UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Appunti del corso di Analisi Matematica II c.d.l. Ingegneria Civile e Ambientale [1]

Michele Miranda

a.a. 2008-2009

[1] Versione aggiornata al 17 gennaio 2009

Nel presente fascicolo sono raccolti gli appunti relativi ad alcuni capitoli del corso di Analisi Matematica 2 tenuto presso la facoltà di Ingegneria dell'Università di Ferrara, corso di laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale.

Il materiale contenuto in queste note vuole essere semplicemente una guida per gli argomenti trattati durante il corso; è inevitabilmente incompleto, così come è inevitabile che siano presenti errori ed inesattezze. Non si risponde tuttavia degli errori che possono essere contenuti in questo fascicolo, in quanto è cura del lettore rilevare ed eventualmente segnalare eventuali imprecisioni.

Riteniamo imprescindibile, pur con la riduzione dei contenuti dei corsi imposta dal nuovo ordinamento degli studi, conservare intatti l'impianto concettuale e l'impostazione metodologica dell'Analisi, e riteniamo che questo obbiettivo sia conseguibile solo dando enunciati sintetici e precisi. Per semplificare un enunciato si può rinunciare alla massima generalità possibile, ma non al rigore della presentazione. Per questa ragione abbiamo ritenuto opportuno, e, speriamo, utile agli studenti, raccogliere in poche pagine le definizioni ed i risultati principali che vengono esposti durante le lezioni.

È per altro evidente che questi appunti non hanno la pretesa di sostituire il libro di testo, che resta indispensabile per acquisire una conoscenza dignitosa della materia. La loro funzione è piuttosto, come già detto, quella di sostituire gli appunti di lezione, troppo poco affidabili per tanti motivi, e di indicare il bagaglio *minimo* di conoscenze richieste per affrontare l'esame.

Il corso è strutturato come segue; nei primi capitoli saranno un complemento del corso di Analisi Matematica I. Si tratteranno alcuni argomenti che, causa il poco tempo a disposizione, non sono stati affrontati nel corso di Analisi Matematica I, quali ad esempio le formule di Mac Laurin–Taylor e lo studio dei numeri complessi.

In un successivo capitolo si studiano le equazioni differenziali; si affronteranno equazioni differenziali di ordine al più due, con solo alcuni cenni alla teoria delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di ordine superiore.

Nei restanti capitoli si affronta quello che è più propriamente il programma di Analisi Matematica II, e cioè lo studio delle funzioni di più variabili. Si estenderanno quindi alle più variabili i concetti studiati nel primo corso di Analisi, quali la continuità, la derivabilità e l'integrabilità delle funzioni.

Si consiglia infine di prestare attenzione alla data di aggiornamento della presente dispensa, in quanto in continua evoluzione e correzione. In particolare, per la sezione riguardante le Domande, si dovrà prendere come riferimento, per ogni sezione del presente volume, la versione che verrà messa on–line ad inizio Marzo 2009.

Michele Miranda, Ferrara

Indice

Capitolo 1

Approssimazione polinomiale e formula di Taylor

Uno strumento molto importante in matematica è quello della approssimazione lineare e polinomiale; iniziamo con la prima, detta anche approssimazione del primo ordine.

Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ con I intervallo di $\mathbb{R}$ e $x_0 \in I$, dire che f è derivabile, o differenziabile, in x_0 significa richiedere l'esistenza di un numero reale $m \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)}{x - x_0} = 0, \tag{1.1}$$

e si pone $m = f'(x_0)$, la derivata o differenziale di f in x_0. La precedente espressione ci dice che la retta

$$y(x) = f(x_0) + m(x - x_0), \tag{1.2}$$

rappresentante la retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$, ha la proprietà che la differenza

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \tag{1.3}$$

è infinitesima, cioè tende a zero, per x che tende a x_0; in altri termini possiamo riscrivere la (1.1) dicendo che

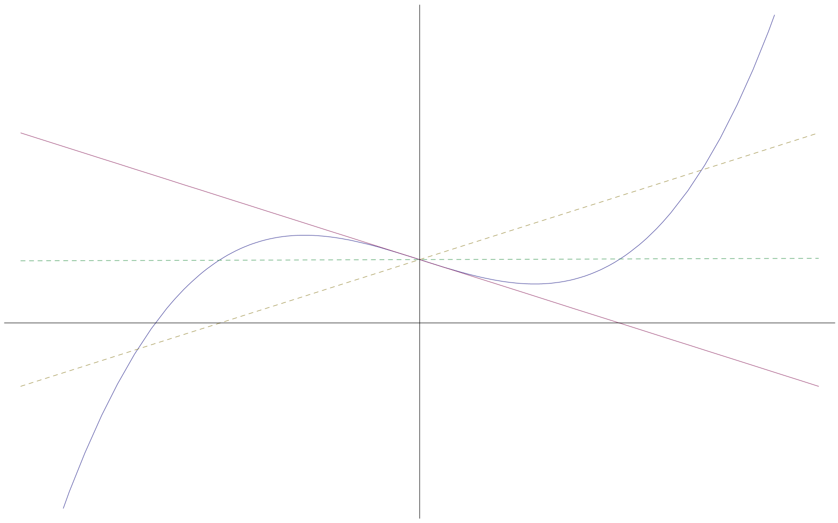
$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (x - x_0)E_{x_0}(x) \tag{1.4}$$

con $E_{x_0}(x)$ una quantità che tende a zero per x che tende ad x_0. L'equazione (1.4) dice anche che la differenza (1.3) è infinitesima di ordine 1 in x_0, cioè tende a zero se divisa per $(x - x_0)$. La retta (1.2) viene detta anche linearizzazione, o approssimazione del primo ordine di f in x_0 e definisce l'unica retta $ax + b$ per la quale

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - ax - b}{(x - x_0)} = 0; \tag{1.5}$$

difatti, la precedente espressione, per avere limite finito, deve avere il numeratore che tende a zero in quanto il denominatore tende a zero, cioè

$$\lim_{x\to x_0} f(x) - ax - b = 0;$$



da cui $b = f(x_0) - ax_0$. Inoltre, dato che (1.5) si presenta a questo punto come una forma indeterminata, applicando il Teorema di De l'Hôpital, si ottiene che

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) - a = 0,$$

cioè $a = f'(x_0)$. Esempi di linearizzazione sono dati dalle seguenti funzioni

$$\begin{array}{lll} x & \text{per } \operatorname{sen} x & \text{in } x_0 = 0, \\ 1 & \text{per } \cos x & \text{in } x_0 = 0, \\ -x + \pi/2 & \text{per } \cos x & \text{in } x_0 = \pi/2, \\ x - 1 & \text{per } \ln x & \text{in } x_0 = 1, \\ x + 1 & \text{per } e^x & \text{in } x_0 = 0. \end{array}$$

