UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Appunti del corso di Analisi Matematica II c.d.l. Ingegneria Civile e Ambientale [1]

Michele Miranda

a.a. 2008-2009

[1]Versione aggiornata al 13 gennaio 2009

Nel presente fascicolo sono raccolti gli appunti relativi ad alcuni capitoli del corso di Analisi Matematica 2 tenuto presso la facoltà di Ingegneria dell'Università di Ferrara, corso di laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale.

Il materiale contenuto in queste note vuole essere semplicemente una guida per gli argomenti trattati durante il corso; è inevitabilmente incompleto, così come è inevitabile che siano presenti errori ed inesattezze. Non si risponde tuttavia degli errori che possono essere contenuti in questo fascicolo, in quanto è cura del lettore rilevare ed eventualmente segnalare eventuali imprecisioni.

Riteniamo imprescindibile, pur con la riduzione dei contenuti dei corsi imposta dal nuovo ordinamento degli studi, conservare intatti l'impianto concettuale e l'impostazione metodologica dell'Analisi, e riteniamo che questo obbiettivo sia conseguibile solo dando enunciati sintetici e precisi. Per semplificare un enunciato si può rinunciare alla massima generalità possibile, ma non al rigore della presentazione. Per questa ragione abbiamo ritenuto opportuno, e, speriamo, utile agli studenti, raccogliere in poche pagine le definizioni ed i risultati principali che vengono esposti durante le lezioni.

È per altro evidente che questi appunti non hanno la pretesa di sostituire il libro di testo, che resta indispensabile per acquisire una conoscenza dignitosa della materia. La loro funzione è piuttosto, come già detto, quella di sostituire gli appunti di lezione, troppo poco affidabili per tanti motivi, e di indicare il bagaglio *minimo* di conoscenze richieste per affrontare l'esame.

Il corso è strutturato come segue; nei primi capitoli saranno un complemento del corso di Analisi Matematica I. Si tratteranno alcuni argomenti che, causa il poco tempo a disposizione, non sono stati affrontati nel corso di Analisi Matematica I, quali ad esempio le formule di Mac Laurin–Taylor e lo studio dei numeri complessi.

In un successivo capitolo si studiano le equazioni differenziali; si affronteranno equazioni differenziali di ordine al più due, con solo alcuni cenni alla teoria delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di ordine superiore.

Nei restanti capitoli si affronta quello che è più propriamente il programma di Analisi Matematica II, e cioè lo studio delle funzioni di più variabili. Si estenderanno quindi alle più variabili i concetti studiati nel primo corso di Analisi, quali la continuità, la derivabilità e l'integrabilità delle funzioni.

Si consiglia infine di prestare attenzione alla data di aggiornamento della presente dispensa, in quanto in continua evoluzione e correzione. In particolare, per la sezione riguardante le Domande, si dovrà prendere come riferimento, per ogni sezione del presente volume, la versione che verrà messa on–line ad inizio Marzo 2009.

Michele Miranda, Ferrara

Indice

Capitolo 1

Approssimazione polinomiale e formula di Taylor

Uno strumento molto importante in matematica è quello della approssimazione lineare e polinomiale; iniziamo con la prima, detta anche approssimazione del primo ordine.

Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ con I intervallo di $\mathbb{R}$ e $x_0 \in I$, dire che f è derivabile, o differenziabile, in x_0 significa richiedere l'esistenza di un numero reale $m \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)}{x - x_0} = 0, \tag{1.1}$$

e si pone $m = f'(x_0)$, la derivata o differenziale di f in x_0. La precedente espressione ci dice che la retta

$$y(x) = f(x_0) + m(x - x_0), \tag{1.2}$$

rappresentante la retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$, ha la proprietà che la differenza

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \tag{1.3}$$

è infinitesima, cioè tende a zero, per x che tende a x_0; in altri termini possiamo riscrivere la (1.1) dicendo che

