UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Appunti del corso di
Analisi Matematica II
c.d.l. Ingegneria Civile e Ambientale [1]

Michele Miranda

a.a. 2011-2012

[1] Versione aggiornata al 30 novembre 2011

Nel presente fascicolo sono raccolti gli appunti relativi ad alcuni capitoli del corso di Analisi Matematica 2 tenuto presso la facoltà di Ingegneria dell'Università di Ferrara, corso di laurea in Ingegneria Civile.

Il materiale contenuto in queste note vuole essere semplicemente una guida per gli argomenti trattati durante il corso; è inevitabilmente incompleto, così come è inevitabile che siano presenti errori ed inesattezze. Non si risponde tuttavia degli errori che possono essere contenuti in questo fascicolo, in quanto è cura del lettore rilevare e segnalare eventuali imprecisioni.

I presenti appunti non hanno la pretesa di sostituire il libro di testo, che resta indispensabile per acquisire una conoscenza dignitosa della materia. La loro funzione è piuttosto quella di facilitare gli studenti e indicare loro il bagaglio *minimo* di conoscenze richieste per affrontare l'esame. Si consiglia pertanto sempre di studiare sui testi di Analisi Matematica esistenti in letteratura, sicuramente più affidabili e corretti; fortunatamente le biblioteche dei nostri Atenei traboccano di ottimi testi.

Si consiglia infine di prestare attenzione alla data di aggiornamento della presente dispensa, in quanto in continua evoluzione e correzione.

Michele Miranda
Ferrara, 30 novembre 2011

Indice

Capitolo 1

Approssimazione polinomiale e formula di Taylor

Uno strumento molto importante in matematica è quello della approssimazione lineare e polinomiale; iniziamo con la prima, detta anche approssimazione del primo ordine.

Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ con I intervallo di $\mathbb{R}$ e $x_0 \in I$, dire che f è derivabile, o differenziabile, in x_0 significa richiedere l'esistenza di un numero reale $m \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)}{x - x_0} = 0, \tag{1.1}$$

e si pone $m = f'(x_0)$, la derivata o differenziale di f in x_0. La precedente espressione ci dice che la retta

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0), \tag{1.2}$$

rappresentante la tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ e ha la proprietà che la differenza

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \tag{1.3}$$

è infinitesima, cioè tende a zero, per x che tende a x_0; in altri termini possiamo riscrivere la (1.1) dicendo che

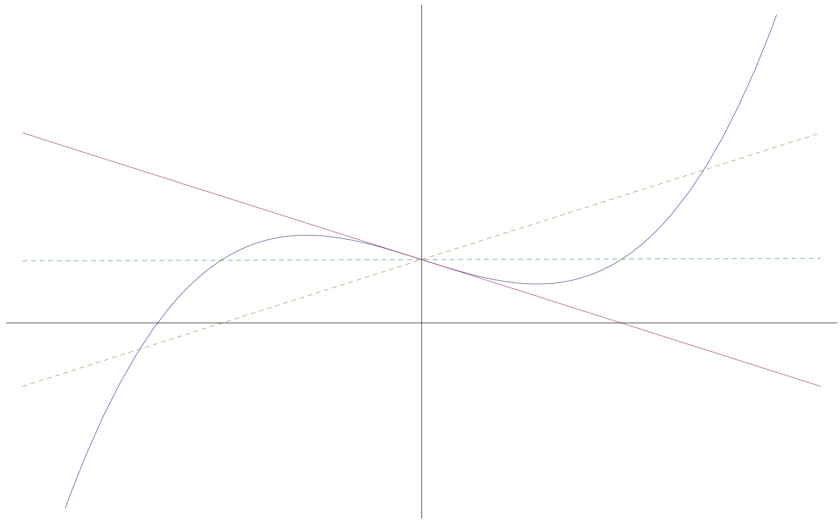
$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (x - x_0)E_{x_0}(x) \tag{1.4}$$

dove $E_{x_0}(x)$ è una quantità che tende a zero per x che tende ad x_0. L'equazione (1.4) dice anche che la differenza (1.3) è infinitesima di ordine 1 in x_0, cioè tende a zero se divisa per $(x - x_0)$. La retta (1.2) viene detta anche linearizzazione, o approssimazione del primo ordine di f in x_0 e definisce l'unica retta $ax + b$ per la quale

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - ax - b}{(x - x_0)} = 0; \tag{1.5}$$

difatti, la precedente espressione, per avere limite finito, deve avere il numeratore che tende a zero in quanto il denominatore tende a zero, cioè