Vediamo ora come andare oltre ed ottenere approssimazioni di ordine successivo; se partiamo dal limite notevole

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

che può equivalentemente essere scritto come

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x - x^2/2}{x^2} = 0$$

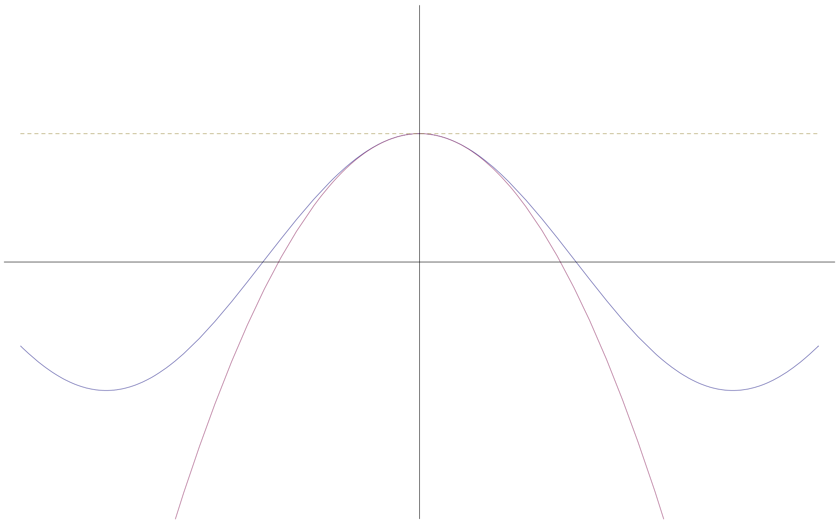
oppure nella forma

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} - x^2 E_0(x)$$

con $E_0(x) \to 0$ per $x \to 0$, notiamo che sostituire alla funzione $\cos x$ la parabola $1 - \frac{x^2}{2}$ si ottiene un errore, $x^2 E_0(x)$, che è infinitesimo di ordine 2, cioè tende a zero se diviso per x^2. Un vantaggio nella sostituire della funzione $\cos x$ non con la sua linearizzazione ma la parabola $1 - x^2/2$ sta nel fatto che ad esempio si può dedurre che $x_0 = 0$ è un punto di massimo per $\cos x$, in quanto la parabola trovata ha la concavità rivolta verso il basso (maggiori dettagli su questo verranno dati nella sezione 1.4). Si può in qualche modo affermare che la parabola trovata è la parabola tangente al grafico di $\cos x$ in $x_0 = 0$, nel senso che è l'unica parabola $ax^2 + bx + c$ tale che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - ax^2 - bx - c}{x^2} = 0.$$

Per formalizzare meglio questi concetti e più in generale il concetto di "polinomio tangente",



è utile introdurre il simbolo di Landau, anche detto o (leggasi *o piccolo*).

1.1 Infinitesimi e il simbolo o

La trattazione che svilupperemo qui è quella relativa al concetto di infinitesimo e del simbolo di Landau o; si potrebbe anche trattare in modo analogo il concetto di O ("o grande"), come quello di ω ("omega piccolo") e Ω ("omega grande"), concetti che in questo corso non affronteremo.

Definizione 1.1 *Dato un punto $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ e due funzioni definite in un intorno I di x_0, $f, g : I \to \mathbb{R}$, diremo che f è infinitesima rispetto a g in x_0 o che f è un o piccolo di g in x_0, $f \in o_{x_0}(g)$, se esiste il limite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Nel caso in cui $g(x) = 1$ su I, si dice che f è infinitesima in x_0, cioè

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

e scriveremo $f \in o_{x_0}(1)$. Nel caso in cui $x_0 = 0$, si scrive semplicemente $f \in o(g)$.

Osservazione 1.2 Si può pensare ad $o_{x_0}(g)$ come ad una non meglio precisata funzione, o famiglia di funzioni, con la proprietà

$$\lim_{x \to x_0} \frac{o_{x_0}(g)}{g(x)} = 0.$$

In relazione a quanto visto in precedenza, si ha che

$$0 = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1 \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x - x}{x} \right)$$

e quindi $\operatorname{sen} x - x = o(x)$, cioè $\operatorname{sen} x = x + o(x)$, o più in generale, per una funzione derivabile, $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0)$. Analogmente, si avrà che $\cos x = 1 + o(1)$ e $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Un modo per confrontare i due errori dati dalle precedenti formule è quello di confrontare i due infinitesimi $o(1)$ e $o(x^2)$. Abbiamo in generale che se $a, b \in \mathbb{R}$, allora $x^a = o(x^b)$ se e solo se

$$0 = \lim_{x \to 0} \frac{x^a}{x^b} = \lim_{x \to 0} x^{a-b},$$

cioè se e solo se $a > b$. Quindi ad esempio $x \in o(1)$, $x^2 \in o(x)$, ecc. Nel caso $a > b$ scriveremo anche $o(x^a) \subset o(x^b)$, così ad esempio $o(x^2) \subset o(1)$. Vediamo come utilizzare la nozione di o per definire le approssimazioni polinomiali.

1.2 Formula di Mac Laurin-Taylor

Nella precedente sezione abbiamo dato, per una funzione derivabile, la sua linearizzazione o approssimazione al primo ordine; vediamo ora come arrivare ad approssimazioni di ordine superiore. Per avere ciò bisognerà richiedere maggiore regolarità sulla funzione f. Il seguente Teorema fornisce l'approssimazione polinomiale nel punto $x_0 =$.

Teorema 1.3 (Formula di Mac Laurin con resto di Peano) *Sia f una funzione derivabile n volte con derivata n–esima continua in $x_0 = 0$; esiste allora un unico polinomio di grado n, denotato con T_n^f o semplicemente T_n, per il quale vale*

$$f(x) = T_n(x) + o(x^n). \tag{1.6}$$

La quantità $o(x^n)$ viene detta resto di Peano ed il polinomio T_n viene detto polinomio di Mac Laurin di grado n ed è determinato dalla formula

$$\begin{aligned} T_n(x) &= f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \end{aligned} \tag{1.7}$$

ed è l'unico polinomio di grado n per il quale

$$T_n(0) = f(0), \quad T_n'(0) = f'(0), \quad \ldots, \quad T_n^{(n)}(0) = f^{(n)}(0).$$

DIM. Per vedere che il polinomio definito dalla formula (1.7) verifica la (1.6) basta applicare n volte il Teorema di de L'Hôpital; infatti