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (x - x_0)E_{x_0}(x) \tag{1.4}$$

con $E_{x_0}(x)$ una quantità che tende a zero per x che tende ad x_0. L'equazione (1.4) dice anche che la differenza (1.3) è infinitesima di ordine 1 in x_0, cioè tende a zero se divisa per $(x - x_0)$. La retta (1.2) viene detta anche linearizzazione, o approssimazione del primo ordine di f in x_0 e definisce l'unica retta $ax + b$ per la quale

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - ax - b}{(x - x_0)} = 0; \tag{1.5}$$

difatti, la precedente espressione, per avere limite finito, deve avere il numeratore che tende a zero in quanto il denominatore tende a zero, cioè

$$\lim_{x\to x_0} f(x) - ax - b = 0;$$

da cui $b = f(x_0) - ax_0$. Inoltre, dato che (1.5) si presenta a questo punto come una forma indeterminata, applicando il Teorema di De l'Hôpital, si ottiene che

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) - a = 0,$$

cioè $a = f'(x_0)$. Esempi di linearizzazione sono dati dalle seguenti funzioni

$$\begin{array}{lll}
x & \text{per } \operatorname{sen} x & \text{in } x_0 = 0, \\
1 & \text{per } \cos x & \text{in } x_0 = 0, \\
-x + \pi/2 & \text{per } \cos x & \text{in } x_0 = \pi/2, \\
x - 1 & \text{per } \ln x & \text{in } x_0 = 1, \\
x + 1 & \text{per } e^x & \text{in } x_0 = 0.
\end{array}$$

Vediamo ora come andare oltre ed ottenere approssimazioni di ordine successivo; se partiamo dal limite notevole

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

che può equivalentemente essere scritto come

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x - x^2/2}{x^2} = 0$$

oppure nella forma

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} - x^2 E_0(x)$$

con $E_0(x) \to 0$ per $x \to 0$, notiamo che sostituire alla funzione $\cos x$ la parabola $1 - \frac{x^2}{2}$ si ottiene un errore, $x^2 E_0(x)$, che è infinitesimo di ordine 2, cioè tende a zero se diviso per x^2. Un vantaggio nella sostituire della funzione $\cos x$ non con la sua linearizzazione ma la parabola $1 - x^2/2$ sta nel fatto che ad esempio si può dedurre che $x_0 = 0$ è un punto di massimo per $\cos x$, in quanto la parabola trovata ha la concavità rivolta verso il basso (maggiori dettagli su questo verranno dati nella sezione 1.4). Si può in qualche modo affermare che la parabola trovata è la parabola tangente al grafico di $\cos x$ in $x_0 = 0$, nel senso che è l'unica parabola $ax^2 + bx + c$ tale che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - ax^2 - bx - c}{x^2} = 0.$$

Per formalizzare meglio questi concetti e più in generale il concetto di "polinomio tangente",

è utile introdurre il simbolo di Landau, anche detto o (leggasi *o piccolo*).

1.1 Infinitesimi e il simbolo o

La trattazione che svilupperemo qui è quella relativa al concetto di infinitesimo e del simbolo di Landau o; si potrebbe anche trattare in modo analogo il concetto di O ("o grande"), come quello di ω ("omega piccolo") e Ω ("omega grande"), concetti che in questo corso non affronteremo.

Definizione 1.1 *Dato un punto $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ e due funzioni definite in un intorno I di x_0, $f, g : I \to \mathbb{R}$, diremo che f è infinitesima rispetto a g in x_0 o che f è un o piccolo di g in x_0, $f \in o_{x_0}(g)$, se esiste il limite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Nel caso in cui $g(x) = 1$ su I, si dice che f è infinitesima in x_0, cioè

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

e scriveremo $f \in o_{x_0}(1)$. Nel caso in cui $x_0 = 0$, si scrive semplicemente $f \in o(g)$.

