4. segue direttamente dalla definizione $|z|^2 = z\bar{z}$). Per la 5., si nota che dalle proprietà del coniugio, si ottiene che

$$|zw|^2 = zw\bar{z}\bar{w} = zw\bar{z} \cdot \bar{w} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2.$$

Per quanto riguarda la disuguaglianza triangolare, si ha che, tenendo presente la proprietà 6. della Proposizione 2.5 e la 3. di questa Proposizione,

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)\overline{(z + w)} = z\bar{z} + w\bar{w} + z\bar{w} + \bar{z}w = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) \\ &\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\bar{w}| = |z|^2 + |w|^2 + 2|z| \cdot |w| \\ &= (|z| + |w|)^2, \end{aligned}$$

da cui la 6. Per quanto riguarda la 7., basta notare che

$$|z| = |z - w + w| \leq |z - w| + |w|,$$

da cui $|z| - |w| \leq |z - w|$; analogamente

$$|w| \leq |w - z| + |z| = |z - w| + |z|,$$

da cui $|w| - |z| \leq |z - w|$. Mettendo insieme queste due disuguaglianze, si ottiene la 7. \square

2.3 Forma polare ed esponenziale

Nelle sezioni precedenti abbiamo introdotto le forme cartesiane ed algebrica di un numero complesso; in questa sezione introdurremo la forma polare ed esponenziale. Il vantaggio di queste nuove definizioni è che mentre la forma cartesiana e algebrica è comoda quando si vogliono sommare due numeri complessi, la forma polare ed esponenziale lo sono nella moltiplicazione.

La definizione della forma polare di un numero complesso segue dall'osservazione che un numero complesso $z = a + ib = (a, b)$ rappresenta un punto nel piano \mathbb{R}^2 ed è quindi determinato dalle sue coordinate polari (ϱ, ϑ) , dove $\varrho = \sqrt{a^2 + b^2}$ rappresenta la distanza

del punto (a, b) dall'origine e coincide con il modulo del numero complesso, $\varrho = |z|$, mentre l'angolo ϑ , detta argomento o anomalia e denotato con $\vartheta = \arg(z)$, rappresenta l'angolo, preso in senso antiorario, formato dal semiasse $\{x = 0, y \geq 0\}$ e la semiretta originata in $(0, 0)$ e passante per (a, b) . Si nota che mentre ϱ è univocamente determinato, l'angolo ϑ è individuato a meno di multipli di 2π (fa eccezione l'origine, che è individuata da $\varrho = 0$ ma non ha un ϑ determinato) ed è univocamente determinato in un intervallo semiaperto di ampiezza 2π ; si parla in questo caso di argomento principale di z e come intervallo si può scegliere $(-\pi, \pi]$ (o $[0, 2\pi)$ a seconda dei casi). Per passare dalla forma algebrica alle coordinate polari del numero $z = a + ib$ si possono usare, nel caso $z \neq 0$, le formule

$$(2.2) \quad \begin{cases} a = \varrho \cos \vartheta \\ b = \varrho \sin \vartheta \end{cases}, \quad \begin{cases} \varrho = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos \vartheta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \vartheta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

Possiamo quindi dare la seguente definizione.

Definizione 2.9 (Forma polare) Dato $z \in \mathbb{C}$, si chiama forma polare (o trigonometrica) l'espressione di z usata utilizzando le coordinate polari

$$z = \varrho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta).$$

Uno dei maggiori vantaggi della rappresentazione polare dei numeri complessi si presenta quando si deve fare il prodotto di due numeri complessi. Supponiamo infatti di avere due numeri complessi $z = \varrho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$, $w = r(\cos \phi + i \sin \phi)$, otteniamo che

$$(2.3) \quad zw = \varrho r(\cos(\vartheta + \phi) + i \sin(\vartheta + \phi)), \quad \frac{z}{w} = \frac{\varrho}{r}(\cos(\vartheta - \phi) + i \sin(\vartheta - \phi)),$$

cioè la moltiplicazione per il numero w è data da una dilatazione pari a r e una rotazione di un angolo ϕ . In particolare, se $w = z$, si ottiene che

$$z^2 = \varrho^2(\cos 2\vartheta + i \sin 2\vartheta),$$

o più in generale, per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$(2.4) \quad z^n = \varrho^n(\cos n\vartheta + i \sin n\vartheta);$$

le formule (2.3) e (2.4) prendono anche il nome di Formule di De Moivre. Dato che la funzione

$$f(\vartheta) = \cos \vartheta + i \sin \vartheta,$$

ha la proprietà che $f(\vartheta_1)f(\vartheta_2) = f(\vartheta_1 + \vartheta_2)$, ha senso la seguente definizione.

Definizione 2.10 Si definisce l'esponenziale immaginario come la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ data da

$$e^{i\vartheta} = f(\vartheta) = \cos \vartheta + i \sin \vartheta;$$

Più in generale, dato un numero complesso $z = a + ib$, si definisce l'esponenziale complesso $e : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$e^z = e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i \sin b).$$

Osservazione 2.11 Si noti che dalla definizione data, si ha che la funzione $\vartheta \mapsto e^{i\vartheta}$ è 2π -periodica e che per ogni $\vartheta \in \mathbb{R}$ $|e^{i\vartheta}| = 1$.

Definizione 2.12 (Forma esponenziale) Dato un numero complesso $z \in \mathbb{C}$, si chiama forma esponenziale di z la scrittura di z nella forma

$$z = \varrho e^{i\vartheta},$$

dove ϱ e ϑ sono determinate dalle (2.2).

2.4 Polinomi e radici n -esime

In questa sezione tratteremo i polinomi in campo complesso. Ricordiamo che un polinomio complesso di grado n è una funzione $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \quad a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}, a_n \neq 0.$$

Ricordiamo anche che un numero complesso z_0 si dice radice del polinomio p se $p(z_0) = 0$; in tal caso il polinomio p è divisibile per $(z - z_0)$ e si potrà scrivere

$$p(z) = (z - z_0)q(z)$$

con q polinomio di grado $n - 1$. Si dice inoltre che z_0 ha molteplicità m se

$$p(z) = (z - z_0)^m q(z)$$

con q polinomio di grado $n - m$ tale che $q(z_0) \neq 0$; in tal caso $p(z)$ è divisibile per $(z - z_0)^m$ ma non per $(z - z_0)^{m+1}$. Conseguenza di questi fatti è che un polinomio di grado n ha al più n radici, contate con le relative molteplicità. In campo complesso vale però anche il viceversa, cioè che le radici sono esattamente n , se contate con le loro molteplicità; vale infatti il seguente Teorema, che non dimostreremo.

Teorema 2.13 (Teorema fondamentale dell'algebra) *Ogni polinomio complesso di grado almeno 1 ammette una radice complessa.*

Il precedente Teorema ha come immediato corollario il seguente risultato.

Teorema 2.14 (Teorema fondamentale dell'algebra) *Ogni polinomio complesso di grado $n \geq 1$ ammette n radici complesse, se si conta ogni radice con la relativa molteplicità.*

I precedenti Teoremi non danno alcuna informazione su come trovare le radici del polinomio considerato; abbiamo però il seguente Teorema, valido per polinomi a coefficienti reali.