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-T_n(x)}{x^n} &= \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-T_n'(x)}{nx^{n-1}} = \cdots = \lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)-T_n^{(n)}(x)}{n!}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{n!}=0\end{aligned}$$

grazie alla continuità della derivata n-esima. Per dimostrare l'unicità di T_n, si supponga che esista un altro polinomio $p_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ di grado n che soddisfa la (1.6); allora $f(x) - p_n(x) = o(x^k)$ per ogni $k = 0, \ldots, n$. In particolare, per $k = 0$, si ha che

$$\lim_{x\to 0}(f(x)-p_n(x)) = 0,$$

da cui $p_n(0) = f(0)$; analogamente, applicando nuovamente il Teorema di de L'Hôspital, si ricava che

$$0 = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-p_n(x)}{x^k} = \lim_{x\to 0}\frac{f^{(k)}(x)-p_n^{(k)}(x)}{k!},$$

da cui $f^{(k)}(0) = p^{(k)}(0) = k!a_k$. Questo implica che

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \qquad \forall k = 0, \ldots, n.$$

□

Il primo, e più semplice, esempio che si può fare è la funzione esponenziale; difatti, per $f(x) = e^x$ si ha $f^{(n)}(x) = e^x$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,e quindi

$$T_n^{e^x}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!},$$

da cui

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

In modo analogo si ottengono gli sviluppi

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+1}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k}).$$

Non è sorprendente trovare che lo sviluppo di Mac Laurin della funzione coseno contiene solo potenze pari di x, essendo la funzione coseno una funzione pari; allo stesso modo, dato che la funzione seno è dispari, lo sviluppo di Mac Laurin avrà solo potenze dispari.

Come esercizio, si provi a ricavare gli sviluppi di Mac Laurin per le funzioni

$$\ln(1+x), \sqrt{1+x}, (1+x)^\alpha, \sinh(x), \cosh(x).$$

Il seguente Teorema fornisce una stima più precisa dell'errore che si commette approssimando una funzione con il suo polinomio di Mac Laurin; esso fornisce una valutazione della quantità $o(x^n)$.

Teorema 1.4 (Formula di Taylor; resto integrale e di Lagrange) *Sia f una funzione derivabile $n+1$ volte con derivata $n+1$–esima continua; allora il resto della formula di Mac Laurin può essere espresso in forma integrale come*

$$o(x^n) = x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(n)!} f^{(n+1)}(tx) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dtdt \quad \textit{(resto integrale)} \tag{1.8}$$

oppure in forma differenziale

$$o(x^n) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \textit{(resto di Lagrange)} \tag{1.9}$$

con c elemento dell'intervallo di estremi x e 0.

Dim. La dimostrazione della formula con resto integrale si può fare per induzione partendo dalla funzione $g(t) = f(tx)$; notando che $g(0) = f(0)$, $g(1) = f(x)$ e $g'(t) = (x)f'(tx)$, dal Teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene

$$g(1) = g(0) + \int_0^1 g'(t)dt,$$

da cui

$$f(x) = f(0) + x \int_0^1 f'(tx)dt.$$

Si noti che

$$x \int_0^1 f'(tx)dt = o(1)$$

e quindi la formula di Taylor di ordine 0 è dimostrata. Per procedere con il passo induttivo, si integra per parti ottenendo

$$\begin{aligned} \int_0^1 f'(tx)dt &= -(1-t)f'(tx)\Big|_{t=0}^{1} \\ &\quad + x \int_0^1 (1-t)f''(tx)dt \\ &= f'(0) + x \int_0^1 (1-t)f''(tx)dt \end{aligned}$$

o più in generale

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(tx)dt = \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+2)}(tx)dt,$$

da cui la formula

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(n)!} f^{(n+1)}(tx)dt;$$

si noti che la (1.8) è immediata. Per la (1.9) si applicherà invece il Teorema di Lagrange; esso infatti afferma che esiste c nell'intervallo di estremi x e 0 tale che

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(c),$$

cioè

$$f(x) = f(0) + f'(c)x$$

che è la formula di Taylor di ordine 0; per ottenere la formula generale si procederà per induzione. $\square$

La formula con il resto di Lagrange permette di dare una stima del tipo

$$|f(x) - T_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(c)||x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ad esempio, se si vuole calcolare $\sqrt{e}$ (sapendo a priori $e \leq 3$), si può utilizzare lo sviluppo di Mac Laurin per $f(x) = e^x$ con $x = 1/2$: ad esempio, se fissiamo $n = 3$, avremo che

$$T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

con $T_3(1/2) = \frac{79}{48}$. Inoltre $|\sqrt{e} - T_3(1/2)| = \frac{e^c}{2^4 4!} \leq \frac{\sqrt{3}}{2^4 4!} \sim 0,0045$ in quanto $c \in [0, 1/2]$.

Tutti i discorsi fatti nel caso del polinomio di Mac Laurin per $x_0 = 0$ possono essere trasferiti ad un generico punto x_0; si definisce quindi il polinomio di Taylor di grado n centrato nel punto x_0 nel seguente modo.

Teorema 1.5 (Formula di Taylor) *Sia f una funzione derivabile n volte con derivata n–esima continua in un punto x_0; esiste allora un unico polinomio di grado n in $(x - x_0)$, denotato con $T^f_{x_0 n}$ o semplicemente T_n se la funzione f ed il punto x_0 sono chiari, per il quale vale*

$$f(x) = T^f_{x_0,n}(x) + o((x - x_0)^n). \qquad \textit{(Formula di Taylor resto di Peano).} \tag{1.10}$$

Il polinomio di Taylor è dato da

$$\begin{aligned} T^f_{x_0,n}(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Se poi la funzione f è derivabile $n + 1$ volte in x_0, allora si ottengono le formule di Taylor con resto integrale e di Lagrange

$$\begin{aligned} f(x) &= T^f_{x_0,n}(x) + (x - x_0)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(n)!} f^{(n+1)}(t(x - x_0)) \\ &= T^f_{x_0,n}(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x - x_0 - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dtdt \\ &= T^f_{x_0,n}(x) + \frac{f^{(n+1)(c)}}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \end{aligned}$$

dove c è un punto compreso nell'intervallo di estremo x_0 e x.

Ad esempio, si possono calcolare i polinomio di Taylor di

$$f(x) = \operatorname{sen} x, x_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad f(x) = e^x, x_0 = 1, \qquad f(x) = \ln(1 + x), x_0 = 2.$$

Osservazione 1.6 Una domanda che ci si potrebbe porre è se l'apporssimazione che si ottiene al variare del grado n del polinomio di Taylor possa migliorare per n crescente. Supponiamo quindi che la funzione sia derivabile infinite volte in x_0; in questo caso possiamo costruirci i polinomi $T^f_{x_0,n}$ per ogni grado n. Per passare al limite $n \to \infty$ subentrano però due problemi; il primo è che stiamo definendo una serie, quindi bisogna porsi il problema della convergenza della serie in considerazione. Il secondo, ammesso che la serie converga, consiste nel chiedersi se la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k := g(x),$$

che viene detta serie di Taylor associata ad f, coincida o meno con f, cioè se $g(x) = f(x)$. Questo non è sempre vero, come mostra la funzione $f(x) = e^{-1/x^2}$, con $f(0) = 0$; tale funzione è derivabile infinite volte in 0 con derivate tutte nulle, quindi la serie associata $g(x)$ definisce la funzione nulla, mentre f non è nulla. Il problema delle serie di Taylor non verrà affrontato in questo corso, ma sarà argomento di corsi più avanzati.