Osservazione 1.2 Si può pensare ad $o_{x_0}(g)$ come ad una non meglio precisata funzione, o famiglia di funzioni, con la proprietà

$$\lim_{x \to x_0} \frac{o_{x_0}(g)}{g(x)} = 0.$$

In relazione a quanto visto in precedenza, si ha che

$$0 = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1 \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x - x}{x} \right)$$

e quindi $\operatorname{sen} x - x = o(x)$, cioè $\operatorname{sen} x = x + o(x)$, o più in generale, per una funzione derivabile, $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0)$. Analogmente, si avrà che $\cos x = 1 + o(1)$ e $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Un modo per confrontare i due errori dati dalle precedenti formule è quello di confrontare i due infinitesimi $o(1)$ e $o(x^2)$. Abbiamo in generale che se $a, b \in \mathbb{R}$, allora $x^a = o(x^b)$ se e solo se

$$0 = \lim_{x \to 0} \frac{x^a}{x^b} = \lim_{x \to 0} x^{a-b},$$

cioè se e solo se $a > b$. Quindi ad esempio $x \in o(1)$, $x^2 \in o(x)$, ecc. Nel caso $a > b$ scriveremo anche $o(x^a) \subset o(x^b)$, così ad esempio $o(x^2) \subset o(1)$. Vediamo come utilizzare la nozione di o per definire le approssimazioni polinomiali.

1.2 Formula di Mac Laurin-Taylor

Nella precedente sezione abbiamo dato, per una funzione derivabile, la sua linearizzazione o approssimazione al primo ordine; vediamo ora come arrivare ad approssimazioni di ordine superiore. Per avere ciò bisognerà richiedere maggiore regolarità sulla funzione f. Il seguente Teorema fornisce l'approssimazione polinomiale nel punto $x_0 =$.

Teorema 1.3 (Formula di Mac Laurin con resto di Peano) *Sia f una funzione derivabile n volte con derivata n–esima continua in $x_0 = 0$; esiste allora un unico polinomio di grado n, denotato con T_n^f o semplicemente T_n, per il quale vale*

$$f(x) = T_n(x) + o(x^n). \tag{1.6}$$

La quantità $o(x^n)$ viene detta resto di Peano ed il polinomio T_n viene detto polinomio di Mac Laurin di grado n ed è determinato dalla formula

$$\begin{aligned} T_n(x) &= f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \end{aligned} \tag{1.7}$$

ed è l'unico polinomio di grado n per il quale

$$T_n(0) = f(0), \quad T_n'(0) = f'(0), \quad \ldots, \quad T_n^{(n)}(0) = f^{(n)}(0).$$

Dim. Per vedere che il polinomio definito dalla formula (1.7) verifica la (1.6) basta applicare n volte il Teorema di de L'Hôpital; infatti

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-T_n(x)}{x^n} &= \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-T_n'(x)}{nx^{n-1}} = \cdots = \lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)-T_n^{(n)}(x)}{n!}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{n!} = 0\end{aligned}$$

grazie alla continuità della derivata n-esima. Per dimostrare l'unicità di T_n, si supponga che esista un altro polinomio $p_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ di grado n che soddisfa la (1.6); allora $f(x) - p_n(x) = o(x^k)$ per ogni $k = 0, \ldots, n$. In particolare, per $k = 0$, si ha che

$$\lim_{x\to 0}(f(x) - p_n(x)) = 0,$$

da cui $p_n(0) = f(0)$; analogamente, applicando nuovamente il Teorema di de L'Hôspital, si ricava che

$$0 = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-p_n(x)}{x^k} = \lim_{x\to 0}\frac{f^{(k)}(x)-p_n^{(k)}(x)}{k!},$$

da cui $f^{(k)}(0) = p^{(k)}(0) = k!a_k$. Questo implica che

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \qquad \forall k = 0, \ldots, n.$$

□

Il primo, e più semplice, esempio che si può fare è la funzione esponenziale; difatti, per $f(x) = e^x$ si ha $f^{(n)}(x) = e^x$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,e quindi

$$T_n^{e^x}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!},$$

da cui

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

In modo analogo si ottengono gli sviluppi

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+1}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k}).$$

Non è sorprendente trovare che lo sviluppo di Mac Laurin della funzione coseno contiene solo potenze pari di x, essendo la funzione coseno una funzione pari; allo stesso modo, dato che la funzione seno è dispari, lo sviluppo di Mac Laurin avrà solo potenze dispari.

