

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA  
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Appunti del corso di  
Analisi Matematica II  
c.d.l. Ingegneria Civile e Ambientale <sup>1</sup>

Michele Miranda

a.a. 2011-2012

<sup>1</sup>Versione aggiornata al 29 settembre 2011

Nel presente fascicolo sono raccolti gli appunti relativi ad alcuni capitoli del corso di Analisi Matematica 2 tenuto presso la facoltà di Ingegneria dell'Università di Ferrara, corso di laurea in Ingegneria Civile.

Il materiale contenuto in queste note vuole essere semplicemente una guida per gli argomenti trattati durante il corso; è inevitabilmente incompleto, così come è inevitabile che siano presenti errori ed inesattezze. Non si risponde tuttavia degli errori che possono essere contenuti in questo fascicolo, in quanto è cura del lettore rilevare e segnalare eventuali imprecisioni.

I presenti appunti non hanno la pretesa di sostituire il libro di testo, che resta indispensabile per acquisire una conoscenza dignitosa della materia. La loro funzione è piuttosto quella di facilitare gli studenti e indicare loro il bagaglio *minimo* di conoscenze richieste per affrontare l'esame. Si consiglia pertanto sempre di studiare sui testi di Analisi Matematica esistenti in letteratura, sicuramente più affidabili e corretti; fortunatamente le biblioteche dei nostri Atenei traboccano di ottimi testi.

Si consiglia infine di prestare attenzione alla data di aggiornamento della presente dispensa, in quanto in continua evoluzione e correzione.

Michele Miranda  
Ferrara, 29 settembre 2011

# Indice

<b>1</b>	<b>Calcolo vettoriale, topologia, limiti</b>	<b>5</b>
1.1	Distanza e topologia . . . . .	6
1.2	Successioni . . . . .	11
1.3	Limiti . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Calcolo infinitesimale per le curve</b>	<b>15</b>
2.1	Curve e curve regolari . . . . .	15
2.1.1	Curve nel piano . . . . .	19
2.2	Lunghezza, ascissa curvilinea e integrali curvilinei . . . . .	19
2.3	Curvatura e terna di Frenet . . . . .	23



# Capitolo 1

## Calcolo vettoriale, topologia, limiti

Nel corso di Analisi I si sono studiate le funzioni  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  con  $I$  sottoinsieme di  $\mathbb{R}$ ; di tali funzioni si sono date le definizioni di continuità, derivabilità e integrabilità, si sono studiati problemi di massimo e minimo e metodi per la loro individuazione. Iniziamo ora lo studio di funzioni  $f : A \rightarrow B$  con  $A$  e  $B$  sottoinsiemi di spazi Euclidei a più dimensioni; le nozioni che vorremo considerare, e cioè continuità, derivabilità e integrabilità, si basano sul concetto di limite, che si fonda sulla nozione di distanza.

Nel prossimo paragrafo inizieremo quindi lo studio delle proprietà dei sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n$ , in particolare daremo la nozione di insieme aperto e chiuso (si parla in tal caso di topologia di  $\mathbb{R}^n$ ) ed estenderemo il concetto di intervallo ad  $n$  variabili.

Iniziamo aprendo una piccola parentesi sul calcolo vettoriale. Uno spazio vettoriale è un insieme  $V$  in cui sono definite una somma e la moltiplicazione per scalare, cioè la possibilità di poter sommare due vettori  $u, v \in V$  in modo che  $u+v \in V$ , e poter moltiplicare un vettore  $v \in V$  per uno scalare  $\lambda \in \mathbb{R}$  in modo che  $\lambda v \in V$ . Esempio semplice di spazio vettoriale è  $\mathbb{R}$ , ma possiamo anche considerare l'insieme delle funzioni continue o anche derivabili su di un intervallo di  $\mathbb{R}$ , cioè le funzioni

$$V = C^k(I, \mathbb{R}) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ derivabile con continuità } k \text{ volte}\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dire che  $V = V^n$  ha dimensione  $n$  significa supporre che esistono  $n$  vettori linearmente indipendenti  $e_1, \dots, e_n \in V^n$  che generano tutto  $V^n$ , cioè tali che per ogni  $v \in V^n$  siano univocamente determinati  $n$  numeri reali  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}$  in modo che

$$(1.1) \quad v = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n.$$

Quindi, solo una volta che viene fissata una base si può identificare  $V^n$  con  $\mathbb{R}^n$ , nel senso che un vettore  $v$  può essere identificato con la  $n$ -upla di numeri reali  $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  che determinano  $v$  mediante la (1.1). In questo modo i vettori  $e_1, \dots, e_n$  possono essere identificati con i vettori

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_n = (0, 0, \dots, 1).$$

Questa identificazione non sempre è una banale osservazione, ma funziona anche con spazi di funzioni; in generale lo spazio  $C^k(I, \mathbb{R})$  ha dimensione infinita per ogni  $k \in \mathbb{N}$  in quanto le

funzioni  $x^a$  e  $x^b$  sono tutte linearmente indipendenti se  $a, b \in \mathbb{N}$ ,  $a \neq b$ . Se però consideriamo lo spazio

$$V^n = \{f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f \text{ polinomio di grado al più } n-1\},$$

abbiamo che  $V^n$  ha dimensione  $n$  in quanto generato dalle  $n$  funzioni  $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ .

Tipicamente, nel caso si lavori in  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$  si denotano i vettori  $e_1, e_2$  ed  $e_3$  con le lettere

$$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}, \quad \text{o} \quad \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}.$$

Denoteremo i punti di  $\mathbb{R}^n$  con le usuali lettere  $x, y$  intendendo quindi le  $n$ -uple  $(x_1, \dots, x_n)$  e  $(y_1, \dots, y_n)$ , ma spesso useremo anche altre lettere quali ad esempio  $u, v$ , e  $w$  quando sarà comodo vedere gli elementi di  $\mathbb{R}^n$  come vettori, oppure  $p, q$  quando vorremo precisare che sono punti dello spazio. Nel caso  $n = 2$  o  $n = 3$  useremo anche le notazioni  $(x, y)$  e  $(x, y, z)$ ; sarà sempre possibile capire dal contesto se ad esempio la lettera  $x$  denota un vettore o la coordinata di un punto  $(x, y)$ .

Una volta identificato  $V^n$  con  $\mathbb{R}^n$ , le nozioni di somma vettoriale e prodotto per scalare sono determinate dalle analoghe operazioni componente per componente;

$$x + y = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

$$\lambda x = \lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

Risulta molto comodo lavorare direttamente con  $\mathbb{R}^n$  e sarà questo praticamente l'unico modo di fare conti con le funzioni di più variabili; bisognerà prestare attenzione al fatto che le considerazioni che faremo non dipendano dalla scelta della base fatta <sup>1</sup>, ma che siano effettivamente proprietà intrinseche dello spazio  $V^n$ .