1.3 Algebra degli o e formule di Taylor di funzioni composte

Usando le potenze di x, si può dare la seguente definizione.

Definizione 1.7 *Sia $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ e sia f una funzione definita in un intorno I di x_0, $f : I \to \mathbb{R}$. Avremo allora le seguenti possibilità:*

1. *nel caso $x_0 \in \mathbb{R}$, se esiste $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ed esiste il limite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^a} = \lambda,$$

diremo che f è infinitesima di ordine a se $a > 0$, mentre f è infinita di ordine a se $a < 0$;

2. *nel caso $x_0 = \pm\infty$, se esiste $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ed esiste il limite*

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x^a} = \lambda,$$

diremo che f è infinitesima di ordine a se $a < 0$, mentre f è infinita di ordine a se $a > 0$.

In entrambi i precedenti casi si potrà anche dire che f ha ordine a in x_0 e si scriverà $\mathrm{ord}_{x_0}(f) = a$.

Ad esempio, dal limite notevole

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1,$$

si ricava che $\operatorname{sen} x$ è infinitesima di ordine 1 in $x_0 = 0$ o anche che

$$\mathrm{ord}_0(\operatorname{sen} x) = 1,$$

mentre dal limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{1-\cos x}=1$$

si deduce che la funzione $\frac{2}{1-\cos x}$ è infinita di ordine 2 per $x_0 = 0$ o anche che

$$\operatorname{ord}_0\left(\frac{2}{1-\cos x}\right)=-2.$$

Abbiamo la seguente proposizione.

Proposizione 1.8 (Algebra degli o e relazioni tra o e ord**)** *Sia $x_0 \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, siano f e g due funzioni definite in un intorno I di x_0, $f, g : I \to \mathbb{R}$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Valgono allora le seguenti proprietà;*

1. $o_{x_0}(f) \pm o_{x_0}(f) = o_{x_0}(f)$;
2. $\lambda o_{x_0}(f) = o_{x_0}(f)$;
3. $o_{x_0}(f)o_{x_0}(g) = o_{x_0}(fg)$;
4. *se* $f \in o_{x_0}(g)$, *allora* $o_{x_0}(f) \subset o_{x_0}(g)$, $o_{x_0}(f) + o_{x_0}(g) = o_{x_0}(g)$;
5. *se* $\operatorname{ord}_{x_0}(f) = a$, *allora, se* $x_0 \in \mathbb{R}$ *si avrà* $f \in o_{x_0}((x-x_0)^b)$ *per ogni* $b < a$, *mentre se* $x_0 = \pm\infty$ *si avrà che* $f \in o_{\pm\infty}(x^b)$ *per ogni* $b > a$.

Dim. Grazie all'Osservazione 1.2, si ha che

$$\lim_{x\to x_0}\frac{o_{x_0}(f)\pm o_{x_0}(f)}{f(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{o_{x_0}(f)}{f(x)}\pm\lim_{x\to x_0}\frac{o_{x_0}(f)}{f(x)}=0,$$

da cui la 1. Analogamente,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\lambda o_{x_0}(f)}{f(x)}=\lambda\lim_{x\to x_0}\frac{o_{x_0}(f)}{f(x)}$$

da cui l'equivalenza 2. in quanto $\lambda \neq 0$. Per la 3. si nota che

$$\lim_{x\to x_0}\frac{o_{x_0}(f)o_{x_0}(g)}{f(x)g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{o_{x_0}(f)}{f(x)}\lim_{x\to x_0}\frac{o_{x_0}(g)}{g(x)}=0.$$

Per la proprietà 4. si nota che

$$\lim_{x\to x_0}\frac{o_{x_0}(f)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\frac{o_{x_0}(f)}{f(x)}=0.$$

Infine, dimostriamo la 5. solo nel caso $x_0 \in \mathbb{R}$ (essendo il caso $x_0 \pm \infty$ analago); dalla definizione di ordine, si ottiene quindi che

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{(x-x_0)^b}=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^{a-b}\frac{f(x)}{(x-x_0)^a}=\lambda\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^{a-b}=0$$

se e solo se $a > b$. $\square$

Con questi strumenti si può ad esempio calcolare il polinomio di Mac Laurin della funzione $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$ senza calcolare le sue derivate; difatti, sfruttando gli sviluppi di e^x e $\operatorname{sen} x$, si ottiene

$$\begin{aligned}
e^{\operatorname{sen} x} &= e^{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)} \\
&= 1+\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2+ \\
&\quad +\frac{1}{6}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^3+o\left((x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))^3\right) \\
&= 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^3)
\end{aligned}$$

da cui

$$T_3^{e^{\operatorname{sen} x}}(x) = 1+x+\frac{x^2}{2}.$$

1.4 Applicazioni della formula di Taylor

Una prima applicazione della formula di Taylor si può avere ad esempio nel calcolo dei limiti. Abbiamo infatti il seguente risultato.

Proposizione 1.9 *Sia $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ e siano f, f_1 e g tre funzioni definite in un intorno I di x_0, $f, f_1, g : I \to \mathbb{R}$; allora, se $f_1 \in o_{x_0}(f)$, il limite*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+f_1(x)}{g(x)}$$

esiste se e solo se esiste il limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

e vale

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+f_1(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Dim. La dimostrazione segue semplicemente osservando che

$$\frac{f(x)+f_1(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}\left(1+\frac{f_1(x)}{f(x)}\right)$$

e dal fatto che, siccome $f_1 \in o_{x_0}(f)$,

$$\exists \lim_{x\to x_0}\left(1+\frac{f_1(x)}{f(x)}\right) = 1.$$

□

Abbiamo quindi che se $f(x) = T^f_{n,x_0}(x) + o_{x_0}((x-x_0)^n)$ e $g(x) = T^g_{m,x_0}(x) + o((x-x_0)^m)$ con polinomi non nulli, allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{T^f_{n,x_0}(x)}{T^g_{m,x_0}(x)}$$

almeno ogni qualvolta il limite di destra non si presenti in forma indeterminata. Questa osservazione rende il calcolo dei limiti un problema più semplice in quanto ridotto al limite di una espressione razionale. Così ad esempio

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6}}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

Così ad esempio se si volesse studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \operatorname{sen} \frac{1}{n} \right),$$

il limite precedente ci dice che il termine generale è asintoticamente equivalente a $\frac{1}{6n^3}$, e quindi la serie è assolutamente convergente.