Come esercizio, si provi a ricavare gli sviluppi di Mac Laurin per le funzioni

$$\ln(1 + x), \sqrt{1 + x}, (1 + x)^\alpha, \sinh(x), \cosh(x).$$

Il seguente Teorema fornisce una stima più precisa dell'errore che si commette approssimando una funzione con il suo polinomio di Mac Laurin; esso fornisce una valutazione della quantità $o(x^n)$.

Teorema 1.4 (Formula di Taylor; resto integrale e di Lagrange) *Sia f una funzione derivabile $n+1$ volte con derivata $n+1$–esima continua; allora il resto della formula di Mac Laurin può essere espresso in forma integrale come*

$$o(x^n) = x^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(n)!} f^{(n+1)}(tx) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dtdt \quad \textit{(resto integrale)} \tag{1.8}$$

oppure in forma differenziale

$$o(x^n) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad \textit{(resto di Lagrange)} \tag{1.9}$$

con c elemento dell'intervallo di estremi x e 0.

Dim. La dimostrazione della formula con resto integrale si può fare per induzione partendo dalla funzione $g(t) = f(tx)$; notando che $g(0) = f(0)$, $g(1) = f(x)$ e $g'(t) = (x)f'(tx)$, dal Teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene

$$g(1) = g(0) + \int_0^1 g'(t)dt,$$

da cui

$$f(x) = f(0) + x\int_0^1 f'(tx)dt.$$

Si noti che

$$x\int_0^1 f'(tx)dt = o(1)$$

e quindi la formula di Taylor di ordine 0 è dimostrata. Per procedere con il passo induttivo, si integra per parti ottenendo

$$\begin{aligned}\int_0^1 f'(tx)dt &= -(1-t)f'(tx)\Big|_{t=0}^1 \\ &\quad + x\int_0^1 (1-t)f''(tx)dt \\ &= f'(0) + x\int_0^1 (1-t)f''(tx)dt\end{aligned}$$

o più in generale

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(tx)dt = \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+2)}(tx)dt,$$

da cui la formula

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + x^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(n)!} f^{(n+1)}(tx)dt;$$

si noti che la (1.8) è immediata. Per la (1.9) si applicherà invece il Teorema di Lagrange; esso infatti afferma che esiste c nell'intervallo di estremi x e 0 tale che

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(c),$$

cioè
$$f(x) = f(0) + f'(c)x$$
che è la formula di Taylor di ordine 0; per ottenere la formula generale si procederà per induzione. □

La formula con il resto di Lagrange permette di dare una stima del tipo
$$|f(x) - T_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(c)||x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$
Ad esempio, se si vuole calcolare $\sqrt{e}$ (sapendo a priori $e \leq 3$), si può utilizzare lo sviluppo di Mac Laurin per $f(x) = e^x$ con $x = 1/2$: ad esempio, se fissiamo $n = 3$, avremo che
$$T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$
con $T_3(1/2) = \frac{79}{48}$. Inoltre $|\sqrt{e} - T_3(1/2)| = \frac{e^c}{2^4 4!} \leq \frac{\sqrt{3}}{2^4 4!} \sim 0,0045$ in quanto $c \in [0, 1/2]$.

Tutti i discorsi fatti nel caso del polinomio di Mac Laurin per $x_0 = 0$ possono essere trasferiti ad un generico punto x_0; si definisce quindi il polinomio di Taylor di grado n centrato nel punto x_0 nel seguente modo.