Proposizione 2.15 *Se p è un polinomio complesso a coefficienti reali, cioè $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, allora $z_0 \in \mathbb{C}$ è radice di p se e solo se $\overline{z_0}$ lo è e in tal caso z_0 e $\overline{z_0}$ hanno la stessa molteplicità.*

DIM. Basta osservare che, dato che $p(z_0) = 0$, allora

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{p(z_0)} = \overline{a_0 + a_1 z_0 + \cdots + a_n z_0^n} = \overline{a_0} + \overline{a_1} \cdot \overline{z_0} + \cdots + \overline{a_n} \cdot \overline{z_0}^n \\ &= a_0 + a_1 \overline{z_0} + \cdots + a_n \overline{z_0}^n = p(\overline{z_0}). \end{aligned}$$

□

Osservazione 2.16 Si noti che come corollario si ha che ogni polinomio reale a coefficienti reali può essere scritto come prodotto di polinomi di grado uno o al massimo due; infatti, visto come polinomio complesso, si ha dal Teorema fondamentale dell'algebra 2.14 che

$$(2.5) \quad p(z) = a_n(z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_k)^{m_k}$$

con $m_1 + \cdots + m_k = n$; si ha quindi in campo complesso che i fattori primi dei polinomi sono i polinomi di grado uno, nel senso che ogni polinomio si decompone come prodotto di binomi di primo grado (si pensi all'analogia della decomposizione dei numeri interi in fattori primi). Tornando a vedere il polinomio come reale a coefficienti reali, se z_i è reale, allora abbiamo un fattore di grado uno, mentre se z_i non reale è, allora in (2.5) deve comparire anche \bar{z}_i (Proposizione 2.15), esiste cioè $j \neq i$ tale che $z_j = \bar{z}_i$ e $m_j = m_i$. Notando poi che

$$(z - z_i)(z - \bar{z}_i) = z^2 - 2\operatorname{Re}(z_i)z + |z_i|^2$$

che è un polinomio di secondo grado a coefficienti reali, l'osservazione segue.

Consideriamo ora il problema della radice n -esima di un numero complesso. Dato un numero complesso w , si dice che il numero complesso z è una radice n -esima di w se $z^n = w$. Le radici n -esime sono quindi le soluzioni dell'equazione $z^n - w = 0$, cioè sono le radici del polinomio $p(z) = z^n - w$; quindi, per quanto visto sopra, esistono al più n radici n -esime del numero w . Abbiamo la seguente Proposizione che dice che in effetti sono esattamente n .

Proposizione 2.17 *Dato il numero complesso $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, esistono n radici complesse distinte di w date dalla formula*

$$z_k = \sqrt[n]{|w|} e^{i\vartheta_k}, \quad \text{con } \vartheta_k = \frac{\arg(w) + 2k\pi}{n}, k = 0, \dots, n-1.$$

Osservazione 2.18 Va osservato che la radice n -esima complessa non definisce una funzione in \mathbb{C} , avendo essa più valori; bisogna quindi fare attenzione che il simbolo $\sqrt[n]{w}$ può avere significati differenti, anche nel caso w numero reale, a seconda che si parli di radice reale o radice complessa.

DIM. Scrivendo $z = \varrho e^{i\vartheta}$ e $w = re^{i\phi}$, si nota che $z^n = w$ se e solo se

$$\begin{cases} \varrho^n = r \\ \cos(n\vartheta) = \cos \phi \\ \sin(n\vartheta) = \sin \phi; \end{cases}$$

tale sistema ha per soluzioni $\varrho = \sqrt[n]{r}$ (radice reale) e

$$(2.6) \quad \vartheta_k = \frac{\phi + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Chiaramente abbiamo troppi valori di ϑ_k ; notiamo però che due differenti valori di k e h definiscono lo stesso numero complesso, cioè $z_h = z_k$ se ϑ_h e ϑ_k differiscono per un multiplo di 2π , cioè se

$$\vartheta_h = \vartheta_k + 2m\pi;$$

la precedente espressione, usando (2.6), è equivalente a

$$h - k = nm,$$

cioè $z_h = z_k$ se e solo se $h - k$ è divisibile per n , o altrimenti detto h e k hanno lo stesso resto nella divisione per n . Siccome i possibili resti della divisione per n sono $0, 1, \dots, n-1$, la dimostrazione segue. \square

Esempio 2.1 Consideriamo il numero $w = 1$, numero di modulo uno e argomento zero; nel caso $n = 2$, cioè il caso delle radici quadrate, si ottengono i numeri

$$z_k = e^{i\vartheta_k}, \quad \vartheta_k = k\pi, k = 0, 1$$

cioè i due numeri $z_0 = 1$ e $z_1 = -1$. Per $n = 3$, si ottengono

$$z_k = e^{i\vartheta_k}, \quad \vartheta_k = \frac{2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2$$

cioè i numeri complessi $z_0 = 1$, $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Analogamente, per $n = 4$

$$z_k = e^{i\vartheta_k}, \quad \vartheta_k = \frac{k\pi}{2}, k = 0, 1, 2, 3$$

che producono i numeri $z_0 = 1$, $z_1 = i$, $z_2 = -1$ e $z_3 = -i$. In figura sono rappresentate queste radici e quelle relative al caso $n = 5$ e $n = 6$; si noti quindi che il numero 1 si trova sempre tra le radici per ogni ordine (come nel caso reale) ed anche il numero -1 si trova (sempre come nel caso reale) in ogni radice di ordine pari. Si hanno però altre radici a partire dal caso $n = 3$ che si distribuiscono nel piano complesso secondo triangoli equilateri ($n = 3$), quadrati ($n = 4$), pentagoni ($n = 5$) ed esagoni ($n = 6$), con sempre (siccome il numero w è reale) due radici coniugate tra loro (si veda figura 2.1).

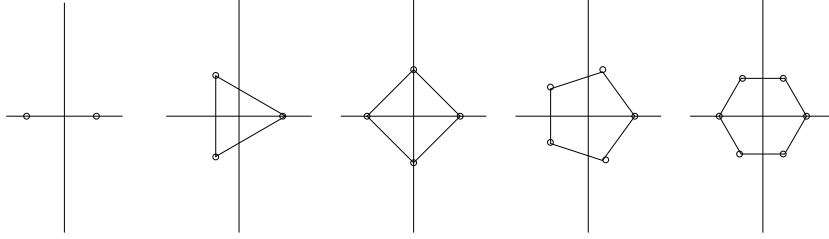


Figura 2.1: Distribuzione nel piano complesso delle radici n -esime di 1, $n = 2, 3, 4, 5, 6$.

Esempio 2.2 Nel caso $w = -1$, il numero di modulo uno e argomento π , si ottiene che nel

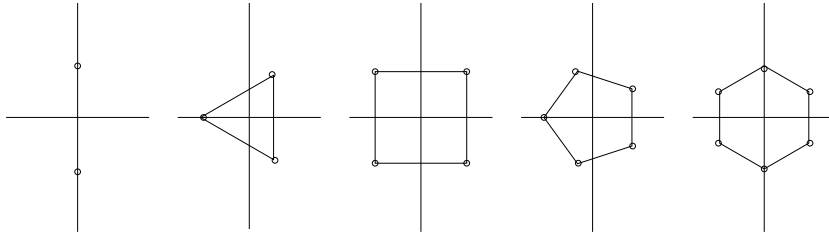


Figura 2.2: Distribuzione nel piano complesso delle radici n -esime di -1 , $n = 2, 3, 4, 5, 6$.

caso $n = 2$,

$$z_k = e^{i\vartheta_k}, \quad \vartheta_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, k = 0, 1$$

cioè i due numeri $z_0 = i$ e $z_1 = -i$. Per $n = 3$, si ottengono

$$z_k = e^{i\vartheta_k}, \quad \vartheta_k = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2$$

cioè i numeri complessi $z_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_1 = -1$ e $z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Analogamente, per $n = 4$

$$z_k = e^{i\vartheta_k}, \quad \vartheta_k = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k = 0, 1, 2, 3$$

che producono i numeri $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$. Si veda la figura 2.2 per la distribuzione di queste radici e per quelle del caso $n = 5$ e $n = 6$. Si provi come esercizio a vedere cosa succede nel caso $w = i$ e $w = -i$.