## 1.1 Distanza e topologia

Sullo spazio  $\mathbb{R}^n$  è definito il prodotto scalare standard come segue

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n;$$

si parla di spazio Euclideo ogni qual volta è definito un prodotto scalare. Tramite tale prodotto scalare si può definire la norma di un vettore  $x \in \mathbb{R}^n$  ponendo  $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$ ; nel caso  $n = 1$  la norma coincide con il valore assoluto di un numero reale. Si parla di versore nel caso di vettore di norma 1 mentre dato un vettore  $x$  con  $\|x\| \neq 0$ , si può definire il versore direzione di  $x$  come

$$\hat{x} = \frac{x}{\|x\|}.$$

Dati due vettori  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , essi generano al più uno spazio di dimensione 2, quindi ragionando come se fossero elementi del piano  $\mathbb{R}^2$ , è facile rendersi conto che

$$(1.2) \quad x \cdot y = \|x\| \|y\| \cos \vartheta,$$

dove  $\vartheta$  è l'angolo tra i due vettori. Infatti, supponendo che entrambi i vettori siano non nulli altrimenti la dimostrazione è immediata, abbiamo che  $x$  e  $y$  generano uno spazio di

---

<sup>1</sup>Si tenga presente anche che generalmente in dimensione maggiore di uno si possono avere anche sistemi di riferimento diversi dalle basi vettoriali, ma si possono anche considerare coordinate non lineari, quali ad esempio le coordinate polari nel piano, cilindriche e sferiche nello spazio

dimensione 2 che possiamo identificare con  $\mathbb{R}^2$ ; fissiamo quindi la base di  $\mathbb{R}^2$  in modo che  $e_1 = \hat{x}$ , cioè  $x = \|x\|e_1 = (\|x\|, 0)$  e  $y = (y_1, y_2)$ . In tal modo otteniamo che

$$x \cdot y = \|x\|y_1 = \|x\|\|y\| \cos \vartheta$$

in quanto  $y_1$  è il cateto del triangolo rettangolo di ipotenusa  $\|y\|$  e adiacente all'angolo  $\vartheta$ .

La norma soddisfa le seguenti proprietà per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$  e per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

1. positività,  $\|x\| \geq 0$  con  $\|x\| = 0$  se e solo se  $x = 0$ ;
2. omogeneità,  $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ ;
3. confronto con il valore assoluto, cioè per ogni  $j = 1, \dots, n$

$$|x_j| \leq \|x\| \leq \sqrt{n} \max_{i=1, \dots, n} |x_i|;$$

4. subadditività,

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|;$$

5. disuguaglianze triangolari,

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Delle precedenti proprietà necessitano una dimostrazione solo gli ultimi due punti; prendendo i quadrati e tenuto conto di (1.2) abbiamo che

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y) \cdot (x + y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2x \cdot y \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \cos \vartheta \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

da cui la 3.. Per la 4. Notiamo che

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|,$$

cioè  $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ . Scambiando i ruoli tra  $x$  e  $y$  si ottiene la prima disuguaglianza in 4., mentre la seconda segue da

$$\|x - y\| = \|x + (-y)\| \leq \|x\| + \|-y\| = \|x\| + \|y\|.$$

Una operazione tra vettori che daremo solo in  $\mathbb{R}^3$  è il prodotto vettoriale <sup>2</sup>; dati due vettori  $x, y \in \mathbb{R}^3$ , si definisce prodotto vettoriale  $z = x \times y$  il vettore avente come modulo l'area del parallelogramma determinato da  $x$  e  $y$  e orientato in modo che, se  $x$  e  $y$  sono

---

<sup>2</sup>Tale definizione si può dare in realtà in dimensione qualsiasi, ma necessita la nozione di forme differenziali; il prodotto vettoriale è in generale una 2-forma, che in  $\mathbb{R}^3$ , una volta fissato una base orientata destrorsa viene identificata in modo canonico con un vettore. Questa identificazione dipende quindi dall'orientazione che viene fissata e non è quindi una identificazione intrinseca, cambiando di segno se si cambia orientazione da destrorsa a sinistrorsa.

linearmente indipendenti, i vettori  $x$ ,  $y$  e  $z$  rappresentano una base destrorsa di  $\mathbb{R}^3$ . Questo viene realizzato definendo

$$\begin{aligned} z = x \times y &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \\ &= (x_2 y_3 - x_3 y_2) \mathbf{i} + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \mathbf{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \mathbf{k} \\ &= (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1). \end{aligned}$$

La norma  $\|\cdot\|$  definisce una distanza su  $\mathbb{R}^n$ ,  $d(x, y) = \|x - y\|$ ; le principali proprietà della distanza, dati  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ , sono le seguenti, dirette conseguenze delle analoghe proprietà della norma;

1. positività,  $d(x, y) \geq 0$  con  $d(x, y) = 0$  se e solo se  $x = y$ ;
2. simmetria,  $d(x, y) = d(y, x)$ ;
3. disuguaglianza triangolare  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ .

Una volta definita la distanza, possiamo dare la nozione di prossimità.

**Definizione 1.1 (Intorno sferico)** Si chiamano intorno sferico aperto ed intorno sferico chiuso di  $x \in \mathbb{R}^n$  con raggio  $r > 0$  gli insiemi

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < r\}, \quad \overline{B}_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) \leq r\}$$

mentre viene detta sfera di centro  $x$  e raggio  $r > 0$  l'insieme

$$S_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) = r\}.$$

Si noti che  $\overline{B}_r(x) = B_r(x) \cup S_r(x)$ . Nel caso in cui  $x = 0$ , si usa solitamente la notazione semplificata  $B_r$ ,  $\overline{B}_r$  e  $S_r$ ; infine, nel caso  $r = 1$ , a volte si usa la notazione  $\mathbb{S}^{n-1}$  per la sfera  $S_1$ .

**Definizione 1.2 (Intorno cubico)** Si chiamano intorno cubico aperto ed intorno cubico chiuso centrato in  $x \in \mathbb{R}^n$  e lato  $2r > 0$  gli insiemi

$$Q_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y_i - x_i| < r, \forall i = 1, \dots, n\},$$

$$\overline{Q}_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y_i - x_i| \leq r, \forall i = 1, \dots, n\}.$$

**Esempio 1.1** Nel caso  $n = 1$ , si ottiene che  $B_r(x) = Q_r(x) = (x - r, x + r)$ ,  $\overline{B}_r(x) = \overline{Q}_r(x) = [x - r, x + r]$  e  $S_r(x) = \{x - r, x + r\}$ .

**Definizione 1.3 (Insieme aperto e chiuso)** Dato  $E \subset \mathbb{R}^n$  e  $x \in E$ , si dice che:

1.  $x$  è punto interno ad  $E$  se esiste  $r > 0$  tale che  $B_r(x) \subset E$ ;
2.  $x$  si dice esterno ad  $E$  se  $x$  è interno ad  $E^c = \mathbb{R}^n \setminus E$ , cioè se esiste  $r > 0$  tale che  $B_r(x) \cap E = \emptyset$ .

Un punto  $x$  che non è né interno né esterno si dice punto di bordo o di frontiera. Denotiamo con:



1.  $E^\circ$  l'insieme dei punti interni ad  $E$ ;
2.  $\partial E$  l'insieme dei punti di frontiera di  $E$ ;
3.  $\bar{E} = E \cup \partial E$  la chiusura di  $E$ .

Diremo infine che

1.  $E$  è aperto se  $E = E^\circ$ , cioè se tutti i suoi punti sono punti interni;
2.  $E$  è chiuso se  $\bar{E} = E$  o equivalentemente se  $E^c = \mathbb{R}^n \setminus E$  è aperto, che equivale a dire che  $\partial E \subset E$ .

**Esempio 1.2** Possiamo fornire i seguenti esempi.

1. Se fissiamo  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$ , allora  $(a, b)$  è aperto,  $[a, b]$  è chiuso e  $(a, b]$ ,  $[a, b)$  non sono né aperti né chiusi; in tutti i casi l'insieme dei punti di frontiera è dato da  $\{a, b\}$ .
2.  $E = \mathbb{R}^n$  è aperto, così come  $E^c = \partial E = \emptyset$  è aperto. Quindi  $\mathbb{R}^n$  è sia aperto che chiuso; questo è l'unico insieme di  $\mathbb{R}^n$  con tale proprietà.
3. Con  $E = \mathbb{Q}$  abbiamo che  $E^\circ = \emptyset$ ,  $\bar{E} = \partial E = \mathbb{R}$ ; quindi  $\mathbb{Q}$  non è né aperto né chiuso.
4. Infine, se  $E = B_r(x)$ ,  $E^\circ = B_r(x)$ ,  $\bar{E} = \bar{B}_r(x)$  e  $\partial E = S_r(x)$ .