Teorema 1.5 (Formula di Taylor) *Sia f una funzione derivabile n volte con derivata n–esima continua in un punto x_0; esiste allora un unico polinomio di grado n in $(x - x_0)$, denotato con $T^f_{x_0 n}$ o semplicemente T_n se la funzione f ed il punto x_0 sono chiari, per il quale vale*

$$f(x) = T^f_{x_0,n}(x) + o((x - x_0)^n). \qquad \textit{(Formula di Taylor resto di Peano).} \tag{1.10}$$

Il polinomio di Taylor è dato da

$$\begin{aligned} T^f_{x_0,n}(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Se poi la funzione f è derivabile $n + 1$ volte in x_0, allora si ottengono le formule di Taylor con resto integrale e di Lagrange

$$\begin{aligned} f(x) &= T^f_{x_0,n}(x) + (x - x_0)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(n)!} f^{(n+1)}(t(x - x_0)) \\ &= T^f_{x_0,n}(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x - x_0 - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt dt \\ &= T^f_{x_0,n}(x) + \frac{f^{(n+1)(c)}}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \end{aligned}$$

dove c è un punto compreso nell'intervallo di estremo x_0 e x.

Ad esempio, si possono calcolare i polinomio di Taylor di
$$f(x) = \operatorname{sen} x, x_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad f(x) = e^x, x_0 = 1, \qquad f(x) = \ln(1 + x), x_0 = 2.$$

Osservazione 1.6 Una domanda che ci si potrebbe porre è se l'apporssimazione che si ottiene al variare del grado n del polinomio di Taylor possa migliorare per n crescente. Supponiamo quindi che la funzione sia derivabile infinite volte in x_0; in questo caso possiamo costruirci i polinomi $T^f_{x_0,n}$ per ogni grado n. Per passare al limite $n \to \infty$ subentrano però due problemi; il primo è che stiamo definendo una serie, quindi bisogna porsi il problema della convergenza della serie in considerazione. Il secondo, ammesso che la serie converga, consiste nel chiedersi se la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k := g(x),$$

che viene detta serie di Taylor associata ad f, coincida o meno con f, cioè se $g(x) = f(x)$. Questo non è sempre vero, come mostra la funzione $f(x) = e^{-1/x^2}$, con $f(0) = 0$; tale funzione è derivabile infinite volte in 0 con derivate tutte nulle, quindi la serie associata $g(x)$ definisce la funzione nulla, mentre f non è nulla. Il problema delle serie di Taylor non verrà affrontato in questo corso, ma sarà argomento di corsi più avanzati.

1.3 Algebra degli o e formule di Taylor di funzioni composte

Usando le potenze di x, si può dare la seguente definizione.

Definizione 1.7 *Sia $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ e sia f una funzione definita in un intorno I di x_0, $f : I \to \mathbb{R}$. Avremo allora le seguenti possibilità:*

1. *nel caso $x_0 \in \mathbb{R}$, se esiste $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ed esiste il limite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^a} = \lambda,$$

diremo che f è infinitesima di ordine a se $a > 0$, mentre f è infinita di ordine a se $a < 0$;

2. *nel caso $x_0 = \pm\infty$, se esiste $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ed esiste il limite*

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x^a} = \lambda,$$

diremo che f è infinitesima di ordine a se $a < 0$, mentre f è infinita di ordine a se $a > 0$.

In entrambi i precedenti casi si potrà anche dire che f ha ordine a in x_0 e si scriverà $\mathrm{ord}_{x_0}(f) = a$.

Ad esempio, dal limite notevole

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1,$$

si ricava che $\operatorname{sen} x$ è infinitesima di ordine 1 in $x_0 = 0$ o anche che

$$\mathrm{ord}_0(\operatorname{sen} x) = 1,$$

mentre dal limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{1-\cos x}=1$$

si deduce che la funzione $\frac{2}{1-\cos x}$ è infinita di ordine 2 per $x_0=0$ o anche che

$$\mathrm{ord}_0\left(\frac{2}{1-\cos x}\right)=-2.$$

Abbiamo la seguente proposizione.