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - ax - b = 0;$$



da cui $b = f(x_0) - ax_0$. Inoltre, dato che (1.5) si presenta a questo punto come una forma indeterminata, applicando il Teorema di De l'Hôpital, la (1.5) diventa equivalente a

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) - a = 0,$$

cioè $a = f'(x_0)$. Alcuni esempi di linearizzazione:

$$\begin{array}{lll} x & \text{per } \operatorname{sen} x & \text{in } x_0 = 0, \\ 1 & \text{per } \cos x & \text{in } x_0 = 0, \\ -x + \pi/2 & \text{per } \cos x & \text{in } x_0 = \pi/2, \\ x - 1 & \text{per } \ln x & \text{in } x_0 = 1, \\ x + 1 & \text{per } e^x & \text{in } x_0 = 0. \end{array}$$

Vediamo ora come andare oltre ed ottenere approssimazioni di ordine successivo; se partiamo dal limite notevole

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

che può equivalentemente essere scritto come

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x - x^2/2}{x^2} = 0$$

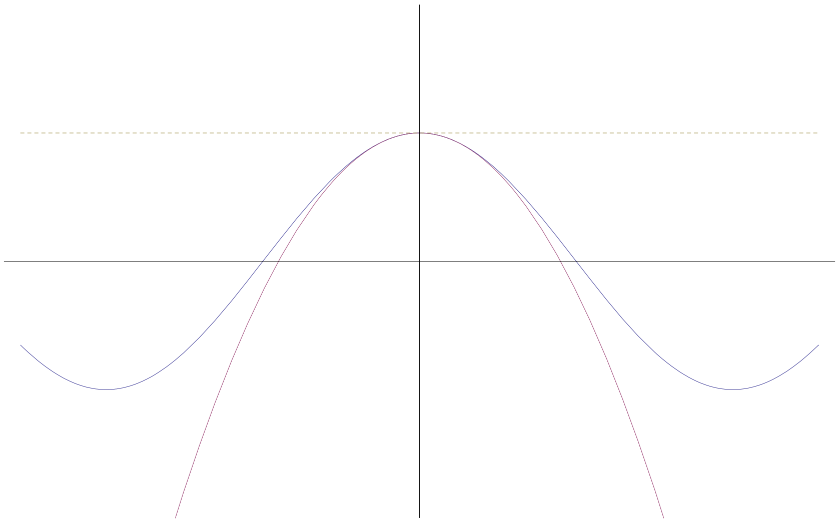
oppure nella forma

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} - x^2 E_0(x)$$

con $E_0(x) \to 0$ per $x \to 0$, notiamo che nel sostituire alla funzione $\cos x$ la parabola $1 - \frac{x^2}{2}$ si ottiene un errore, $x^2 E_0(x)$, che è infinitesimo di ordine 2, cioè tende a zero se diviso per x^2. Un vantaggio nella sostituzione della funzione $\cos x$ non con la sua linearizzazione ma con la parabola $1 - x^2/2$ sta nel fatto che ad esempio si può dedurre che $x_0 = 0$ è un punto di massimo per $\cos x$, in quanto la parabola trovata ha la concavità rivolta verso il basso (maggiori dettagli su questo verranno dati nella sezione 1.4). Si può in qualche modo affermare che la parabola trovata è la parabola tangente al grafico di $\cos x$ in $x_0 = 0$, nel senso che è l'unica parabola $ax^2 + bx + c$ tale che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - ax^2 - bx - c}{x^2} = 0.$$

Per formalizzare meglio questi concetti e più in generale il concetto di "polinomio tangente",



è utile introdurre il simbolo di Landau, anche detto o (leggasi *o piccolo*).

1.1 Infinitesimi e il simbolo o

La trattazione che svilupperemo qui è quella relativa al concetto di infinitesimo e del simbolo di Landau o.

Definizione 1.1 *Dato un punto $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ e due funzioni f, g definite in un intorno I di x_0, $f, g : I \to \mathbb{R}$, diremo che f è infinitesima rispetto a g in x_0 (oppure che f è un o piccolo di g in x_0, ossia $f \in o_{x_0}(g)$), se esiste il limite*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Nel caso in cui $g(x) = 1$ su I, si dice che f è infinitesima in x_0, cioè

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$$

e scriveremo $f \in o_{x_0}(1)$. Nel caso in cui $x_0 = 0$, si scrive semplicemente $f \in o(g)$.