DIMOSTRAZIONE. Preso  $y \in B_r(x)$ , scegliendo  $\varepsilon = r - \|y - x\|$  e preso  $z \in B_\varepsilon(y)$ , cioè se  $\|z - y\| < r - \|y - x\|$ , si ottiene che

$$\|z - x\| = \|z - y + y - x\| \leq \|z - y\| + \|y - x\| < r - \|y - x\| + \|y - x\| = r,$$

cioè  $z \in B_r(x)$  e quindi  $B_\varepsilon(y) \subset B_r(x)$ , che dimostra che  $B_r(x)^\circ = B_r(x)$ . Analogamente, se  $\|y - x\| > r$ , si nota che con la scelta  $\varepsilon = \|y - x\| - r$  si ottiene che  $B_\varepsilon(y) \cap B_r(x) = \emptyset$ , cioè  $B_\varepsilon(y) \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}_r(x)$ , e quindi  $\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}_r(x)$  è aperto. Infine, se  $\|y - x\| = r$ , si nota che per ogni  $\varepsilon > 0$  la palla  $B_\varepsilon(y)$  interseca sia  $B_r(x)$  che il suo complementare, e quindi i punti  $y$  tali che  $\|y - x\| = r$  sono punti di frontiera.  $\square$

Per la nozione di limite è utile anche il concetto di punto di accumulazione.

**Definizione 1.4** Dato un insieme  $E \subset \mathbb{R}^n$ , diremo che un punto  $x_0$  è di accumulazione per  $E$  se per ogni  $r > 0$ , la palla  $B_r(x_0)$  contiene punti di  $E$  diversi da  $x_0$ , cioè se

$$B_r(x_0) \cap (E \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset.$$

Un punto di accumulazione  $x_0$  può appartenere o meno all'insieme  $E$ , ma ci sono anche punti di un insieme che non sono punti di accumulazione; si pensi ad esempio all'insieme della retta reale  $E = (0, 1] \cup \{2\}$ , in cui 2 non è un punto di accumulazione, mentre 0 lo è anche se non appartiene ad  $E$ . Un punto di  $E$  che non sia di accumulazione per  $E$  viene detto punto *isolato*. In questo modo si trova che i punti di accumulazione per  $E$  sono dati dai punti di  $\bar{E}$  che non sono isolati.

Nella seguente proposizioni sono elencate le principali proprietà degli aperti e dei chiusi sotto le operazioni di unione e intersezione; tali proprietà sono le proprietà che definiscono una topologia, cioè una famiglia di insiemi con buone proprietà per unione ed intersezione.

3

<sup>3</sup>Una topologia in uno spazio  $\Omega$  (nel nostro caso  $\Omega = \mathbb{R}^n$  è una famiglia  $\mathcal{T}$  di sottoinsiemi di  $\Omega$  chiusa per unioni arbitrarie ed intersezioni finite tale che  $\Omega$  e  $\emptyset$  appartengono a  $\mathcal{T}$ . Quindi la famiglia degli insiemi aperti di  $\mathbb{R}^n$  è una topologia, mentre gli insiemi chiusi definiscono una topologia passando ai complementari.

**Proposizione 1.5** *Supponiamo di avere due famiglie, una  $\mathcal{A}$  fatta di insiemi aperti e una  $\mathcal{C}$  fatta di insiemi chiusi. Allora*

1. *l'insieme*

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \in \mathbb{R}^n : x \in A \text{ per qualche } A \in \mathcal{A}\}$$

*è aperto, mentre l'insieme*

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C = \{x \in \mathbb{R}^n : x \in C \text{ per ogni } C \in \mathcal{C}\}$$

*è chiuso;*

2. *dato un numero finito di insiemi  $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$  e  $C_1, \dots, C_m \in \mathcal{C}$ , l'insieme*

$$A_1 \cap \dots \cap A_k$$

*è aperto, mentre l'insieme*

$$C_1 \cup \dots \cup C_m$$

*è chiuso.*

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $x \in A$  per un qualche  $A$ , allora, dato che  $A$  è aperto, esiste  $r > 0$  tale che

$$B_r(x) \subset A \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

da cui il fatto che l'unione qualsiasi di insiemi aperti è aperta. Sia poi  $x \in A_1 \cap \dots \cap A_k$ ; dato che ogni  $A_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ , è aperto, esistono  $r_j > 0$  tali che  $B_{r_j}(x) \subset A_j$  per ogni  $j = 1, \dots, k$ . Scegliendo  $r = \min_j r_j$ , si ottiene che  $B_r(x) \subset A_1 \cap \dots \cap A_k$ , e quindi tale intersezione è aperta. Le proprietà sui chiusi si ottengono osservando che se  $C$  è chiuso, allora  $A = \mathbb{R}^n \setminus C$  è aperto.  $\square$

**Osservazione 1.6** Si nota che intersezione arbitraria di insiemi aperti non è in genere aperta; infatti, ad esempio in  $\mathbb{R}$ , se si considerano gli insiemi aperti  $A_j = (-1/(j+1), 1/(j+1))$ , si ottiene che

$$\bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j = \{0\}$$

e quest'ultimo non è un insieme aperto.

**Definizione 1.7 (Insiemi limitati e insiemi compatti)** *Un insieme  $E \subset \mathbb{R}^n$  si dice limitato se esiste  $r > 0$  tale che  $E \subset B_r(0)$ , cioè se esiste  $r > 0$  tale che  $\|x\| < r$  per ogni  $x \in E$ . Un insieme  $E$  viene detto compatto se è chiuso e limitato.*

**Osservazione 1.8** La definizione di limitatezza di un insieme  $E$  può anche essere data richiedendo che esista  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $r > 0$  tale che  $E \subset B_r(x_0)$ ; la definizione non cambia se al posto degli intorni sferici aperti si considerano gli intorni sferici chiusi e anche gli intorni cubici aperto o chiusi. Osserviamo inoltre che la definizione di insieme compatto sarebbe in realtà più topologica, mentre la caratterizzazione dei compatti come insiemi chiusi e limitati è un risultato che vale per gli spazi euclidei finito-dimensionali. La definizione topologica di compattezza dice che:  $E$  è compatto se da ogni ricoprimento aperto

$$E \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

si può scegliere un sottoricoprimento finito, cioè esistono  $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$  tali che

$$E \subset A_1 \cup \dots \cup A_k.$$

Esiste anche, come vedremo, una caratterizzazione della compattezza fatta usando le successioni.

## 1.2 Successioni

Una successione in  $\mathbb{R}^n$  è una funzione  $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , cioè una famiglia  $(x(h) = x_h)_{h \in \mathbb{N}}$  di elementi di  $\mathbb{R}^n$ .