Capitolo 3

Equazioni differenziali

Ricordiamo brevemente alcune nozioni sulle equazioni algebriche; sono queste espressioni del tipo $F(x) = 0$ con $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (oppure $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ nel caso di equazioni nei numeri complessi) con x incognita. Esempi sono dati dal problema della ricerca delle radici di un polinomio di secondo grado, che si traduce nell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, o anche equazioni del tipo $x + e^{x^2} = 0$; qualora si voglia sottolineare il fatto che nell'equazione la variabile x compare insieme alle sue potenze x^2, \dots, x^n , l'equazione si può anche scrivere nella forma $F(x, x^2, \dots, x^n) = 0$ e si parla in tal caso di equazione di grado n . Per soluzione dell'equazione si intende un numero $x_0 \in \mathbb{R}$ (o \mathbb{C} in caso di equazioni complesse) per il quale vale l'identità $F(x_0) = 0$, mentre per insieme delle soluzioni si intende l'insieme $S = \{x_0 \in \mathbb{R} : F(x_0) = 0\}$.

Un'equazione differenziale è una equazione del tipo $F(y(x)) = 0$ la cui incognita è una funzione $y(x)$ che appare nell'equazione assieme alle sue derivate. Si parla di equazione differenziale di ordine n un'equazione del tipo $F(y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$ o se si vuole esplicitare anche la dipendenza dalla variabile x un'espressione del tipo

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

(la variabile x viene anche chiamata variabile indipendente, mentre la y viene detta variabile dipendente; solitamente al posto di x si usano anche le variabili t, s , ecc, mentre al posto di y si usano anche $y(t), y(s), x(t), x(s), u(x), u(t), u(s)$, ecc). La forma precedente si chiama forma implicita dell'equazione differenziale, mentre si parla di equazione in forma esplicita o in forma normale l'equazione differenziale nella forma $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$. Una soluzione sarà una funzione $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ con I intervallo di \mathbb{R} e u derivabile n volte per la quale $F(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n)}(x)) = 0$ per ogni $x \in I$. Infine, per insieme delle soluzioni si intende l'insieme di tutte le funzioni n volte derivabili che sono soluzione dell'equazione differenziale e si parlerà di integrale generale di una equazione differenziale una espressione che riassume tutte le soluzioni.

Le applicazioni principali delle equazioni differenziali vengono dalle applicazioni fisiche, naturali, biologiche, finanziarie, ecc. Ad esempio, una delle formule più importanti della fisica è data dall'equazione di Newton $F = ma$, dove in generale la forza sarà un campo vettoriale di forze \vec{F} e l'accelerazione è data dalla derivata seconda rispetto al tempo della funzione posizione $x(t)$. L'equazione di Newton si può quindi riscrivere $mx''(t) = F$, che è un'equazione differenziale del secondo ordine (la maggior parte delle equazioni provenienti

dalla fisica sono del secondo ordine), con la forza F che può in generale essere funzione del tempo t , della posizione $x(t)$ e della velocità $x'(t)$. Come casi particolari si hanno

1. caduta di un grave in un campo gravitazionale costante $F = mg$, dove il problema diventa uni-dimensionale, moto lungo la verticale soggetto alla legge $x''(t) = g$, il cui integrale generale, ottenuto con una doppia integrazione, è dato da $x(t) = \frac{gt^2}{2} + c_1t + c_2$;
2. equazione dell'oscillatore armonico, in cui la forza F dipende dalla posizione, $F = -mkx(t)$, $k > 0$ costante elastica, quindi il moto è governato dall'equazione $x''(t) = -kx(t)$ e il cui integrale generale, come vedremo nel paragrafo 3.2.1, è dato da $x(t) = c_1 \cos \sqrt{k}t + c_2 \sin \sqrt{k}t$;
3. equazione dell'oscillatore armonico smorzato, in cui compare anche la forza di attrito, proporzionale alla velocità, cioè $F = -mkx(t) - \mu x'(t)$; in tal caso l'equazione di Newton diventa $x''(t) = -kx(t) - \frac{\mu}{m}x'(t)$, il cui integrale generale è dato da

$$x(t) = c_1 e^{\frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 - m^2 k^2}}{2m}t} + c_2 e^{\frac{-\mu - \sqrt{\mu^2 - m^2 k^2}}{2m}t}$$

se $\mu > mk$, altrimenti

$$x(t) = e^{-\frac{\mu}{2m}t} \left(c_1 \cos \frac{t}{2m} \sqrt{m^2 k^2 - \mu^2} + c_2 \sin \frac{t}{2m} \sqrt{m^2 k^2 - \mu^2} \right);$$

4. in generale il campo di forze potrà dipendere anche dal tempo, come ad esempio avviene per una particella carica che si muove in un campo elettro-magnetico variabile (fenomeni della risonanza magnetica).

Si noti che negli esempi presentati, nell'integrale generale ci sono sempre due costanti ad indicare che per l'insieme delle soluzioni ci sono sempre due gradi di libertà; questo, come vedremo, dipende dal fatto che stiamo considerando equazioni del secondo ordine.

3.1 Equazioni del primo ordine

Vediamo ora alcuni esempi di equazioni differenziali del primo ordine, cioè di equazioni del tipo $y'(x) = f(x, y(x))$. L'esempio più semplice è quello in cui $f(x, y(x)) = f(x)$ e l'equazione differenziale diventa

$$y'(x) = f(x),$$

cioè il problema diventa quello della ricerca delle primitive. Si sa, da quanto visto nel corso di Analisi 1 che se f è una funzione continua su di un intervallo I , allora la precedente equazione ha per soluzioni le funzioni

$$u(x) = \int f(x)dx + c$$

definita per tutti gli $x \in I$. Si noti che ci sono infinite soluzioni (una per ogni scelta di $c \in \mathbb{R}$); però se si fissa un punto $x_0 \in I$ ed un valore $y_0 \in \mathbb{R}$, tra le precedenti soluzioni ne esiste una sola con la condizione $y(x_0) = y_0$, quella data da

$$u(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t)dt.$$

Un altro esempio importante di equazione differenziale è l'equazione di Malthus, nota anche come equazione della dinamica delle popolazioni o dell'interesse bancario; se ad un dato istante t si è in possesso di un capitale $C(t)$, dopo h giorni tale capitale verrà incrementato di una percentuale p (l'interesse bancario) del capitale stesso moltiplicato per il numero di giorni h in cui il capitale resta depositato in banca: in formule

$$C(t+h) = C(t) + pC(t)h.$$

Se tale incremento venisse calcolato istantaneamente, si avrebbe la possibilità di considerare il limite per $h \rightarrow 0$ e si otterrebbe quindi l'equazione

$$pC(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C(t+h) - C(t)}{h} = C'(t).$$