Altra applicazione si può avere nello studio della convessità e nella classificazione dei punti stazionari. Supponiamo ad esempio che $f'' \geq 0$; dalla formula di Taylor con resto di Lagrange si ottiene quindi che

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)(x - x_0)^2}{2} \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

quindi il grafico di f si trova al di sopra del grafico della sua retta tangente in $(x_0, f(x_0))$. Inoltre, se x_0 è un punto stazionario e $f''(x_0) > 0$, allora dalla formula di Taylor di ordine 2 si ottiene

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o_{x_0}((x - x_0)^2)$$

e quindi

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^2} = \frac{f''(x_0)}{2} > 0$$

da cui la positività di $f(x) - f(x_0)$ in un intorno di x_0, cioè il fatto che $f(x_0)$ è un punto di minimo.

Usando il polinomio di Taylor di grado superiore, si può enunciare il seguente risultato riguardante la classificazione dei punti stazionari di una funzione.

Proposizione 1.10 *Supponiamo che f sia un funzione derivabile n volte con continuità in x_0 e supponiamo che*

$$f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Allora:

1. *se n è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0$, x_0 è un punto di minimo;*
2. *se n è pari e $f^{(n)}(x_0) < 0$, x_0 è un punto di massimo;*
3. *se n è dispari, x_0 è un punto di flesso, ascendente se $f^{(n)}(x_0) > 0$, discendente se $f^{(n)}(x_0) < 0$.*

Capitolo 2

I Numeri Complessi

In questo capitolo daremo la definizione e le principali proprietà di un nuovo insieme numerico: il campo[1] dei numeri complessi $\mathbb{C}$.

La motivazione che spinge ad introdurre questo nuovo insieme numerico, quantomeno per il presente corso, viene dalla necessità di risolvere equazioni, principalmente, del secondo ordine, cioè equazioni della forma

$$ax^2 + bx + c = 0;$$

come è ben noto, le soluzioni di tale equazione sono date dalla formula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Tale formula funziona con i seguenti accorgimenti;

1. se $b^2 - 4ac > 0$, allora la radice quadrata è ben definita e si ottengono due soluzioni reali distinte;

2. se $b^2 - 4ac = 0$, la radice non compare e si ottiene una sola soluzione, o meglio due soluzioni coincidenti.

Resta il problema del caso $b^2 - 4ac < 0$, in cui ci si trova di fronte al problema di dover calcolare

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{-|b^2 - 4ac|} = \sqrt{-1}\sqrt{|b^2 - 4ac|};$$

si può notare che nella precedente espressione basta dare un senso alla radice quadrata del numero negativo -1 per ottenere una buona formula risolutiva di ogni polinomio di secondo grado, senza distinzioni sul discriminante (in realtà l'unica distinzione sarà discriminante

[1]Ricordiamo che per campo si intende un insieme K sul quale siano definite due operazioni, dette somma e prodotto e denotate con $+$ e $\cdot$, per le quali valgono le proprietà:

1. $+$ è associativa, ammette elemento neutro, denotato con 0, e ogni elemento $a \in K$ è invertibile rispetto alla somma con inversa denotata con $-a$;

2. $\cdot$ è associativa, ammette elemento neutro, denotato con 1, e ogni elemento $a \in K$ con $a \neq 0$ è invertibile rispetto al prodotto con inverso denotato con a^{-1} o $\frac{1}{a}$;

3. le operazioni di somma e prodotto godono della proprietà distributiva.

Se le operazioni di somma e prodotto sono commutative, si parla di campo commutativo o abeliano.

nullo o meno). Si tratta quindi di trovare un insieme numerico in cui l'equazione $x^2 + 1 = 0$ abbia soluzione; come vedremo, risolvere quest'ultima equazione renderà possibile trovare le radici non solo di polinomi di secondo grado, ma di grado arbitrario e a coefficienti non reali (vedi Teorema 2.13).

2.1 Definizione e prime proprietà

In questa sezione daremo la definizione e le principali proprietà dei numeri complessi. Come si è visto nel corso di Analisi Matematica I, si parte dall'insieme numerico $\mathbb{N}$ sul quale sono ben definite le operazioni di somma e prodotto ma nel quale non esistono gli elementi inversi rispetto a queste due operazioni. Si introducono quindi delle estensioni di $\mathbb{N}$ in cui sono ancora definite somma e prodotto, che sono estensioni della somma e prodotto su $\mathbb{N}$, in modo che esistano gli elementi inversi rispetto alla somma (e si ottiene così l'insieme $\mathbb{Z}$) e prodotto (ottenendo così $\mathbb{Q}$). L'introduzione di $\mathbb{R}$ viene fatta in modo che ci sia completezza non tanto rispetto alle operazioni di somma e prodotto, ma rispetto alla convergenza delle successioni di Cauchy, ottenendo in definitiva le seguenti inclusioni $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Vogliamo definire qui il campo $\mathbb{C}$ in modo che $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ e che le operazioni di somma e prodotto su $\mathbb{C}$ non siano altro che estensioni della somma e prodotto su $\mathbb{R}$.

Esistono vari modi equivalenti di definire $\mathbb{C}$; quello che seguiremo è quello di tipo cartesiano.

Definizione 2.1 (Campo complesso) *Diremo* campo compesso*, e lo denoteremo con* $\mathbb{C}$*, l'insieme consistente nel piano* $\mathbb{R}^2$ *(che prende il nome di piano di Gauss) munito delle operazioni di somma e prodotto*

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Un generico elemento di $\mathbb{C}$ *si indicherà con le ultime lettere dell'alfabeto,* $z, w, \ldots$ *intendendo* $z = (a, b)$*, ecc. La prima componente di un numero complesso si chiama parte reale,* $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(a, b) = a$ *e la seconda componente si chiama parte immaginaria,* $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(a, b) = b$ *(si tenga ben presente che parte reale e parte immaginaria di un numero complesso sono entrambi numeri reali). Un numero complesso* z *si dirà reale (o reale puro) se* $\mathrm{Im}(z) = 0$*, mentre si dirà immaginario puro se* $\mathrm{Re}(z) = 0$*.*

Osservazione 2.2 Dato che l'insieme dei numeri complessi è definito tramite una coppia ordinata, l'uguaglianza tra numeri complessi, $z = w$ con $z = (a, b)$ e $w = (c, d)$, si verificherà se e solo se $a = c$ e $b = d$, cioè se e solo se $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w)$ e $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w)$.