**Definizione 1.9** Una successione  $(x_h)_{h \in \mathbb{N}}$  si dice:

1. *limitata se l'insieme*

$$E = \{x_h : h \in \mathbb{N}\}$$

*è limitato in  $\mathbb{R}^n$ , cioè se esiste  $r > 0$  tale che  $\|x_h\| < r$  per ogni  $h \in \mathbb{N}$ ;*

2. *convergente ad un elemento  $x \in \mathbb{R}^n$ , e scriveremo*

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} x_h = x,$$

*se e solo se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $h_0 \in \mathbb{N}$  tale che  $\|x_h - x\| < \varepsilon$  per ogni  $h > h_0$ .*

Si nota che, se la successione  $(x_h)_{h \in \mathbb{N}}$  è convergente, allora è limitata; inoltre, scrivendo  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $x_h = (x_{h,1}, \dots, x_{h,n})$ , da

$$|x_{h,j} - x_j| \leq \|x_h - x\| \leq \sqrt{n} \max_{i=1, \dots, n} |x_{h,i} - x_i|, \quad \forall j = 1, \dots, n,$$

se ne deduce che una successione  $(x_h)_{h \in \mathbb{N}}$  è convergente ad  $x$  se e solo se le successioni delle sue componenti  $(x_{h,j})_{h \in \mathbb{N}}$  convergono a  $x_j$  per ogni  $j = 1, \dots, n$ . Questo fatto implica in particolare che:

1. il limite è unico, dato che il limite di ogni componente è unico;
2. date due successioni  $(x_h)_{h \in \mathbb{N}}$  e  $(y_h)_{h \in \mathbb{N}}$  convergenti rispettivamente ad  $x$  ed  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ , allora la successione  $(x_h + y_h)_{h \in \mathbb{N}}$  converge a  $x + y$ ;
3. se  $(x_h)_{h \in \mathbb{N}}$  converge ad  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , allora  $(\lambda x_h)_{h \in \mathbb{N}}$  converge a  $\lambda x$ .

**Esempio 1.3** Consideriamo le seguenti successioni in  $\mathbb{R}^2$ :

1. se definiamo

$$x_h = \left( \frac{1}{h}, \frac{h+1}{h} \right),$$

dato che la prima componente,  $\frac{1}{h}$ , converge a 0 e la seconda,  $\frac{h+1}{h}$ , converge ad 1, si avrà che la successione converge al punto  $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$ ;

2. se definiamo

$$x_h = \left( (-1)^h, \frac{1}{h} \right)$$

non può convergere in quanto la successione delle prime componenti,  $(-1)^h$ , non converge.

La definizione di successione estratta sarà data in modo analogo alla definizione di successione estratta in  $\mathbb{R}$ , e cioè tramite una funzione  $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  crescente, da cui la successione estratta  $(x_{h_k})_{h \in \mathbb{N}}$  è data da  $x_{h_k} = x_{k(h)}$ .

**Proposizione 1.10 (Chiusi e compatti per successioni)** *Dato un insieme  $E \subset \mathbb{R}^n$ , si ha che:*

1.  *$E$  è chiuso se e solo se per ogni successione  $(x_h)_{h \in \mathbb{N}} \subset E$  con  $x_h$  convergente ad  $x$ , si ha che  $x \in E$ ;*
2.  *$E$  è compatto se e solo se da ogni successione  $(x_h)_{h \in \mathbb{N}} \subset E$  si può estrarre una sottosuccessione  $(x_{h_k})_{h \in \mathbb{N}}$  convergente ad un elemento di  $x \in E$ ;*
3. *un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  è un punto di accumulazione per  $E$  se e solo se esiste una successione  $(x_h)_{h \in \mathbb{N}} \subset E$  con  $x_h \neq x$  per ogni  $h \in \mathbb{N}$  e tale che  $x_h$  converge a  $x$ .*

DIMOSTRAZIONE.

1. Sia  $(x_h)_{h \in \mathbb{N}} \subset E$  una successione convergente ad  $x$ ; quindi per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $h_0 \in \mathbb{N}$  tale che per  $h > h_0$ ,  $\|x_h - x\| < \varepsilon$ , cioè  $x_h \in B_\varepsilon(x)$ . Dato che  $x_h \in E$  per ogni  $h \in \mathbb{N}$ , abbiamo mostrato che  $B_\varepsilon(x) \cap E \neq \emptyset$  per ogni  $\varepsilon > 0$ , cioè  $x \in \overline{E} = E$  in quanto  $E$  chiuso.

Viceversa, supponiamo per assurdo che  $E$  non sia chiuso, cioè esiste  $x \in \partial E \setminus E$ ; quindi per ogni  $r > 0$ ,  $B_r(x) \cap E \neq \emptyset$ . Prendendo  $r = 1/h$ , ne deduciamo l'esistenza di un elemento  $x_h \in B_r(x) \cap E$ , cioè la possibilità di costruire una successione  $(x_h)_{h \in \mathbb{N}} \subset E$  convergente ad  $x$ , e questo contraddice l'ipotesi.

2. Supponiamo  $E$  compatto, quindi contenuto in un cubo  $\overline{Q}_r$  di lato  $2r$ . Prendiamo una successione  $(x_h)_{h \in \mathbb{N}} \subset E$  e supponiamo  $x_h \neq x_k$  per  $h \neq k$ ; cioè si può fare scartando gli elementi uguali, e quindi a meno di sottosuccessioni, se la successione  $x_h$  assume infiniti valori differenti. In caso contrario, la successione deve assumere un dato valore  $x_0$  infinite volte e quindi definendo

$$k(h) = \{h \in \mathbb{N} : x_h = x_0\},$$

abbiamo trovato una sottosuccessione che converge a  $x_0 \in E$ . Quindi, se suddividiamo  $\overline{Q}_r$  in  $2^n$  cubi di lato  $r$ , abbiamo che infiniti valori di  $x_h$  devono appartenere ad uno di tali cubi, che denotiamo con  $\overline{Q}_1$ ; definiamo anche

$$k(1) = \min\{h \in \mathbb{N} : x_h \in \overline{Q}_1\}.$$

Possiamo ricorsivamente definire i cubi  $\overline{Q}_h$ , che avranno quindi lato  $r/2^h$ , suddividendo  $\overline{Q}_{h-1}$  in  $2^n$  in modo che infiniti elementi della successione appartengano a  $\overline{Q}_h$  e

$$k(h) = \min\{h > k(h-1) : x_h \in \overline{Q}_h\}.$$

I cubetti sono uno contenuto nel precedente e i lati tendono a zero,  $r/2^h \rightarrow 0$ . Avremo inoltre che

$$\bigcup_{h \in \mathbb{N}} \overline{Q}_h = \{x_0\}$$

e la successione  $x_{h_k}$  converge a  $x_0$ . Il fatto che  $x_0 \in E$  deriva dal fatto che  $E$  è chiuso.

Viceversa, l'insieme  $E$  deve essere limitato altrimenti per ogni  $h \in \mathbb{N}$  potremmo trovare un elemento  $x_h \in E \setminus B_h$  e quindi costruire una successione  $(x_h)_{h \in \mathbb{N}}$  con  $\|x_h\| \geq h$  da cui non si potrebbe estrarre alcuna successione convergente. Per la chiusura si ragiona come nella seconda parte della dimostrazione del punto 1.

3. La dimostrazione di quest'ultimo punto è facile ed è lasciata come esercizio.

□

## 1.3 Limiti

Veniamo ora allo studio delle funzioni di più variabili, e più precisamente alla definizione di limite e continuità per funzioni di più variabili.

**Definizione 1.11** *Data una funzione  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^k$  con  $E \subset \mathbb{R}^n$  e  $x_0$  punto di accumulazione per  $E$ , diremo che  $f(x)$  tende ad un vettore  $l \in \mathbb{R}^k$  per  $x$  che tende ad  $x_0$ , in simboli*

$$(1.3) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l,$$

se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che se  $x \in E$  è tale che  $0 < \|x - x_0\| < \delta$ , allora  $\|f(x) - l\| < \varepsilon$ . Nel caso  $k = 1$ , diremo inoltre che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad (-\infty)$$

se per ogni  $M > 0$  ( $M < 0$ ) esiste  $\delta > 0$  tale che se  $x \in E$  soddisfa  $0 < \|x - x_0\| < \delta$ , allora  $f(x) > M$  ( $f(x) < M$ ).

Come nel caso di limiti per successioni, anche in questo caso avremo la validità di (1.3) se e solo se per ogni  $j = 1, \dots, n$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_j(x) = l_j.$$

Quindi il calcolo dei limiti si farà componente per componente.