Per trovare soluzioni a tale equazioni, si nota anzitutto che $C(t) = 0$ è una soluzione, mentre se C è non nulla, si può dividere per $C(t)$ ed ottenere

$$p = \frac{C'(t)}{C(t)} = \frac{d}{dt} \ln |C(t)|,$$

da cui $|C(t)| = e^{pt+c} = e^c e^{pt} = ce^{pt}$ con l'ultima costante $c > 0$. Eliminando il valore assoluto si ottengono quindi le soluzioni $C(t) = ce^{pt}$ con $c \in \mathbb{R}$ (il valore 0 lo avevamo già considerato all'inizio della discussione). Si noti che anche in questo caso abbiamo infinite soluzioni, una per ogni scelta di $c \in \mathbb{R}$, ma nuovamente, se si fissa un istante $t_0 \in \mathbb{R}$ ed un capitale iniziale $C_0 \in \mathbb{R}$, allora esiste un'unica evoluzione del capitale che all'istante t_0 vale C_0 , ed è dato da $C(t) = C_0 e^{p(t-t_0)}$.

Risulta naturale dagli esempi precedenti aspettarsi unicità delle soluzioni solo quando viene fissato un valore, detto valore iniziale, in un fissato punto, detto punto iniziale. Abbiamo la seguente definizione.

Definizione 3.1 (Problema di Cauchy o ai valori iniziali) *Viene chiamato Problema di Cauchy il problema della ricerca delle soluzioni del sistema*

$$(3.1) \quad \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

o equivalentemente del problema

$$(3.2) \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

Una soluzione del Problema di Cauchy è una funzione $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile nell'intervallo I che risolve equivalentemente la (3.1) o la (3.2)

Il perchè le soluzioni delle equazioni differenziali le cerchiamo definite su intervalli può essere spiegato tramite il seguente esempio.

Esempio 3.1 La soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{x^2} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

è dato da $u(x) = 1 - \frac{1}{x}$; però anche le funzioni

$$u(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x} & x > 0 \\ c - \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$$

sono soluzioni, infinite tante quante sono le costanti $c \in \mathbb{R}$. Rimane tuttavia unica se si cercano le soluzioni definite su intervalli I che contengono il dato iniziale, cioè per le quali $x_0 = 1 \in I$.

Abbiamo il seguente risultato, che fornisce l'esistenza e l'unicità delle soluzioni del Problema di Cauchy.

Teorema 3.2 (Esistenza e unicità per il Problema di Cauchy) *Sia $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione con I e J intervalli di \mathbb{R} con la proprietà che*

1. *la funzione $x \mapsto f(x, y)$ è continua da I in \mathbb{R} per ogni $y \in J$;*
2. *esiste una costante $L > 0$ tale che per ogni $x \in I$ e per ogni $y_1, y_2 \in J$*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

(una funzione f con tale proprietà viene detta Lipschitziana).

Allora, per ogni $x_0 \in I$ e $y_0 \in J$ esiste un'unica funzione $u : I \rightarrow J$ soluzione del problema di Cauchy (3.1).

DIMOSTRAZIONE Dato che I è un intervallo, possiamo scrivere $I = [a, b]$ (nel caso I sia un intervallo aperto o un intervallo illimitato si ragionerà su ogni intervallo della forma $[a, b]$ contenuto in I). Si costruisce la successione di funzioni $u_0(x) = y_0$ e

$$u_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, u_{n-1}(t)) dt.$$

Per tale successione dimostriamo anzitutto che

$$|u_n(x) - u_{n-1}(x)| \leq M \frac{L^{n-1} |x - x_0|^n}{n!}$$

dove

$$M = \max_{x \in [a, b]} |f(x, y_0)|.$$

Si procede per induzione; la base è data da

$$|u_1(x) - u_0(x)| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt \right| \leq \int_{\min(x_0, x)}^{\max(x_0, x)} |f(t, y_0)| dt \leq M|x - x_0|.$$

Inoltre, supponendo

$$|u_n(x) - u_{n-1}(x)| \leq M \frac{L^{n-1} |x - x_0|^n}{n!}$$

stimiamo $|u_{n+1}(x) - u_n(x)|$; si ha che

$$\begin{aligned}
 |u_{n+1}(x) - u_n(x)| &= \left| \int_{x_0}^x f(t, u_n(t)) - f(t, u_{n-1}(t)) dt \right| \\
 &\leq \int_{\min(x_0, x)}^{\max(x_0, x)} |f(t, u_n(t)) - f(t, u_{n-1}(t))| dt \\
 &\leq L \int_{\min(x_0, x)}^{\max(x_0, x)} |u_n(t) - u_{n-1}(t)| dt \\
 &\leq L \int_{\min(x_0, x)}^{\max(x_0, x)} M \frac{L^{n-1}(t - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} dt = M \frac{L^n |x - x_0|^n}{n!}.
 \end{aligned}$$

Abbiamo quindi che la successione $(u_n(x))_n$ è una successione di Cauchy in quanto, supposto $n > m$

$$\begin{aligned}
 |u_n(x) - u_m(x)| &\leq |u_n(x) - u_{n-1}(x)| + |u_{n-1}(x) - u_m(x)| \leq \sum_{k=m}^{n-1} |u_{k+1}(x) - u_k(x)| \\
 &\leq \sum_{k=m}^{n-1} M \frac{L^k |x - x_0|^k}{k!} \leq \frac{M}{L} \sum_{k=m}^{n-1} \frac{L^k (b - a)^k}{k!}.
 \end{aligned}$$

Dato che si ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^k (b - a)^k}{k!} = e^{L(b-a)},$$

cioè siamo in presenza di una serie convergente, se ne deduce che la successione $(u_n(x))_n$ è di Cauchy e quindi converge ad una funzione $u(x)$. Si ha inoltre che

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_0 + \int_{x_0}^x f(t, u_{n-1}(t)) dt = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, u(t)) dt.$$

Per dimostrare l'unicità delle soluzioni, si supponga esistano due funzioni y_1 e y_2 che soddisfano lo stesso problema di Cauchy e consideriamo la differenza $g(x) = |y_1(x) - y_2(x)|$; si ottiene che, supponendo $x > x_0$,

$$\begin{aligned}
 g(x) &= |y_1(x) - y_2(x)| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))| dt \leq L \int_{x_0}^x |y_1(t) - y_2(t)| dt \\
 &= L \int_{x_0}^x g(t) dt.
 \end{aligned}$$

Dimostriamo quindi che una funzione che soddisfa la precedente relazione con $g(x_0) = 0$ è necessariamente la funzione nulla (questo risultato è noto come Lemma di Gronwall). La precedente espressione è equivalente a

$$L \geq \frac{g(x)}{\int_{x_0}^x g(t) dt} = \frac{d}{dx} \ln \int_{x_0}^x g(t) dt;$$

integrando tra $x_0 + \varepsilon$ e x generico (va considerato $\varepsilon > 0$ altrimenti avremmo il logaritmo di 0), si ottiene che

$$0 \leq \int_{x_0}^x g(t) dt \leq e^{L(x-x_0-\varepsilon)} \int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} g(t) dt \rightarrow 0 \text{ per } \varepsilon \rightarrow 0$$

e quindi si deve avere $g(t) = 0$ per ogni $t \in [x_0, x]$, da cui l'unicità. \square

Funzioni f che soddisfano le ipotesi del precedente teorema sono date da funzioni $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

- 1) la funzione $x \mapsto f(x, y)$ è continua in I per ogni $y \in J$;
- 2) la funzione $y \mapsto f(x, y)$ è continua con derivata prima continua in J per ogni $x \in I$.