Proposizione 1.8 (Algebra degli o e relazioni tra o e ord**)** *Sia $x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, siano f e g due funzioni definite in un intorno I di x_0, $f,g:I\to\mathbb{R}$ e sia $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Valgono allora le seguenti proprietà;*

1. $o_{x_0}(f)\pm o_{x_0}(f)=o_{x_0}(f)$;
2. $\lambda o_{x_0}(f)=o_{x_0}(f)$;
3. $o_{x_0}(f)o_{x_0}(g)=o_{x_0}(fg)$;
4. *se* $f\in o_{x_0}(g)$, *allora* $o_{x_0}(f)\subset o_{x_0}(g)$, $o_{x_0}(f)+o_{x_0}(g)=o_{x_0}(g)$;
5. *se* $\mathrm{ord}_{x_0}(f)=a$, *allora, se* $x_0\in\mathbb{R}$ *si avrà* $f\in o_{x_0}((x-x_0)^b)$ *per ogni* $b<a$, *mentre se* $x_0=\pm\infty$ *si avrà che* $f\in o_{\pm\infty}(x^b)$ *per ogni* $b>a$.

Dim. Grazie all'Osservazione 1.2, si ha che

$$\lim_{x\to x_0}\frac{o_{x_0}(f)\pm o_{x_0}(f)}{f(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{o_{x_0}(f)}{f(x)}\pm\lim_{x\to x_0}\frac{o_{x_0}(f)}{f(x)}=0,$$

da cui la 1. Analogamente,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\lambda o_{x_0}(f)}{f(x)}=\lambda\lim_{x\to x_0}\frac{o_{x_0}(f)}{f(x)}$$

da cui l'equivalenza 2. in quanto $\lambda\neq 0$. Per la 3. si nota che

$$\lim_{x\to x_0}\frac{o_{x_0}(f)o_{x_0}(g)}{f(x)g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{o_{x_0}(f)}{f(x)}\lim_{x\to x_0}\frac{o_{x_0}(g)}{g(x)}=0.$$

Per la proprietà 4. si nota che

$$\lim_{x\to x_0}\frac{o_{x_0}(f)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\frac{o_{x_0}(f)}{f(x)}=0.$$

Infine, dimostriamo la 5. solo nel caso $x_0\in\mathbb{R}$ (essendo il caso $x_0\pm\infty$ analago); dalla definizione di ordine, si ottiene quindi che

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{(x-x_0)^b}=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^{a-b}\frac{f(x)}{(x-x_0)^a}=\lambda\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^{a-b}=0$$

se e solo se $a>b$. $\square$

Con questi strumenti si può ad esempio calcolare il polinomio di Mac Laurin della funzione $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$ senza calcolare le sue derivate; difatti, sfruttando gli sviluppi di e^x e $\operatorname{sen} x$, si ottiene

$$\begin{aligned} e^{\operatorname{sen} x} &= e^{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)} \\ &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o\left((x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))^3\right) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3) \end{aligned}$$

da cui

$$T_3^{e^{\operatorname{sen} x}}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

1.4 Applicazioni della formula di Taylor

Una prima applicazione della formula di Taylor si può avere ad esempio nel calcolo dei limiti. Abbiamo infatti il seguente risultato.

Proposizione 1.9 *Sia $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ e siano f, f_1 e g tre funzioni definite in un intorno I di x_0, $f, f_1, g : I \to \mathbb{R}$; allora, se $f_1 \in o_{x_0}(f)$, il limite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + f_1(x)}{g(x)}$$

esiste se e solo se esiste il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

e vale

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + f_1(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Dim. La dimostrazione segue semplicemente osservando che

$$\frac{f(x) + f_1(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}\left(1 + \frac{f_1(x)}{f(x)}\right)$$

e dal fatto che, siccome $f_1 \in o_{x_0}(f)$,

$$\exists \lim_{x \to x_0} \left(1 + \frac{f_1(x)}{f(x)}\right) = 1.$$

$\square$

Abbiamo quindi che se $f(x) = T^f_{n,x_0}(x) + o_{x_0}((x - x_0)^n)$ e $g(x) = T^g_{m,x_0}(x) + o((x - x_0)^m)$ con polinomi non nulli, allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{T^f_{n,x_0}(x)}{T^g_{m,x_0}(x)}$$

almeno ogni qualvolta il limite di destra non si presenti in forma indeterminata. Questa osservazione rende il calcolo dei limiti un problema più semplice in quanto ridotto al limite di una espressione razionale. Così ad esempio

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{6}}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

Così ad esempio se si volesse studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right),$$

il limite precedente ci dice che il termine generale è asintoticamente equivalente a $\frac{1}{6n^3}$, e quindi la serie è assolutamente convergente.