Abbiamo la seguente utile proposizione, che riduce lo studio dei limiti allo studio di limiti di successioni.

**Proposizione 1.12** *Data  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^k$  e  $x_0$  punto di accumulazione per  $E$ , abbiamo che*

$$(1.4) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

se e solo se per ogni successione  $(x_h)_{h \in \mathbb{N}}$  convergente a  $x_0$ , la successione  $f(x_h)_{h \in \mathbb{N}}$  converge ad  $l$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo che valga la (1.4) e prendiamo una qualsiasi successione  $x_h$  che converga a  $x_0$ . Questo significa che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che  $0 < \|x - x_0\| < \delta$  implica  $\|f(x) - l\| < \varepsilon$ ; dato un tale  $\delta$ , la convergenza di  $x_h$  ad  $x_0$  implica che esiste  $h_0 \in \mathbb{N}$  per cui  $\|x_h - x_0\| < \delta$  se  $h \geq h_0$ , da cui  $\|f(x_h) - l\| < \varepsilon$ , cioè il fatto che la successione  $f(x_h)$  è convergente con limite  $l$ .

Viceversa, dimostriamo l'implicazione inversa; facciamo la dimostrazione per assurdo, supponendo cioè che non valga (1.4). Questo vuol dire che esiste  $\varepsilon > 0$  tale che per ogni  $\delta > 0$  esiste un  $x_\delta$  con  $0 < \|x_\delta - x_0\| < \delta$  e  $\|f(x_\delta) - l\| > \varepsilon$ . Prendendo  $\delta = 1/h$  abbiamo costruito una successione  $x_h$  con  $0 < \|x_h - x_0\| < 1/h$ , cioè  $x_h$  convergente ad  $x_0$ , tale che  $\|f(x_h) - l\| > \varepsilon$ , cioè la successione  $f(x_h)$  non può convergere a  $l$ , e questo è un assurdo. □

Come visto per le successioni, anche per il limite di funzioni valgono le seguenti proprietà;

1.  $f(x) \rightarrow l \in \mathbb{R}^k$  se e solo se per ogni  $j = 1, \dots, k$  si ha che  $f_j(x) \rightarrow l_j$ ;
2. se  $f(x) \rightarrow l$  e  $g(x) \rightarrow l'$ , allora  $f(x) + g(x) \rightarrow l + l'$  (a meno di forme indeterminate);
3. se  $f(x) \rightarrow l$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , allora  $\lambda f(x) \rightarrow \lambda l$ .

## Capitolo 2

# Calcolo infinitesimale per le curve

Iniziamo lo studio delle funzioni vettoriali di più variabili con il caso più semplice; tale studio ci permetterà di sviluppare strumenti e concetti utili per un approccio sistematico al caso generale. Cominceremo con lo studiare le curve dello spazio Euclideo, cioè funzioni vettoriali di una sola variabile reale; le curve per noi saranno entità parametrizzate (saranno le funzioni che le definiscono), ma vedremo quali informazioni geometriche sul luogo dei suoi punti (traiettorie) si possono dedurre dalla parametrizzazione.

Da quanto visto nel capitolo precedente, considerare una funzione  $r : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $I \subset \mathbb{R}$  equivale a considerare  $n$  funzioni  $r : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,

$$r(t) = (r_1(t), \dots, r_n(t)).$$

La nozione di limite e di continuità su  $r$  si traduce nelle analoghe nozioni per le funzioni  $r_i$ , che sono quindi le usuali nozioni di limite e continuità per funzioni reali di variabile reale. Diremo quindi che  $r$  è continua in un punto  $t_0 \in I$  se sono continue in  $t_0$  tutte le funzioni  $r_i$ .

### 2.1 Curve e curve regolari

Una curva in  $\mathbb{R}^n$  è data da una funzione continua  $r : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $I$  intervallo di  $\mathbb{R}$ , limitato o meno (non necessariamente aperto o chiuso). La richiesta della continuità nella definizione di curva serve per sottolineare che la variare di  $t \in I$ , il punto  $r(t)$  si muove nello spazio  $\mathbb{R}^n$  con continuità, descrivendo cioè una traiettoria continua. Si definisce il supporto o sostegno di  $r$  l'insieme

$$r(I) = \{r(t) : t \in I\} \subset \mathbb{R}^n :$$

il sostegno di una curva non va confuso con il grafico della curva, il quale è un sottoinsieme del prodotto cartesiano  $I \times \mathbb{R}^n$ .

#### Esempio 2.1

**Retta e Segmento.** Dati due punti  $x$  e  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ , la retta passante per essi è parametrizzata da  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$r(t) = x + t(y - x).$$

Se si usa la stessa parametrizzazione ma definita in  $[0, 1]$ , si ottiene il segmento, che denoteremo con  $[x, y]$ , congiungente  $x$  e  $y$ ; tale segmento è un segmento orientato che parte da  $x$  (tempo  $t = 0$ ) e termina in  $y$  (tempo  $t = 1$ ). Se denotiamo con  $v = y - x$ , troviamo che

$$r(t) = x + tv;$$

se si utilizza questa notazione si sta sottolineando che il segmento (semiretta o retta) individuato da  $r$  passa per il punto  $x$  e viene percorso in direzione  $v$ .

**Unione di due segmenti.** Dati tre punti distinti  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^n$ , possiamo definire la curva unione di  $[x_1, x_2]$  e  $[x_2, x_3]$  in vari modi; ad esempio possiamo definire  $r : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

$$r(t) = \begin{cases} x_1 + t(x_2 - x_1) & t \in [0, 1] \\ x_2 + (t - 1)(x_3 - x_2) & t \in [1, 2]. \end{cases}$$

Analogamente potremmo considerare  $\tilde{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  data da

$$\tilde{r}(t) = \begin{cases} x_1 + 2t(x_2 - x_1) & t \in [0, 1/2] \\ x_2 + (2t - 1)(x_3 - x_2) & t \in [1/2, 1]; \end{cases}$$

come vedremo in seguito, queste due definizioni sono equivalenti tra loro, nel senso che specificheremo.

**Poligonale.** Data una collezione ordinata di punti  $x_0, x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$  di punti, si definisce poligonale  $\mathcal{P}$  di vertici  $x_0, \dots, x_k$  l'unione dei segmenti  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, \dots, k$  parametrizzata quindi dalla curva  $r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$r(t) = x_{i-1} + \left( kt - \frac{i-1}{k} \right) (x_i - x_{i-1}), \quad \frac{i-1}{k} \leq t \leq \frac{i}{k}.$$

**Circonferenza nel piano.** Nel piano, la circonferenza di raggio  $R > 0$  centrata nell'origine può essere parametrizzata dalla funzione  $r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$r(t) = (R \cos t, R \sin t).$$

**Ellisse nel piano.** L'ellisse del piano  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  può essere parametrizzata dalla funzione  $r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$r(t) = (a \cos t, b \sin t).$$

Si fissi ora un punto  $t_0 \in I$  e si consideri, per  $t_1 \in I$ , la quantità

$$\frac{r(t_1) - r(t_0)}{t_1 - t_0} = \left( \frac{r_1(t_1) - r_1(t_0)}{t_1 - t_0}, \dots, \frac{r_n(t_1) - r_n(t_0)}{t_1 - t_0} \right).$$

Avremo quindi che il limite

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{r(t_1) - r(t_0)}{t_1 - t_0} = r'(t_0)$$

esiste se e solo se esistono i limiti

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{r_i(t_1) - r_i(t_0)}{t_1 - t_0}$$



per ogni  $i = 1, \dots, n$ , cioè se e solo se le componenti della curva sono funzioni derivabili. Diremo quindi che la curva è derivabile in  $t_0$  se le sue componenti lo sono, mentre diremo che  $r \in C^1(I)$  se le sue componenti sono derivabili con derivata continua in  $I$ .