Si può inoltre dimostrare, con una piccola modifica rispetto alla dimostrazione precedente, che se la condizione 2) viene sostituita con la condizione

- 2') la funzione $y \mapsto f(x, y)$ continua in J per ogni $x \in I$

allora le soluzioni esistono ma in generale non è garantita l'unicità.

Esempio 3.2 Se si considera il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{3}{2} \sqrt[3]{y} \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

allora le due funzioni $y(x) = 0$ e $y(x) = x^{3/2}$ sono entrambe soluzioni. Si nota infatti che la funzione $f(x, y) = \frac{3}{2} y^{1/3}$ non dipende da x ed è una funzione continua rispetto ad y per $y \geq 0$, ma non derivabile per $y = 0$ e soprattutto la sua derivata rispetto ad y non è limitata per $y \rightarrow 0$.

3.1.1 Equazioni a variabili separabili

I due esempi considerati precedentemente, la ricerca delle primitive e l'equazione di Malthus, sono casi particolari di equazioni a variabili separabili, cioè equazioni in cui

$$y' = f(x, y) = a(x)b(y).$$

L'esistenza e l'unicità per il Problema di Cauchy si hanno come caso particolare del teorema (3.2), quando $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua e $b : J \rightarrow \mathbb{R}$ è Lipschitziana, cioè esiste $L > 0$ tale che $|b(y_1) - b(y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$; tale condizione è ad esempio soddisfatta quando b è derivabile con derivata continua, avendosi come L il massimo del modulo della derivata di b .

Per ricavare le soluzioni di una equazione a variabili separabili si procede come segue;

1. si cercano anzitutto gli zeri della funzione b ; infatti, se $y_0 \in J$ è tale che $b(y_0) = 0$, allora la funzione costante $u(x) = y_0$ è una soluzione;
2. sotto la condizione $b(y) \neq 0$, si divide per $b(y)$ ottenendo

$$\frac{y'(x)}{b(y(x))} = a(x).$$

Quindi, se A denota una primitiva di a e B una primitiva di $\frac{1}{b}$, con una integrazione si ottiene

$$B(y(x)) = A(x) + c$$

con $c \in \mathbb{R}$. Tale formula fornisce la soluzione generale in forma implicita; se la funzione B è una funzione invertibile e se la sua inversa è nota, si può ottenere la soluzione in forma esplicita tramite

$$y(x) = B^{-1}(A(x) + c).$$

Esempio 3.3 Si consideri l'equazione $y' = 2x\sqrt{1-y^2}$; le funzioni $y(x) = \pm 1$ sono soluzioni; nel caso $y \neq \pm 1$, si ottiene

$$\frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = 2x$$

da cui

$$\arcsen(y(x)) = x^2 + c.$$

Notiamo che, visto che il codominio della funzione \arcsen è l'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$, la precedente espressione ha senso fintanto che $x^2 + c \in [-\pi/2, \pi/2]$; in particolare, la costante c , nel caso di un Problema di Cauchy, andrà scelta in modo che $x_0^2 + c \in [-\pi/2, \pi/2]$. Invertendo la precedente espressione, si trova che la soluzione generale è data da $y(x) = \sin(x^2 + c)$. Se si vuole ad esempio risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} y' = 2x\sqrt{1-y^2} \\ y(\sqrt{\pi}) = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

allora la soluzione è data da $u(x) = \sin(x^2 - 5\pi/6)$, e tale soluzione è definita per $x \in [\sqrt{\pi/3}, 2\sqrt{\pi/3}]$.

Esercizio 3.1 Si risolva il seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} yy' = 1 \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Esercizio 3.2 Si trovi la soluzione generale dell'equazione $y' = ay(1 - by)$ con a e b due numeri reali positivi. In particolare, si risolva l'equazione di Verhulst $y' = \varepsilon y(1 - \frac{y}{k})$

3.1.2 Equazioni lineari del primo ordine

Sono queste le equazioni della forma $y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$; il teorema 3.2 garantisce l'esistenza e l'unicità delle soluzioni nel caso in cui $a, f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni continue (in questo caso il valore iniziale y_0 può essere un qualsiasi numero reale). Nel caso in cui $f = 0$ si parla di equazione omogenea, mentre con $f \neq 0$ si parla di equazione completa e l'equazione $y' + ay = 0$ si chiama omogenea associata. Abbiamo il seguente risultato.

Teorema 3.3 *La soluzione generale dell'equazione completa è data dalla soluzione generale dell'omogenea associata a cui va aggiunta una soluzione particolare. Inoltre, se a e f sono funzioni continue, per ogni $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, l'unica soluzione del Problema di Cauchy con dato iniziale in x_0 e valore iniziale y_0 è data da*

$$y(x) = \left(y_0 + \int_{x_0}^x e^{A(t)} f(t) dt \right) e^{-A(x)}$$

con A la primitiva di a data da

$$A(x) = \int_{x_0}^x a(t) dt.$$

L'integrale generale infine è dato dall'espressione

$$y(x) = e^{A(x)} \left(c + \int e^{-A(x)} f(x) dx \right)$$

con $A(x)$ una qualsiasi primitiva di $a(x)$.

DIMOSTRAZIONE L'esistenza e l'unicità per il Problema di Cauchy segue dal Teorema 3.2 in quanto

$$f(x, y) = f(x) - a(x)y$$

e la continuità in x segue dalla continuità di $f(x)$ e $a(x)$, mentre la funzione $y \mapsto f(x) - a(x)y$ è derivabile con derivata $a(x)$. Se u è la soluzione generale e u_p è una soluzione particolare, allora $u_0 = u - u_p$ soddisfa

$$u_0' + au_0 = u' + au - u_p' - au_p = f - f = 0,$$

cioè u_0 è soluzione dell'omogenea; viceversa, nello stesso modo si dimostra che se u_0 è soluzione dell'omogenea e u_p una soluzione particolare, allora $u = u_0 + u_p$ è soluzione della completa. Quindi, per trovare la soluzione generale, si può prima cercare la soluzione generale dell'omogenea e poi cercare una soluzione particolare. Per risolvere l'omogenea associata, moltiplichiamo l'equazione per $e^{A(x)}$ con A una primitiva di a , per ottenere

$$0 = e^A y' + a e^A y = \frac{d}{dx}(e^A y)$$

e quindi $e^A y$ è una funzione costante, cioè

$$y(x) = c e^{-A(x)}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Si noti che questa espressione ci dice che l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea è uno spazio vettoriale di dimensione uno la cui base è dato dalla funzione $e^{-A(x)}$.