La terminologia campo è motivata dalla seguente Proposizione.

Proposizione 2.3 $\mathbb{C}$ *è un campo abeliano.*

Dim. Le proprietà di associatività e commutatività della somma sono immediate, mentre quelle per il prodotto sono lasciate come verifica. Si nota quindi che gli elementi $(0, 0)$ e $(1, 0)$ sono elementi neutri per la somma e per il prodotto rispettivamente; si nota infine che l'elemento $-z = -(a, b) = (-a, -b)$ è l'inverso additivo di $z = (a, b)$, mentre, se $z \neq (0, 0)$, allora

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right) \tag{2.1}$$

è l'inverso moltiplicativo di z. Si noti che dire $z \neq (0,0)$ significa che almeno uno tra a e b è diverso da zero, da cui il fatto che $a^2 + b^2 \neq 0$ e cioè la buona definizione di z^{-1} $\square$

Vediamo ora in che senso $\mathbb{C}$ è una estensione di $\mathbb{R}$; si nota che sull'insieme

$$R = \{(a,0) : a \in \mathbb{R}\}$$

le operazioni sopra definite si riducono a

$$(a,0) + (b,0) = (a+b,0). \quad (a,0) \cdot (b,0) = (ab,0).$$

ed inoltre

$$-(a,0) = (-a,0), \quad (a,0)^{-1} = (1/a,0).$$

Identificando quindi R con $\mathbb{R}$, avremo che $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$; useremo sempre questa identificazione che ci porta a scrivere la seguente uguaglianza

$$(a,0) = a.$$

Avremo in particolare che gli elementi neutri rispetto a somma e prodotto in $\mathbb{C}$ sono gli stessi di quelli in $\mathbb{R}$, essendo $0 = (0,0)$ e $1 = (1,0)$.

Osservazione 2.4 Si noti che mentre $\mathbb{R}$ è un campo ordinato, su $\mathbb{C}$ non abbiamo introdotto nessuna nozione di ordinamento; questo è dovuto al fatto che non c'è un modo naturale per estendere l'ordinamento $\leq$ su $\mathbb{C}$ e non avrà quindi senso per i numeri complessi l'espressione $z \leq w$.

Notiamo inoltre che con le notazioni appena introdotte, otteniamo che

$$(0,1) \cdot (0,1) = (-1.0) = -1,$$

cioè l'elemento $i = (0,1)$ ha la proprietà che $i^2 = -1$; tale elemento verrà chiamata unità immaginaria. In questo modo siamo arrivati a poter scrivere un numero complesso, oltre che con la notazione cartesiana, anche in notazione algebrica. Infatti, abbiamo che

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (0,1) \cdot (b,0) = a + ib.$$

La definizione algebrica quindi dei numeri complessi passa tramite la definizione di un numero *speciale* i con la proprietà che $i^2 = -1$, e definedo numero complesso tutte le possibili combinazioni lineari degli elementi 1 e i, cioè tutti i numeri della forma appunto

$$a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

In questo modo l'operazione di prodotto diventa più intuitiva; infatti dati due numeri complessi $a + ib, c + id$, abbiamo, tenendo presente che $i^2 = -1$,

$$(a+ib) \cdot (c+id) = a \cdot c + a \cdot id + ib \cdot c + ib \cdot id = ac - bd + i(ad + bc).$$

2.2 Coniugato e modulo di un numero complesso

Sui numeri complessi è definita l'operazione di coniugio; dato cioè un numero complesso $z = a + ib$, si definisce il numero complesso $\overline{z}$ detto coniugato di z tramite

$$\overline{z} = a - ib.$$

Per l'operazione di coniugio abbiamo le seguenti proprietà.

Proposizione 2.5 *Siano $z, w \in \mathbb{C}$; allora*

1. $\overline{\overline{z}} = z$ *(proprietà involutiva del coniugio);*
2. $\overline{z} = z$ *se e solo se z reale;*
3. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$*;*
4. $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$*;*
5. *se $z \neq 0$, allora* $\overline{1/z} = 1/\overline{z}$*;*
6. $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$, $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$.

DIM. Basta scrivere z e w in forma algebrica $z = a+ib$, $w = c+id$ e verificare le identità; vediamo solamente le dimostrazioni di 4. e 5. Dato che $zw = (ac - bd) + i(ad + bc)$, segue che $\overline{zw} = (ac - bd) - i(ad + bc)$, mentre

$$\overline{z} \cdot \overline{w} = (a - ib)(c - id) = (ac - bd) + i(-ad - bc)$$

da cui la 4. Per la 5. si nota che da (2.1) applicata a z e $\overline{z}$, si ottiene che

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}, \quad \frac{1}{\overline{z}} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\frac{b}{a^2 + b^2},$$

da cui la 5. □

Notiamo che scrivendo $z = a + ib$ si ottiene che $z\overline{z} = a^2 + b^2$, e quindi il fatto che $z\overline{z}$ è un numero reale positivo. Possiamo quindi dare la seguente definizione.

Definizione 2.6 (Modulo di un numero complesso) *Dato un numero complesso $z \in \mathbb{C}$, si definisce il modulo di z tramite*

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}}.$$

Osservazione 2.7 Non si deve confondere la notazione di modulo di un numero complesso con quella di valore assoluto di un numero reale; tuttavia, le due nozioni coincidono nel caso in cui z è reale puro, in quanto in questo caso $b = 0$ e quindi

$$|z| = \sqrt{a^2} = |a|.$$

Per il modulo di un numero complesso valgono le seguenti proprietà.

Proposizione 2.8 *Siano $z, w \in \mathbb{C}$; allora*

1. $|z| \geq 0$, $|z| = 0$ *se e solo se* $z = 0$*;*

2. $|z| = |\overline{z}|$, $|-z| = |z|$;

3. $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$, $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$, $|z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$;

4. *se* $z \neq 0$, $|1/z| = 1/|z|$, $1/z = \overline{z}/|z|^2$;

5. $|zw| = |z||w|$;

6. $|z+w| \leq |z| + |w|$ *(disuguaglianza triangolare);*

7. $|z+w| \geq ||z| - |w||$ *(seconda disuguaglianza triangolare).*

Dim. Si scrivono $z = a + ib$ e $w = c + id$ e le proprietà 1., 2. e 3. sono immediate. Notando poi che per $z \neq 0$

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \left|\frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}\right| = \sqrt{\frac{a^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{b^2}{(a^2+b^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{|z|}$$

da cui la 4. (la seconda proprietà della 4. segue direttamente dalla definizione $|z|^2 = z\overline{z}$). Per la 5., si nota che dalle proprietà del coniugio, si ottiene che

$$|zw|^2 = zw\overline{zw} = zw\overline{z} \cdot \overline{w} = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2.$$