Per quanto abbiamo visto, l'equazione

$$r_{t_1}(t) = r(t_0) + t \frac{r(t_1) - r(t_0)}{t_1 - t_0}$$

rappresenta la retta passante per  $r(t_0)$  e  $r(t_1)$ , cioè la retta secante il sostegno di  $r$  in tali punti. Se passiamo al limite per  $t_1 \rightarrow t_0$ , tale retta tende alla tangente al supporto di  $r$  nel punto  $r(t_0)$ , che sarà quindi individuata dalla parametrizzazione

$$r(t) = r(t_0) + tr'(t_0).$$

Il vettore  $r'(t_0)$  rappresenta la velocità della curva in  $t_0$  e, nel caso  $r'(t_0) \neq 0$ , il vettore unitario

$$\hat{t}_r(t_0) = \frac{r'(t_0)}{\|r'(t_0)\|}$$

rappresenta il versore tangente alla curva in  $r(t_0)$ . Useremo anche la nozione di velocità scalare per indicare la quantità  $v(t) = \|r'(t)\|$  e velocità vettoriale per  $\vec{v}(t) = r'(t)$ .

**Definizione 2.1** *Data una curva  $r : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , diremo che:*

1.  *$r$  è regolare se  $r \in C^1(I)$  con  $r'(t) \neq 0$  per ogni  $t \in I$ ;*
2.  *$r$  è regolare a tratti se possiamo decomporre  $I$  in sottointervalli disgiunti  $I_i$  con  $i = 1, \dots, k$  in modo tale che  $r$  sia regolare in  $I_i$  per ogni  $i = 1, \dots, k$ ;*
3. *la curva si dice semplice se  $t_1 \neq t_2$  implica  $r(t_1) \neq r(t_2)$ , con almeno uno dei due punti  $t_1$  o  $t_2$  interno ad  $I$ ;*
4. *se  $I = [a, b]$ , il punto  $r(a)$  si dice primo estremo o punto iniziale della curva, mentre  $r(b)$  si dice secondo estremo o punto finale della curva;*
5. *se  $I = [a, b]$ , la curva si dice chiusa se  $r(a) = r(b)$ .*

Vedremo che si potrà sempre ottenere la condizione  $r \neq 0$  nella definizione di curva regolare: qui è stata posta per una semplice questione di comodità. La definizione di curva semplice può sembrare complicata, ma serve semplicemente per ammettere anche curve chiuse semplici, quali la circonferenza, in cui gli unici due punti di non iniettività della curva sono gli estremi.

**Definizione 2.2 (Curve equivalenti)** *Due curve  $r : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\tilde{r} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dicono equivalenti se esiste una funzione  $\alpha : I \rightarrow J$  di classe  $C^1(I)$  iniettiva e suriettiva tale che  $\alpha'(t) \neq 0$  per ogni  $t \in I$  e*

$$r(t) = \tilde{r}(\alpha(t)), \quad \forall t \in I.$$

*La mappa  $\alpha$  viene anche chiamata cambiamento di parametro o riparametrizzazione ammissibile.*

L'equivalenza di due curve implica l'uguaglianza dei due sostegni, mentre il viceversa non è vero; ad esempio le due funzioni  $r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $r(t) = (\cos t, \sin t)$  e  $\tilde{r} : [0, 3\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\tilde{r}(t) = (\cos t, \sin t)$  hanno lo stesso sostegno ma non sono equivalenti. Per poter caratterizzare curve equivalenti tramite il sostegno, bisogna restringersi alla classe delle curve semplici. Abbiamo cioè il seguente risultato.

**Proposizione 2.3** *Siano  $r : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\tilde{r} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  due curve regolari e semplici; allora le due curve sono equivalenti se e solo se hanno lo stesso sostegno, cioè se e solo se*

$$r(I) = \tilde{r}(J).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Si costruisce la riparametrizzazione come segue; supponiamo che  $I = [a, b]$  e  $J = [c, d]$  e supponiamo che le curve non siano chiuse (altrimenti si ragiona su intervalli del tipo  $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ ). Per  $t \in I$ , abbiamo che  $r(t) \in r(I) = \tilde{r}(J)$ . Esiste quindi  $s \in J$  tale che  $\tilde{r}(s) = r(t)$ . Tale  $s$  è unico e definiamo quindi  $s := \alpha(t)$ . La mappa  $\alpha : [a, b] \rightarrow [c, d]$  così definita è iniettiva e suriettiva. Si dimostra anche che  $\alpha$  è continua e derivabile con continuità, anche se la dimostrazione non è immediata.  $\square$

Si noti che la condizione  $\alpha' \neq 0$  implica che  $\alpha' > 0$  oppure  $\alpha' < 0$ ; quindi  $\alpha$  è sempre strettamente monotona. Nel caso in cui  $\alpha$  sia monotona crescente, avremo che due curve equivalenti avranno lo stesso verso di percorrenza, mentre nel caso di  $\alpha$  decrescente, il loro verso di percorrenza sarà opposto.

### Esempio 2.2

1. Una riparametrizzazione per una curva  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  è data ad esempio da

$$\alpha : [a, b] \rightarrow [0, 1], \quad \alpha(t) = \frac{t - a}{b - a}.$$

Non sarà quindi restrittivo supporre sempre una curva definita sull'intervallo  $[0, 1]$ , almeno nel caso in cui  $I$  sia un intervallo chiuso e limitato.

2. L'arco di circonferenza  $r : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$r(t) = (\cos t, \sin t)$$

può essere equivalentemente riparametrizzata da  $\tilde{r} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\tilde{r}(t) = (t, \sqrt{1 - t^2}).$$

In questo caso cercare una riparametrizzazione significa cercare una funzione  $\alpha : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$  tale che  $r(\alpha(t)) = \tilde{r}(t)$ , cioè

$$(\cos \alpha(t), \sin \alpha(t)) = (t, \sqrt{1 - t^2}).$$

Troviamo quindi che  $\alpha(t) = \arccos t$ ; tale riparametrizzazione è derivabile per  $t \in (-1, 1)$  e  $\alpha'(t) = -1/\sqrt{1 - t^2}$ , cioè cambia l'orientamento della curva.

### 2.1.1 Curve nel piano

La geometria del piano permette di vedere le curve in vari modi. Ad esempio, se viene data una funzione  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continua reale di variabile reale, allora possiamo definire in modo canonico due curve parametrizzate  $r_x : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $r_y : I \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$r_x(t) = (t, f(t)), \quad r_y(y) = (f(t), t),$$

dette curve cartesiane rispettivamente rispetto ad  $x$  e rispetto ad  $y$  definite dalla funzione  $f$ . In tal caso il sostegno delle curve  $r_x$  e  $r_y$  coincide con il grafico della funzione  $f$ , grafico rispettivamente in  $x$  e in  $y$ . Le curve date sono regolari se e solo se  $f$  è di classe  $C^1(I)$  ed in tal caso, avendosi

$$r'_x(t) = (1, f'(t)), \quad r'_y(y) = (f'(t), 1)$$

la condizione  $r' \neq 0$  è automaticamente verificata.

Viceversa, se si vuole vedere una curva parametrizzata  $r : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  come una curva cartesiana, si dovrà richiedere che  $r$  sia una curva semplice e che il sostegno di  $r$  sia un grafico, cioè che l'intersezione del sostegno con rette verticali (nel caso di curva cartesiana rispetto alla  $x$ ) contenga al più un punto, mentre l'intersezione con rette orizzontali (nel caso cartesiano rispetto alla  $y$ ) contenga al più un punto.

Un altro modo per definire una curva nel piano è tramite l'utilizzo delle coordinate polari; in tal caso esistono sostanzialmente due approcci, il metodo esplicito e quello parametrico.