Per trovare una soluzione particolare, si può utilizzare il metodo detto della variazione delle costanti. Tale metodo consiste nel partire dalla soluzione generale dell'omogenea associata e considerare c non come una costante, ma come una funzione $c(x)$. Cioè, consideriamo

$$y(x) = c(x) e^{-A(x)}$$

in cui ora l'incognita è la funzione $c(x)$. Derivando otteniamo

$$y' = c' e^{-A} - c a e^{-A};$$

imponendo che tale funzione risolva l'equazione completa si ottiene

$$f = y' + a y = c' e^{-A}$$

da cui $c' = f e^A$, cioè, integrando, $c(x) = c + \int e^{A(x)} f(x) dx$. □

Esercizio 3.3 Si risolva il seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x^2} \\ y(-1) = 2. \end{cases}$$

Esercizio 3.4 Si risolva l'equazione che descrive la carica di un condensatore C in un circuito con resistenza R sottoposto ad un campo E

$$CRy' + y = E.$$

Esercizio 3.5 Si risolva l'equazione $y' + ay = f$ con $a > 0$ costante.

3.1.3 Equazioni di Bernoulli

Le equazioni di Bernoulli sono equazioni del tipo

$$y' + ay = fy^\alpha$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0, 1$ (in questi casi siamo ricondotti ad una semplice equazione lineare). Questo tipo di equazioni si può ricondurre ad una equazione lineare; infatti, se si divide per y^α si ottiene

$$y^{-\alpha}y' + ay^{1-\alpha} = f$$

e quindi, ponendo $v = y^{1-\alpha}$ si giunge all'equazione

$$\frac{1}{1-\alpha}v' + av = f.$$

Esempio 3.4 Risolviamo il seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = xy + x\sqrt{y} \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

3.2 Equazioni lineari del secondo ordine

Le equazioni lineari del secondo ordine sono equazioni del tipo

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x)$$

Esempi importanti vengono dalla Fisica e dall'equazione fondamentale della dinamica $F = ma$; in particolare, la caduta di un grave soggetto alla forza di gravità soddisfa l'equazione $y'' = g$, l'equazione dell'oscillatore armonico è dato da $my'' = -ky$, l'oscillatore armonico con attrito è dato da $my'' + hy' + ky = 0$ mentre l'oscillatore armonico con attrito e con termine forzante è dato da $my'' + hy' + ky = f$.

Analogamente a quanto detto nel caso di equazione lineare del primo ordine, si dice che l'equazione è omogenea se $f = 0$, completa se $f \neq 0$ mentre nel caso $f \neq 0$ l'equazione $y'' + ay + by = 0$ si chiama omogenea associata. Il problema di Cauchy nel caso di equazione del secondo ordine sarà il problema della determinazione della soluzione di

$$(3.3) \quad \begin{cases} y'' + ay' + by = f \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

dove ancora x_0 viene detto dato iniziale e i valori y_0 e y_1 valori iniziali. Abbiamo il seguente risultato.

Teorema 3.4 Siano $a, b, f : I \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue con I intervallo di \mathbb{R} e sia $x_0 \in I$: allora, per ogni scelta di $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$, il Problema di Cauchy (3.3) ammette una ed una sola soluzione.

DIMOSTRAZIONE Notiamo anzitutto che un'equazione del secondo ordine può essere ricondotta ad un sistema di equazioni del primo ordine ponendo $V(x) = (V_1(x), V_2(x))$, $V_1(x) = y(x)$, $V_2(x) = y'(x)$. In questo modo il Problema di Cauchy diventa

$$\begin{cases} V'(x) + \vec{a}(x)V(x) + \vec{f}(x) \\ V(0) = V_0 \end{cases}$$

dove

$$\vec{a}(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ b(x) & a(x) \end{pmatrix}, \quad \vec{f}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}, \quad V_0 = V(x_0) \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Quindi si ottiene una equazione lineare del primo ordine nell'incognita $V(x)$, la cui soluzione, così come nel caso di equazione lineare del primo ordine vista nella Sezione 3.1.2, è data dalla formula

$$V(x) = \left(V_0 + \int_{x_0}^x e^{\vec{A}(t)} \vec{f}(t) dt \right) e^{-\vec{A}(x)}$$

con

$$\vec{A}(x) = \begin{pmatrix} 0 & x_0 - x \\ B(x) & A(x) \end{pmatrix}, \quad A(x) = \int_{x_0}^x a(t) dt, \quad B(x) = \int_{x_0}^x b(t) dt$$

e l'esponenziale di una matrice è la matrice data da

$$e^{\vec{A}(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\vec{A}(x)^k}{k!};$$

si può dimostrare che l'ipotesi di continuità fatta su a e b implica la convergenza della precedente serie. \square

Osservazione 3.5 Nel Teorema precedente abbiamo formalmente una formula che ci dice come calcolare esplicitamente la soluzione date le funzioni a , b ed f ed i dati iniziali x_0 , y_0 e y_1 . Il problema fondamentale della precedente formula sta nella difficoltà, in generale, del calcolo esplicito della funzione $e^{\vec{A}(x)}$. Vedremo in seguito che tale calcolo si potrà fare sostanzialmente solo quando a e b sono funzioni costanti.

Vediamo ora di studiare le proprietà dell'insieme delle soluzioni di una equazione differenziale lineare del secondo ordine.

Teorema 3.6 *La soluzione generale di una equazione differenziale del secondo ordine è data dalla somma dell'integrale generale dell'equazione omogenea associata e di una soluzione particolare. Inoltre, lo spazio delle soluzioni della omogenea associata è un sottospazio vettoriale di $C^2(I)$ di dimensione 2.*

DIMOSTRAZIONE Come abbiamo già visto per le equazioni differenziali lineari del primo ordine, se y è una soluzione generale e y_p è una soluzione particolare, allora $y_0 = y - y_p$ è soluzione dell'omogenea associata e viceversa, se y_0 è soluzione dell'omogenea e y_p è soluzione particolare, $y = y_0 + y_p$ è soluzione.

Per vedere che l'insieme delle soluzioni dell'omogenea associata è uno spazio vettoriale di dimensione 2 basta fornire una base costituita da due elementi, cioè basta trovare due funzioni linearmente indipendenti u_1 e u_2 tale che per ogni altra soluzione y esistano due numeri $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tale $y(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$. Consideriamo le due funzioni u_1 e u_2 soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(x_0) = 1 \\ y'(x_0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 1 \end{cases}$$

Il teorema di esistenza e unicità garantisce che u_1 ed u_2 esistono e sono uniche. Esse sono linearmente indipendenti in quanto se esistessero $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tali che $u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) = 0$, valutando in x_0 tale espressione si otterrebbe $0 = c_1 u_1(x_0) + c_2 u_2(x_0) = c_1$, cioè $c_1 = 0$. Inoltre, siccome si ha anche che $0 = u'(x) = c_1 u_1'(x) + c_2 u_2'(x)$, si otterrebbe anche che $0 = u'(x_0) = c_2$, cioè $c_2 = 0$. Presa ora una soluzione generalizzata $y(x)$ e scegliendo $c_1 = y(x_0)$ e $c_2 = y'(x_0)$, abbiamo che la funzione $u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$ ha la proprietà che $u(x_0) = c_1 = y(x_0)$ e $u'(x_0) = c_1 u_1'(x_0) + c_2 u_2'(x_0) = y'(x_0)$, cioè sia u che y risolvono lo stesso problema di Cauchy, quindi per l'unicità delle soluzioni se deve avere $y(x) = u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$. \square

Come detto in precedenza, il calcolo esplicito delle soluzioni è spesso un problema difficile e fattibile solo in casi molto particolare, come nel seguente esempio.