Per quanto riguarda la disuguaglianza triangolare, si ha che, tenendo presente la proprietà 6. della Proposizione 2.5 e la 3. di questa Proposizione,

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} = z\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} = |z|^2 + |w|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) \\ &\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\overline{w}| = |z|^2 + |w|^2 + 2|z| \cdot |w| \\ &= (|z| + |w|)^2, \end{aligned}$$

da cui la 6. Per quanto riguarda la 7., basta notare che

$$|z| = |z - w + w| \leq |z - w| + |w|,$$

da cui $|z| - |w| \leq |z - w|$; analogamente

$$|w| \leq |w - z| + |z| = |z - w| + |z|,$$

da cui $|w| - |z| \leq |z - w|$. Mettendo insieme queste due disuguaglianze, si ottiene la 7. $\square$

2.3 Forma polare ed esponenziale

Nelle sezioni precedenti abbiamo introdotto le forme cartesiana ed algebrica di un numero complesso; in questa sezione introdurremo la forma polare ed esponenziale. Il vantaggio di queste nuove definizioni è che mentre la forma cartesiana e algebrica è comoda quando si vogliono sommare due numeri complessi, la forma polare ed esponenziale lo sono nella moltiplicazione.

La definizione della forma polare di un numero complesso segue dall'osservazione che un numero complesso $z = a + ib = (a, b)$ rappresenta un punto nel piano $\mathbb{R}^2$ ed è quindi determinato dalle sue coordinate polari (ϱ, ϑ), dove $\varrho = \sqrt{a^2 + b^2}$ rappresenta la distanza del punto (a,b) dall'origine e coincide con il modulo del numero complesso, $\varrho = |z|$, mentre l'angolo ϑ, detta argomento o anomalia e denotato con $\vartheta = \arg(z)$, rappresenta l'angolo, preso in senso antiorario, formato dal semiasse $\{x = 0, y \geq 0\}$ e la semiretta originata in $(0,0)$ e passante per (a,b). Si nota che mentre ϱ è univocamente determinato, l'angolo ϑ è individuato a meno di multipli di 2π (fa eccezione l'origine, che è individuata da $\varrho = 0$ ma non ha un ϑ determinato) ed è univocamente determinato in un intervallo semiaperto di ampiezza 2π; si parla in questo caso di argomento principale di z e come intervallo si può scegliere $(-\pi, \pi]$ (o $[0, 2\pi)$ a seconda dei casi). Per passare dalla forma algebrica alle coordinate polari del numero $z = a + ib$ si possono usare, nel caso $z \neq 0$, le formule

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \varrho \cos\vartheta \\ b = \varrho \,\mathrm{sen}\,\vartheta \end{array} \right. , \qquad \left\{ \begin{array}{l} \varrho = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos\vartheta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \mathrm{sen}\,\vartheta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{array} \right. \tag{2.2}$$

Possiamo quindi dare la seguente definizione.

Definizione 2.9 (Forma polare) *Dato $z \in \mathbb{C}$, si chiama forma polare (o trigonometrica) l'espressione di z usata utilizzando le coordinate polari*

$$z = \varrho(\cos\vartheta + i \,\mathrm{sen}\,\vartheta).$$

Uno dei maggiori vantaggi della rappresentazione polare dei numeri complessi si presenta quando si deve fare il prodotto di due numeri complessi. Supponiamo infatti di avere due numeri complessi $z = \varrho(\cos\vartheta + i \,\mathrm{sen}\,\vartheta)$, $w = r(\cos\phi + i \,\mathrm{sen}\,\phi)$, otteniamo che

$$zw = \varrho r(\cos(\vartheta + \phi) + i \,\mathrm{sen}(\vartheta + \phi)), \quad \frac{z}{w} = \frac{\varrho}{r}(\cos(\vartheta - \phi) + i \,\mathrm{sen}(\vartheta - \phi)),$$

cioè la moltiplicazione per il numero w è data da una dilatazione pari a r e una rotazione di un angolo ϕ. In particolare, se $w = z$, si ottiene che

$$z^2 = \varrho^2(\cos 2\vartheta + i \,\mathrm{sen}\, 2\vartheta),$$

o più in generale, per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$z^n = \varrho^n(\cos n\vartheta + i \,\mathrm{sen}\, n\vartheta).$$

Dato che la funzione

$$f(\vartheta) = \cos\vartheta + i \,\mathrm{sen}\,\vartheta,$$

ha la proprietà che $f(\vartheta_1)f(\vartheta_2) = f(\vartheta_1 + \vartheta_2)$, ha senso la seguente definizione.

Definizione 2.10 *Si definisce l'esponenziale immaginario come la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ data da*

$$e^{i\vartheta} = f(\vartheta) = \cos\vartheta + i \,\mathrm{sen}\,\vartheta;$$

Più in generale, dato un numero complesso $z = a + ib$, si definisce l'esponenziale complesso $e : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$e^z = e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i \,\mathrm{sen}\, b).$$

Osservazione 2.11 Si noti che dalla definizione data, si ha che la funzione $\vartheta \mapsto e^{i\vartheta}$ è 2π-periodica e che per ogni $\vartheta \in \mathbb{R}$ $|e^{i\vartheta}| = 1$.

Definizione 2.12 (Forma esponenziale) *Dato un numero complesso $z \in \mathbb{C}$, si chiama forma esponenziale di z la scrittura di z nella forma*

$$z = \varrho e^{i\vartheta},$$

dove ϱ e ϑ sono determinate dalle (2.2).

2.4 Polinomi e radici n-esime

In questa sezione tratteremo i polinomi in campo complesso. Ricordiamo che un polinomio complesso di grado n è una funzione $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita da

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \quad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}, a_n \neq 0.$$

Ricordiamo che un numero complesso z_0 si dice radice del polinomio p se $p(z_0) = 0$; in tal caso il polinomio p è divisibile per $(z - z_0)$ e si potrà scrivere

$$p(z) = (z - z_0)q(z)$$

con q polinomio di grado $n - 1$. Si dice inoltre che z_0 ha molteplicità m se

$$p(z) = (z - z_0)^m q(z)$$

con q polinomio di grado $n - m$ tale che $q(z_0) \neq 0$; in tal caso $p(z)$ è divisibile per $(z - z_0)^m$ ma non per $(z - z_0)^{m+1}$. Conseguenza di questi fatti è che un polinomio di grado n ha al più n radici, contate con le relative molteplicità. In campo complesso vale però il seguente Teorema, che non dimostreremo.

Teorema 2.13 (Teorema fondamentale dell'algebra) *Ogni polinomio complesso di grado almeno* 1 *ammette una radice complessa.*

Il precedente Teorema ha come immediato corollario il seguente risultato.