Per metodo esplicito si intende il caso in cui nell'utilizzo delle coordinate polari  $(r, \vartheta)$ , il raggio  $r$  sia una funzione esplicita dell'angolo  $\vartheta$ , cioè  $r = g(\vartheta)$ ,  $g : [\vartheta_1, \vartheta_2] \rightarrow [0, +\infty)$ . In questo caso, si può definire una curva parametrizzata  $r : [\vartheta_1, \vartheta_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$  ponendo

$$(2.1) \quad r(\vartheta) = (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) = g(\vartheta)(\cos \vartheta, \sin \vartheta);$$

derivando, si ottiene

$$(2.2) \quad r'(\vartheta) = (g'(\vartheta) \cos \vartheta - g(\vartheta) \sin \vartheta, g'(\vartheta) \sin \vartheta + g(\vartheta) \cos \vartheta).$$

La curva data sarà regolare se e solo se  $g$  è di classe  $C^1([\vartheta_1, \vartheta_2])$ .

Per metodo parametrico si intende il caso in cui sia  $r$  che  $\vartheta$  sono funzioni di un parametro  $t \in I$

$$\begin{cases} r = r(t) \\ \vartheta = \vartheta(t). \end{cases}$$

In tal caso si ottiene la curva parametrizzata  $r : I \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$r(t) = (r(t) \cos \vartheta(t), r(t) \sin \vartheta(t));$$

derivando, si ottiene anche che

$$r'(t) = (r'(t) \cos \vartheta(t) - r(t) \vartheta'(t) \sin \vartheta(t), r'(t) \sin \vartheta(t) + r(t) \vartheta'(t) \cos \vartheta(t)).$$

## 2.2 Lunghezza, ascissa curvilinea e integrali curvilinei

In questa sezione diamo la definizione di lunghezza di una curva e forniamo un metodo di calcolo, almeno nel caso di curve regolari. La prima osservazione è che, dati due punti  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , la distanza tra essi coincide con la lunghezza del segmento che li unisce, cioè

$$l([x, y]) = \|x - y\|.$$

Analogamente, data una poligonale  $\mathcal{P}$  di vertici  $x_0, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ , possiamo definire la lunghezza della poligonale ponendo

$$l(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^k \|x_i - x_{i-1}\|.$$

Infine, data una curva  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , una poligonale inscritta in  $r$  è una scelta crescente di istanti  $a \leq t_0 < \dots < t_k \leq b$  che individuano la poligonale  $\mathcal{P}$  di vertici definiti da

$$x_i = r(t_i), \quad i = 0, \dots, k.$$

**Definizione 2.4 (Lunghezza di una curva)** Data  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  curva parametrizzata, si definisce lunghezza di  $r$  la quantità

$$(2.3) \quad l(r, [a, b]) = \sup\{l(\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ poligonale inscritta in } r\}.$$

Nel caso in cui sia  $r : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , con  $I$  intervallo generico, si procede con un metodo di esaustione, nel senso che si calcola la lunghezza sugli intervalli  $[a, b] \subset I$  e si invade  $I$  con tali intervalli.

Diremo che la curva  $r$  è rettificabile in  $I$  se ha lunghezza finita, cioè se  $l(r, I) < +\infty$ .

Una proprietà importante della definizione della lunghezza di una curva  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  è che se  $c \in (a, b)$ , allora

$$l(r, [a, b]) = l(r, [a, c]) + l(r, [c, b]).$$

In particolare, la funzione  $s : [a, b] \rightarrow l(r, [a, b])$  definita da

$$s(t) = l(r, [a, t])$$

è una funzione monotona crescente. Tale funzione prende il nome di *ascissa curvilinea*, oppure *parametro* o *lunghezza d'arco*. Per il calcolo della lunghezza di una curva abbiamo la Proposizione 2.6, valida nel caso di curve regolari. Prima di enunciare e dimostrare tale proposizione, introduciamo e dimostriamo alcune proprietà dell'integrazione per curve. Se  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una curva, possiamo definire il suo integrale ragionando componente per componente;

$$\int_a^b r(t) dt := \left( \int_a^b r_1(t) dt, \dots, \int_a^b r_n(t) dt \right).$$

Per tale integrale vale la seguente proprietà, che enunciamo come Lemma.

**Lemma 2.5** Sia  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una curva; allora

$$\left\| \int_a^b r(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|r(t)\| dt.$$

**DIMOSTRAZIONE.** La continuità della funzione  $r$  implica che il suo integrale può essere ottenuto come limite delle somme di Riemann

$$\sum_{j=1}^{k-1} r(t_j)(t_{j+1} - t_j),$$

con  $a \leq t_0 < \dots < t_k \leq b$  suddivisione dell'intervallo  $[a, b]$ . Per la disuguaglianza triangolare della norma, si ottiene che

$$\left\| \sum_{j=1}^{k-1} r(t_j)(t_{j+1} - t_j) \right\| \leq \sum_{j=1}^{k-1} \|r(t_j)\|(t_{j+1} - t_j).$$

Passando al limite sulle somme di Riemann con

$$\max_{j=1, \dots, k-1} (t_{j+1} - t_j) \rightarrow 0,$$

il lemma risulta dimostrato.  $\square$

Notiamo infine, che ragionando componente per componente, nel caso in cui  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  sia una curva regolare, vale ancora il Teorema fondamentale del calcolo integrale, cioè

$$\int_a^b r'(t) dt = r(b) - r(a).$$

**Proposizione 2.6** *Sia  $r : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva regolare a tratti; allora*

$$l(r, I) = \int_I \|r'(t)\| dt.$$

*In particolare, per l'ascissa curvilinea si ha*

$$\frac{ds(t)}{dt} = \|r'(t)\|,$$

*mentre la curva  $\tilde{r} : [0, l(r, I)] \rightarrow \mathbb{R}^n$  definita da*

$$\tilde{r}(s) = \tilde{r}(s(t)) := r(t)$$

*è una riparametrizzazione equivalente di  $r$  con*

$$\left\| \frac{d\tilde{r}(s)}{ds} \right\| = 1.$$

DIM. Supponiamo per comodità  $I = [a, b]$  e  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  regolare; il caso generale si ottiene per additività ed invadendo un intervallo generico  $I$  con intervalli chiusi e limitati. Dimostriamo quindi che la funzione lunghezza d'arco

$$s(t) = l(r, [a, t])$$

è derivabile con  $s'(t) = \|r'(t)\|$ . Se consideriamo i punti  $t$  e  $t + h$ ,  $h > 0$ , è facile rendersi conto che

$$(2.4) \quad \|r(t+h) - r(t)\| \leq s(t+h) - s(t) = l(r, [t, t+h]),$$

dato che  $t$  e  $t + h$  definiscono una particolare partizione dell'intervallo  $[t, t+h]$ . Sia ora  $\mathcal{P}$  una poligonale generica individuata da una partizione  $t_0, \dots, t_k$  di  $[t, t+h]$ ; grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale, otteniamo

$$\begin{aligned} l(r, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^k \|r(t_i) - r(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^k \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} r'(\tau) d\tau \right\| \leq \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|r'(\tau)\| d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t_k} \|r'(\tau)\| d\tau \leq \int_t^{t+h} \|r'(\tau)\| d\tau. \end{aligned}$$

Passando all'estremo superiore su tutte le partizioni:

$$(2.5) \quad s(t+h) - s(t) = l(r, [t, t+h]) \leq \int_t^{t+h} \|r'(\tau)\| d\tau.$$

Combinando (2.4) e (2.5), si ottiene infine:

$$\left\| \frac{r(t+h) - r(t)}{h} \right\| \leq \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|r'(\tau)\| d\tau;$$

Passando al limite  $h \rightarrow 0^+$ , dal fatto che  $r$  è derivabile con continuità si ottiene che

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \|r'(t)\|.$$

Il caso  $h < 0$  si tratta in modo equivalente, e quindi la prima parte del teorema è dimostrata. Per la seconda parte, quanto detto sopra mostra che  $s : [a, b] \rightarrow [0, l(r, [a, b])]$  è una funzione strettamente monotona crescente, quindi invertibile. Definiamo la curva  $\tilde{r} : [0, l(r, [a, b])] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ponendo  $\tilde{r}(\tau) = r(s^{-1}(\tau))$ , cioè  $r(t) = \tilde{r}(s(t))$ . Le curve  $\tilde{r}$  e  $r$  sono equivalenti con riparametrizzazione data proprio dalla lunghezza d'arco. Infine, dalla derivata della funzione composta, si ottiene

$$r'(t) = \frac{d}{dt} \tilde{r}(s(t)) = s'(t) \tilde{r}'(s(t)) = \|r'(t)\| \tilde{r}'(s).$$

□

Abbiamo anche la seguente proprietà, che ci assicura che la lunghezza di una curva non dipende dalla parametrizzazione scelta.