Esempio 3.5 Trovare l'integrale generale dell'equazione

$$x^2 y''(x) - 3x y'(x) + 3y(x) = 0.$$

In questo caso infatti, quando $x \neq 0$, si ottiene che

$$y''(x) = \frac{3}{x} y'(x) - \frac{3}{x^2} y(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{3}{x} y(x) \right)$$

da cui $y'(x) = \frac{3}{x} y(x) + c_1$. Questa è poi una equazione differenziale lineare del primo ordine con $a(x) = -\frac{3}{x}$ e $f(x) = c_1$, la cui soluzione è data da

$$y(x) = \left(c_2 + \int \frac{c_1}{x^3} dx \right) x^3 = c_1 x + c_2 x^3.$$

3.2.1 Equazioni a coefficienti costanti

È questo il caso in cui a e b sono costanti; cerchiamo prima di tutto le soluzioni dell'equazione omogenea associata. Il vantaggio quando a e b sono costanti sta nel fatto che il problema può essere ricondotto ad un problema algebrico; infatti, se consideriamo le funzioni $y_\lambda(x) = e^{\lambda x}$, allora y_λ è soluzione dell'equazione omogenea se e solo se $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$, cioè se e solo se λ è radice del polinomio $P(x) = x^2 + ax + b$, detto polinomio caratteristico. Siccome si riescono sempre a trovare due radici distinte, almeno nel caso di discriminante diverso da zero, la questione diventa quindi se dati due distinti λ_1 e λ_2 , le funzioni $e^{\lambda_1 x}$ ed $e^{\lambda_2 x}$ siano linearmente indipendenti o meno.

Proposizione 3.7 *Dati $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, le funzioni $e^{\lambda_1 x}$ ed $e^{\lambda_2 x}$ sono linearmente indipendenti per combinazioni complesse. In particolare, nel caso di combinazioni reali, se $\alpha, \beta, c \in \mathbb{R}$ con $\alpha \neq \beta$, le seguenti funzioni sono linearmente indipendenti:*

1. $e^{\alpha x}$ ed $e^{\beta x}$;
2. $\sin(\alpha x)$ e $\sin(\beta x)$, $\cos(\alpha x)$ e $\cos(\beta x)$, $e^{cx} \sin(\alpha x)$ e $e^{cx} \cos(\alpha x)$;
3. x^α e x^β così come $e^{cx} x^\alpha$ e $e^{cx} x^\beta$, $\sin(cx) x^\alpha$ e $\sin(cx) x^\beta$.

DIMOSTRAZIONE La dimostrazione segue semplicemente assumendo che esistano $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ tali che

$$u(x) := c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} = 0$$

Siccome $u(0) = c_1 + c_2$, se ne deduce che $c_1 + c_2 = 0$. Inoltre, dato che $u(x) = 0$, anche $u'(x) = 0$, da cui $u'(0) = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 = 0$: abbiamo quindi ottenuto il sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

la cui unica soluzione, dato che $\lambda_1 \neq \lambda_2$, è data da $c_1 = c_2 = 0$. Per la restante parte della proposizione, basta per il primo punto considerare $\lambda_1 = \alpha, \lambda_2 = \beta \in \mathbb{R}$ e combinazioni reali, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, mentre gli altri punti seguono dall'osservazione che se y_1 ed y_2 sono linearmente indipendenti, allora lo sono anche $v_1 = y_1 + y_2$ e $v_2 = y_1 - y_2$. Usando questa osservazione, si considera $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ e si ottiene che

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x) = \frac{e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_2 x}}{2}, \quad e^{\alpha x} \sin(\beta x) = \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}}{2i}.$$

L'ultima parte riguarda l'indipendenza lineare di x^α e x^β ; ma se $u(x) = c_1 x^\alpha + c_2 x^\beta = 0$, allora $0 = u(1) = c_1 + c_2$, così come $0 = u'(1) = c_1 \alpha + c_2 \beta$, e quindi ancora $c_1 = c_2 = 0$. \square

Il precedente risultato può essere usato, assieme a quanto visto per i polinomi in campo complesso, per trovare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea. Infatti, per quanto visto, il polinomio caratteristico è dato da $x^2 + ax + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$, quindi un polinomio a coefficienti reali. Tale polinomio può avere due radici reali $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, da cui il fatto che $e^{\lambda_1 x}$ ed $e^{\lambda_2 x}$ sono due soluzioni linearmente indipendenti, oppure due radici complesse coniugate tra loro, $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, da cui $e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ ed $e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ sono due soluzioni linearmente indipendenti, oppure ancora una sola radice reale λ di molteplicità due, nel qual caso si ottiene che $e^{\lambda x}$ ed $x e^{\lambda x}$ sono due soluzioni linearmente indipendenti. Abbiamo così dimostrato il seguente risultato.

Teorema 3.8 *Data l'equazione differenziale del secondo ordine lineare a coefficienti costanti omogenea*

$$y'' + ay' + by = 0,$$

allora

1. se $a^2 - 4b > 0$, il polinomio caratteristico ammette due radici reali $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e la soluzione generale è data da

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R};$$

2. se $a^2 - 4b < 0$, il polinomio caratteristico ha due radici complesse coniugate tra loro $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ e la soluzione generale è data da

$$y(x) = e^{\alpha x} (c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R};$$

3. se $a^2 - 4b = 0$, il polinomio caratteristico ha una sola radice reale λ con molteplicità due e la soluzione generale è data da

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 3.6 Risolvere le seguenti equazioni differenziali

1. $y'' - \omega^2 y = 0$;

2. oscillatore armonico $y'' + \omega^2 y = 0$;
3. oscillatore armonico con attrito $y'' - 2\omega y' + \omega^2 y = 0$;
4. con dati iniziali

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 3y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$$

Vediamo ora come si risolve un'equazione differenziale del secondo ordine completa, cioè come si fa a trovare la soluzione particolare. Si hanno sostanzialmente due metodi.

Metodo per somiglianza Questo metodo si può applicare quando il termine forzante f assume forme particolari, più precisamente quando

$$f(x) = e^{\alpha x} (p_n(x) \cos(\beta x) + q_m(x) \sin(\beta x))$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e p_n, q_m due polinomi di grado rispettivamente n ed m . Prima di tutto si considera il numero complesso $\lambda = \alpha + i\beta$ e si pone h uguale alla molteplicità di λ come radice del polinomio caratteristico; in particolare $h = 0$ se $P(\lambda) \neq 0$, $h = 1$ se $P(\lambda) = 0$ ma P ammette una seconda radice diversa da λ , mentre $h = 2$ se $P(x) = (x - \lambda)^2$. Si considera poi $k = \max(n, m)$ (si prende cioè il massimo tra i gradi di p_n e q_m) e si cerca la soluzione particolare nella forma

$$y_p(x) = x^h e^{\alpha x} (\bar{p}_k(x) \cos(\beta x) + \bar{q}_k(x) \sin(\beta x))$$

con \bar{p}_k e \bar{q}_k polinomio da determinare imponendo che y_p sia una soluzione dell'equazione completa.

Esempio 3.6 Trovare le soluzioni delle seguenti equazioni

1. $y'' + 3y = x + 2 \cos x$;
2. $y'' - \omega^2 y = 1 + x^2$;
3. $y'' + 2y' = x$;
4. $y'' + 2y' + 3y = 2e^{3x}$;
5. $y'' + 2y' - 3y = 2e^{-3x}$;
6. $y'' + 2y' - y = 2e^x \cos(3x)$;
7. $2y'' + y' + 2y = 3 \sin(2x)$.