Teorema 2.14 (Teorema fondamentale dell'algebra) *Ogni polinomio complesso di grado $n \geq 1$ ammette n radici complesse, se si conta ogni radice con la relativa molteplicità.*

I precedenti Teoremi non danno alcuna informazione su come trovare le radici del polinomio considerato; abbiamo però il seguente Teorema, valido per polinomi a coefficienti reali.

Proposizione 2.15 *Se p è un polinomio complesso a coefficienti reali, cioè $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, allora $z_0 \in \mathbb{C}$ è radice di p se e solo se $\overline{z_0}$ lo è e in tal caso z_0 e $\overline{z_0}$ hanno la stessa molteplicità.*

DIM. Basta osservare che, dato che $p(z_0) = 0$, allora

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{p(z_0)} = \overline{a_0 + a_1 z_0 \cdots + a_n z_0^n} = \overline{a_0} + \overline{a_1} \cdot \overline{z_0} + \cdots + \overline{a_n} \cdot \overline{z_0}^n \\ &= a_0 + a_1 \overline{z_0} \cdots + a_n \overline{z_0}^n = p(\overline{z_0}). \end{aligned}$$

$\square$

Osservazione 2.16 Si noti che come corollario si ha che ogni polinomio reale a coefficienti reali può essere scritto come prodotto di polinomi di grado uno o due; infatti, visto come polinomio complesso, si ha dal Teorema fondamentale dell'algebra 2.14 che

$$p(z) = a_n(z - z_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (z - z_k)^{m_k} \tag{2.3}$$

con $m_1 + \cdots + m_k = n$; tornando a vedere il polinomio come reale a coefficienti reali, se z_i è reale, allora abbiamo un fattore di grado uno, mentre se z_i non reale è, allora in (2.3) deve comparire anche $\overline{z_i}$, esiste cioè $j \neq i$ tale che $z_j = \overline{z_i}$ e $m_j = m_i$. Notando poi che

$$(z - z_i)(z - \overline{z_i}) = z^2 - 2\mathrm{Re}(z_i)z + |z_i|^2$$

che è un polinomio di secondo grado a coefficienti reali, l'osservazione segue.

Consideriamo ora il problema della radice n–esima di un numero complesso. Dato un numero complesso w, si dice che il numero complesso z è una radice n–esima di w se $z^n = w$. Le radici n–esime sono quindi le soluzioni dell'equazione $z^n - w = 0$, cioè sono le radici del polinomio $p(z) = z^n - w$; quindi, per quanto visto sopra, esistono al più n radici n–esime del numero w. Abbiamo la seguente Proposizione che dice che in effetti sono esattamente n.

Proposizione 2.17 *Dato il numero complesso $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, esistono n radici complesse distinte di w date dalla formula*

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}e^{i\vartheta_k}, \quad \textit{con } \vartheta_k = \frac{\arg(w) + 2k\pi}{n}, k = 0, \dots, n-1.$$

Osservazione 2.18 Va osservato che la radice n-esima complessa non definisce una funzione in $\mathbb{C}$, avendo essa più valori; bisogna quindi fare attenzione che il simbolo $\sqrt[n]{w}$ può avere significati differenti, anche nel caso w numero reale, a seconda che si parli di radice reale o radice complessa.

Dim. Scrivendo $z = \varrho e^{i\vartheta}$ e $w = re^{i\phi}$, si nota che $z^n = w$ se e solo se

$$\begin{cases} \varrho^n = r \\ \cos(n\vartheta) = \cos\phi \\ \mathrm{sen}(n\vartheta) = \mathrm{sen}\,\phi; \end{cases}$$

tale sistema ha per soluzioni $\varrho = \sqrt[n]{r}$ (radice reale) e

$$\vartheta_k = \frac{\phi + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{2.4}$$

Chiaramente abbiamo troppi valori di ϑ_k; notiamo però che due differenti valori di k e h definiscono lo stesso numero complesso, cioè $z_h = z_k$ se ϑ_h e ϑ_k differiscono per un multiplo di 2π, cioè se

$$\vartheta_h = \vartheta_k + 2m\pi;$$

la precedente espressione, usando (2.4), è equivalente a

$$h - k = nm,$$

cioè $z_h = z_k$ se e solo se $h - k$ è divisibile per n, o altrimenti detto h e k hanno lo stesso resto nella divisione per n. Siccome i possibili resti della divisione per n sono $0, 1, \dots, n-1$, la dimostrazione segue. $\square$

Capitolo 3

Domande

3.1 Sviluppi di Taylor: domande

1. Dare la definizione del simbolo o (o piccolo) ed enunciare alcune delle sue principali proprietà, fornendo gli esempi che si ritengono opportuni.

2. Dare la definizione di infinitesimo; tramite esempi, fornire inoltre il concetto di ordine di infinitesimo tramite i monomi x^a, $x \in \mathbb{R}$.

3. Dare la definizione e le principali proprietà del polinomio di Mac Laurin e del polinomio di Taylor; dare alcuni esempi.

4. Dimostrare che, data una funzione f, vale l'identità $o(f)-o(f) = o(f)$ e che in generale $o(f) - o(f) \neq 0$ (fornire almeno un controesempio).

5. Definizione di resto di Peano e resto di Lagrange; dare alcuni esempi.

6. Dare la definizione di linearizzazione di una funzione e fornire alcuni esempi significativi.

7. Discutere il concetto di approssimazione e fornire metodi per la stima dell'errore nelle approssimazioni.

8. Mostrare come si può utlizzare la formula di Taylor del secondo ordine per la classificazione dei punti stazionari di una funzione.

3.2 Numeri complessi: domande

1. Dare la definizione algebrica dei numeri complessi; descrivere inoltre l'operazione di coniugio e modulo di un numero complesso.

2. Equivalenza tra forma algebrica e polare di un numero complesso; definizioni e regole per passare da una all'altra.

3. Definizione di piano di Gauss e rappresentazione cartesiana di un numero complesso; interpretazione geometrica di somma e prodotto tra numeri complessi.

4. Definizione e principali proprietà di coniugio e modulo di un numero complesso.
5. Principio di uguaglianza tra numeri complessi in forma algebrica ed in forma polare.
6. Formula di De Moivre e definizione dell'esponenziale immaginario.
7. Definizione di argomento e modulo di un numero complesso; esempi con numeri reali positivi, negativi, i e $-i$.
8. Definizione di radice n–esima di un numero complesso e loro distribuzione nel piano di Gauss.
9. Enunciato del Teorema Fondamentale dell'algebra nelle sue due forme equivalenti; in che senso le due forme sono equivalenti?
10. Calcolo delle radici di un polinomio complesso in campo complesso.
11. Polinomio complessi a coefficienti reali; proprietà delle sue radici.