**Proposizione 2.7** *Siano  $r : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\tilde{r} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  due curve regolari equivalenti; allora*

$$l(r, I) = l(\tilde{r}, J).$$

**DIM.** Supponiamo per comodità l'insieme  $I = [a, b]$  e  $J = [c, d]$  e sia  $\alpha : [a, b] \rightarrow [c, d]$  una riparametrizzazione ammissibile; supponiamo anche  $\alpha' > 0$ , da cui si deduce che  $\alpha(a) = c$  e  $\alpha(b) = d$ . Allora, tenendo conto che

$$r'(t) = \frac{d}{dt} r(t) = \frac{d}{dt} \tilde{r}(\alpha(t)) = \alpha'(t) \tilde{r}'(\alpha(t)),$$

si ottiene, mediante il cambio di variabile  $\tau = \alpha(t)$ ,

$$l(\tilde{r}, [c, d]) = \int_c^d \|\tilde{r}'(\tau)\| d\tau = \int_a^b \frac{\|r'(t)\|}{|\alpha'(t)|} \alpha'(t) dt = \int_a^b \|r'(t)\| dt$$

in quanto  $\alpha' > 0$ . □

**Osservazione 2.8** Nel caso di curva  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  piana cartesiana rispetto ad esempio ad  $x$ ,  $r(t) = (t, f(t))$  con  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1([a, b])$ , la formula della lunghezza si riduce a

$$l(r, [a, b]) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$$

che fornisce la formula della lunghezza del grafico della funzione  $f$ .

Nel caso di curva in coordinate polari esplicite, grazie alla (2.1) la formula diventa:

$$l(r, [\vartheta_1, \vartheta_2]) = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{g(\vartheta)^2 + g'(\vartheta)^2} d\vartheta,$$

mentre nel caso di curva in coordinate polari parametriche, da (2.2) si ricava :

$$l(r, [I]) = \int_I \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2 \vartheta'(t)^2} dt.$$

## 2.3 Curvatura e terna di Frenet

Supponiamo di avere una curva regolare  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ; per definire la curvatura di  $r$  abbiamo bisogno di prendere le derivate seconde di  $r$  e quindi supporremo  $r \in C^2(I, \mathbb{R}^n)$ . Se consideriamo la riparametrizzazione  $\tilde{r}$  di  $r$  per lunghezza d'arco, abbiamo visto che  $\|\tilde{r}'(s)\|^2 = 1$ , e quindi

$$0 = \frac{d}{ds} (\tilde{r}'(s) \cdot \tilde{r}'(s)) = 2\tilde{r}'(s)\tilde{r}''(s),$$

cioè il vettore  $\tilde{r}''(s)$  è ortogonale a  $\tilde{r}'(s)$ . La quantità

$$k_{\tilde{r}}(s) = \|\tilde{r}''(s)\|$$

viene detta curvatura scalare di  $\tilde{r}$ ; se  $k_{\tilde{r}}(s) \neq 0$ , possiamo quindi definire il versore

$$\hat{n}_{\tilde{r}}(s) = \frac{\tilde{r}''(s)}{\|\tilde{r}''(s)\|}$$

che viene chiamato *normale principale* alla curva. In questo modo possiamo scrivere che

$$\tilde{r}''(s) = k_{\tilde{r}}(s)\hat{n}_{\tilde{r}}(s).$$

Siccome non sempre è agevole calcolare il parametro d'arco e quindi riparametrizzare la curva per lunghezza d'arco, vediamo come si può definire la curvatura utilizzando direttamente la parametrizzazione  $r$ . Denoteremo con

$$(2.6) \quad \hat{n}_r(t) := \hat{n}_{\tilde{r}}(s(t)), \quad k_r(t) := k_{\tilde{r}}(s(t)).$$

Dal fatto che  $\hat{\tau}_r(t) = \hat{\tau}_{\tilde{r}}(s(t)) = \tilde{r}'(s(t))$  e da (2.6), derivando si ottiene che

$$\hat{\tau}'_r(t) = s'(t)\tilde{r}''(s(t)) = \|r'(t)\|k_r(t)\hat{n}_r(t) = v(t)k_r(t)\hat{n}_r(t).$$

Quindi, siccome  $r'(t) = v(t)\hat{\tau}_r(t)$ , otteniamo la seguente decomposizione per l'accelerazione vettoriale

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \vec{a}(t) := r''(t) &= v'(t)\hat{\tau}_r(t) + v^2(t)k_r(t)\hat{n}_r(t) \\ &= a(t)\hat{\tau}_r(t) + \frac{v^2(t)}{\varrho_r(t)}\hat{n}_r(t), \end{aligned}$$

dove abbiamo denotato con  $a(t) = v'(t)$  l'accelerazione scalare e con  $\varrho_r(t) = 1/k_r(t)$  il raggio di curvatura della curva. Si chiama *cerchio osculatore* il cerchio di raggio  $\varrho_r(t)$  centrato in

$r(t) + \varrho_r(t)\hat{n}_r(t)$  e convenuto nel piano generato da  $\hat{\tau}_r(t)$  e  $\hat{n}_r(t)$ . Se moltiplichiamo (2.7) scalarmente per  $\hat{\tau}_r(t)$  otteniamo che

$$a(t) = r''(t) \cdot \hat{\tau}_r(t),$$

che in realtà non è una formula tanto interessante in quanto  $a(t)$  può essere calcolata derivando direttamente  $v(t)$ . Conoscendo la velocità scalare e  $\hat{\tau}_r(t)$ , si possono ricavare la curvatura e la normale principale mediante

$$k_r(t)\hat{n}_r(t) = r''(t) - a(t)\hat{\tau}_r(t).$$

Nel caso in cui la curva sia in  $\mathbb{R}^3$ , si può anche moltiplicare la (2.7) vettorialmente per  $\hat{\tau}_r(t)$  in modo da ottenere

$$\hat{\tau}_r(t) \times r''(t) = v^2(t)k_r(t)\hat{\tau}_r(t) \times \hat{n}_r(t).$$

Il vettore  $b_r(t) = \hat{\tau}_r(t) \times \hat{n}_r(t)$ , chiamato *binormale alla curva  $r$* , ha norma 1, è ortogonale sia a  $\hat{\tau}_r(t)$  che a  $\hat{n}_r(t)$  e quindi il sistema  $\{\hat{\tau}_r(t), \hat{n}_r(t), b_r(t)\}$  definisce una base destrorsa di  $\mathbb{R}^3$ ; tale sistema viene chiamato *terna di Frenet*. Se ne deduce che la curvatura di  $r$  può essere calcolata come

$$k_r(t) = \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3}.$$