Vediamo solo la prima equazione

Metodo della variazione delle costanti Il metodo è lo stesso visto nel caso dell'equazione lineare del primo ordine; si parte dalla soluzione generale dell'omogenea

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

e si considerano $c_1 = c_1(x)$ e $c_2 = c_2(x)$ come funzioni. Derivando si ottiene

$$y'(x) = c'_1(x)e^{\lambda_1 x} + c'_2(x)e^{\lambda_2 x} + c_1(x)\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + c_2(x)\lambda_2 e^{\lambda_2 x}$$

e al primo passo si pone

$$c'_1(x)e^{\lambda_1 x} + c'_2(x)e^{\lambda_2 x} = 0.$$

In questo modo la derivata seconda diventa

$$y''(x) = c'_1(x)\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + c'_2(x)\lambda_2 e^{\lambda_2 x} + c_1(x)\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + c_2(x)\lambda_2^2 e^{\lambda_2 x}$$

Imponendo quindi che $y'' + ay' + by = f$ e sapendo che λ_1 e λ_2 sono radici del polinomio caratteristico, si giunge alla condizione

$$c'_1(x)\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + c'_2(x)\lambda_2 e^{\lambda_2 x} = f(x).$$

Si tratta quindi di risolvere il sistema, nelle incognite c'_1 e c'_2

$$\begin{cases} c'_1(x)e^{\lambda_1 x} + c'_2(x)e^{\lambda_2 x} = 0 \\ c'_1(x)\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + c'_2(x)\lambda_2 e^{\lambda_2 x} = f(x). \end{cases}$$

Esercizio 3.7 Risolvere le seguenti equazioni;

1. oscillatore armonico $my'' = -ky$;
2. oscillatore armonico smorzato $y'' + 2\delta y' + \omega^2 y = 0$;
3. oscillazioni forzate $y'' + \omega^2 y = B \cos(\omega_0 x)$ (battimenti nel caso $\omega \neq \omega_0$, risonanza nel caso $\omega = \omega_0$).
4. $y'' + \omega^2 y = \tan x$.

3.3 Equazioni lineari di ordine superiore

I risultati visti nella sezione precedente si possono generalizzare ad equazioni di ordine superiore, cioè al caso dell'equazione

$$y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y(x) = f(x)$$

con $a_1, \dots, a_n, f : I \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue. In particolare si avrà che

1. la soluzione generale sarà data dalla somma della soluzione generale dell'omogenea associata e di una soluzione particolare;
2. l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea è un sottospazio vettoriale di dimensione n di $C^n(I)$;

3. nel caso di equazione a coefficienti costanti, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, le soluzioni dell'equazione omogenea si cercano nella forma $e^{\lambda x}$ con λ radice del polinomio caratteristico $P(x) = x^n + a_1x + \dots + a_n$: la soluzione generale dell'omogenea sarà quindi sempre combinazione lineare di esponenziali e seni e coseni;
4. per l'individuazione della soluzione particolare, si potranno sempre usare i metodi per somiglianza e della variazione delle costanti.

Esempio 3.7 [Equazione della linea elastica o della trave elastica] Si tratta dell'equazione

$$EJy^{(4)}(x) = q$$

dove E è il modulo di Young, J il momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse baricentrico ($B = EJ$ viene detto modulo di rigidezza a flessione) e q è il carico che viene esercitato sulla trave. La soluzione generale di tale equazione, nell'ipotesi q costante, è data da

$$y(x) = c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4 + \frac{q}{24B}x^4.$$

Capitolo 4

Domande

4.1 Sviluppi di Taylor: domande

1. Dare la definizione del simbolo o (o piccolo) ed enunciare alcune delle sue principali proprietà, fornendo gli esempi che si ritengono opportuni.
2. Dare la definizione di infinitesimo; tramite esempi, fornire inoltre il concetto di ordine di infinitesimo tramite i monomi x^a , $x \in \mathbb{R}$.
3. Dare la definizione e le principali proprietà del polinomio di Mac Laurin e del polinomio di Taylor; dare alcuni esempi.
4. Dimostrare che, data una funzione f , vale l'identità $o(f) - o(f) = o(f)$ e che in generale $o(f) - o(f) \neq 0$ (fornire almeno un controesempio).
5. Definizione di resto di Peano e resto di Lagrange; dare alcuni esempi.
6. Dare la definizione di linearizzazione di una funzione e fornire alcuni esempi significativi.
7. Discutere il concetto di approssimazione e fornire metodi per la stima dell'errore nelle approssimazioni.
8. Mostrare come si può utilizzare la formula di Taylor del secondo ordine per la classificazione dei punti stazionari di una funzione.

4.2 Numeri complessi: domande

1. Dare la definizione algebrica dei numeri complessi; descrivere inoltre l'operazione di coniugio e modulo di un numero complesso.
2. Equivalenza tra forma algebrica e polare di un numero complesso; definizioni e regole per passare da una all'altra.
3. Definizione di piano di Gauss e rappresentazione cartesiana di un numero complesso; interpretazione geometrica di somma e prodotto tra numeri complessi.

4. Definizione e principali proprietà di coniugio e modulo di un numero complesso.
5. Principio di uguaglianza tra numeri complessi in forma algebrica ed in forma polare.
6. Formula di De Moivre e definizione dell'esponenziale immaginario.
7. Definizione di argomento e modulo di un numero complesso; esempi con numeri reali positivi, negativi, i e $-i$.
8. Definizione di radici n -esime di un numero complesso e loro distribuzione nel piano di Gauss.
9. Enunciato del Teorema Fondamentale dell'algebra nelle sue due forme equivalenti; in che senso le due forme sono equivalenti?
10. Calcolo delle radici di un polinomio complesso in campo complesso.
11. Polinomio complessi a coefficienti reali; proprietà delle radici.

4.3 Equazioni differenziali: domande

1. Dare la definizione di equazione differenziale di ordine n in forma implicita ed esplicita e dire cosa si intende per soluzione; fornire alcuni esempi significativi.
2. Equazioni differenziali del primo ordine; definizione ed esempi di equazioni a variabili separabili.
3. Definizione di Problema di Cauchy ed enunciato di almeno un risultato di esistenza e unicità.
4. Equazioni differenziali lineari del primo ordine; struttura dell'insieme delle soluzioni e formula risolutiva.
5. Metodo della variazione delle costanti; definizione ed alcune applicazioni.
6. Equazione di tipo Bernoulli; definizione e metodo di risoluzione, con discussione riguardo l'esistenza delle soluzioni.
7. Equazioni differenziali del secondo ordine; struttura dell'insieme delle soluzioni.
8. Definizione di polinomio caratteristico ed applicazione alla risoluzione delle equazioni differenziali lineari.
9. Descrizione dei possibili elementi della base dell'insieme delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti.
10. Descrizione di almeno un metodo per la costruzione della soluzione particolare di una equazione differenziale lineare a coefficienti costanti.
11. Descrizione del metodo di somiglianza per le equazioni differenziali.
12. Equazione dell'oscillatore armonico con termine forzante; fenomeno dei battimenti e della risonanza.