Altra applicazione si può avere nello studio della convessità e nella classificazione dei punti stazionari. Supponiamo ad esempio che $f''\geq 0$; dalla formula di Taylor con resto di Lagrange si ottiene quindi che

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(c)(x-x_0)^2}{2}\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),$$

quindi il grafico di f si trova al di sopra del grafico della sua retta tangente in $(x_0,f(x_0))$. Inoltre, se x_0 è un punto stazionario e $f''(x_0)>0$, allora dalla formula di Taylor di ordine 2 si ottiene

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o_{x_0}((x-x_0)^2)$$

e quindi

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}=\frac{f''(x_0)}{2}>0$$

da cui la positività di $f(x)-f(x_0)$ in un intorno di x_0, cioè il fatto che $f(x_0)$ è un punto di minimo.

Usando il polinomio di Taylor di grado superiore, si può enunciare il seguente risultato riguardante la classificazione dei punti stazionari di una funzione.

Proposizione 1.10 *Supponiamo che f sia un funzione derivabile n volte con continuità in x_0 e supponiamo che*

$$f'(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\qquad f^{(n)}(x_0)\neq 0.$$

Allora:

1. *se n è pari e $f^{(n)}(x_0)>0$, x_0 è un punto di minimo;*
2. *se n è pari e $f^{(n)}(x_0)<0$, x_0 è un punto di massimo;*
3. *se n è dispari, x_0 è un punto di flesso, ascendente se $f^{(n)}(x_0)>0$, discendente se $f^{(n)}(x_0)<0$.*

Capitolo 2

Domande

2.1 Sviluppi di Taylor: domande

1. Dare la definizione del simbolo o (o piccolo) ed enunciare alcune delle sue principali proprietà, fornendo gli esempi che si ritengono opportuni.

2. Dare la definizione di infinitesimo; tramite esempi, fornire inoltre il concetto di ordine di infinitesimo tramite i monomi x^a, $x \in \mathbb{R}$.

3. Dare la definizione e le principali proprietà del polinomio di Mac Laurin e del polinomio di Taylor; dare alcuni esempi.

4. Dimostrare che, data una funzione f, vale l'identità $o(f)-o(f) = o(f)$ e che in generale $o(f) - o(f) \neq 0$ (fornire almeno un controesempio).

5. Definizione di resto di Peano e resto di Lagrange; dare alcuni esempi.

6. Dare la definizione di linearizzazione di una funzione e fornire alcuni esempi significativi.

7. Discutere il concetto di approssimazione e fornire metodi per la stima dell'errore nelle approssimazioni.

2.2 Numeri complessi: domande

1. Dare la definizione algebrica dei numeri complessi; descrivere inoltre l'operazione di coniugio e modulo di un numero complesso.

2. Equivalenza tra forma algebrica e polare di un numero complesso; definizioni e regole per passare da una all'altra.

3. Definizione di piano di Gauss e rappresentazione cartesiana di un numero complesso; interpretazione geometrica di somma e prodotto tra numeri complessi.

4. Definizione e principali proprietà di coniugio e modulo di un numero complesso.

5. Principio di uguaglianza tra numeri complessi in forma algebrica ed in forma polare.
6. Formula di De Moivre e definizione dell'esponenziale immaginario.
7. Definizione di argomento e modulo di un numero complesso; esempi con numeri reali positivi, negativi, i e $-i$.
8. Definizione di radice n–esima di un numero complesso e loro distribuzione nel piano di Gauss.
9. Enunciato del Teorema Fondamentale dell'algebra nelle sue due forme equivalenti; in che senso le due forme sono equivalenti?
10. Calcolo delle radici di un polinomio complesso in campo complesso.
11. Polinomio complessi a coefficienti reali; proprietà delle sue radici.