Osservazione 1.2 Si può pensare ad $o_{x_0}(g)$ come ad una non meglio precisata funzione, o famiglia di funzioni, con la proprietà

$$\lim_{x\to x_0} \frac{o_{x_0}(g)}{g(x)} = 0.$$

In relazione a quanto visto in precedenza, si ha che

$$0 = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x - x}{x}\right)$$

e quindi $\operatorname{sen} x - x = o(x)$, cioè $\operatorname{sen} x = x + o(x)$, o più in generale, per una funzione derivabile, $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0)$. Analogmente, si avrà che $\cos x = 1 + o(1)$ e $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Un modo per confrontare i due errori dati dalle precedenti formule è quello di confrontare i due infinitesimi $o(1)$ e $o(x^2)$. Abbiamo in generale che, se $a, b \in \mathbb{R}$, allora $x^a = o(x^b)$ se e solo se

$$0 = \lim_{x\to 0}\frac{x^a}{x^b} = \lim_{x\to 0} x^{a-b},$$

cioè, se e solo se $a > b$. Quindi ad esempio $x \in o(1)$, $x^2 \in o(x)$, ecc. Nel caso $a > b$ scriveremo anche $o(x^a) \subset o(x^b)$, così ad esempio $o(x^2) \subset o(1)$. Vediamo come utilizzare la nozione di o per definire le approssimazioni polinomiali.

1.2 Formula di Mac Laurin-Taylor

Nella precedente sezione abbiamo dato, per una funzione derivabile, la sua linearizzazione o approssimazione al primo ordine; vediamo ora come arrivare ad approssimazioni di ordine superiore. Per ottenere ciò occorrerà richiedere maggiore regolarità sulla funzione f. Il seguente Teorema fornisce l'approssimazione polinomiale nel punto $x_0 = 0$.

Teorema 1.3 (Formula di Mac Laurin con resto di Peano) *Sia f una funzione derivabile n volte con derivata n–esima continua in $x_0 = 0$; esiste allora un unico polinomio di grado n, denotato con T_n^f o semplicemente T_n, per il quale vale*

$$f(x) = T_n(x) + o(x^n). \tag{1.6}$$

La quantità $o(x^n)$ viene detta resto di Peano ed il polinomio T_n viene detto polinomio di Mac Laurin di grado n ed è determinato dalla formula

$$\begin{aligned} T_n(x) &= f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \end{aligned} \tag{1.7}$$

ed è l'unico polinomio di grado n per il quale

$$T_n(0) = f(0), \quad T_n'(0) = f'(0), \quad \ldots, \quad T_n^{(n)}(0) = f^{(n)}(0).$$

Dim. Per vedere che il polinomio definito dalla formula (1.7) verifica la (1.6) basta applicare n volte il Teorema di de L'Hôpital; infatti

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - T_n(x)}{x^n} &= \lim_{x\to 0}\frac{f'(x) - T_n'(x)}{nx^{n-1}} = \cdots = \lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x) - T_n^{(n)}(x)}{n!} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{n!} = 0 \end{aligned}$$

grazie alla continuità della derivata n-esima. Per dimostrare l'unicità di T_n, si supponga che esista un altro polinomio $p_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ di grado n che soddisfa la (1.6); allora $f(x) - p_n(x) = o(x^k)$ per ogni $k = 0, \ldots, n$. In particolare, per $k = 0$, si ha che

$$\lim_{x\to 0}(f(x) - p_n(x)) = 0,$$

da cui $p_n(0) = f(0)$; analogamente, applicando nuovamente il Teorema di de L'Hôpital, si ricava che

$$0 = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - p_n(x)}{x^k} = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(k)}(x) - p_n^{(k)}(x)}{k!},$$

da cui $f^{(k)}(0) = p_n^{(k)}(0) = k!a_k$. Questo implica che

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \qquad \forall k = 0, \ldots, n.$$

□

Il primo, e più semplice, esempio che si può fare è la funzione esponenziale; difatti, per $f(x) = e^x$ si ha $f^{(n)}(x) = e^x$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e quindi

$$T_n^{e^x}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!},$$

da cui

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

In modo analogo si ottengono gli sviluppi

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+2}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k+1}).$$

Non è sorprendente trovare che lo sviluppo di Mac Laurin della funzione coseno contiene solo potenze pari di x, essendo la funzione coseno una funzione pari; allo stesso modo, dato che la funzione seno è dispari, lo sviluppo di Mac Laurin avrà solo potenze dispari.

Come esercizio, si provi a ricavare gli sviluppi di Mac Laurin per le funzioni

$$\ln(1 + x), \sqrt{1 + x}, (1 + x)^\alpha, \sinh(x), \cosh(x).$$

Il seguente Teorema fornisce una stima più precisa dell'errore che si commette approssimando una funzione con il suo polinomio di Mac Laurin; esso fornisce una valutazione della quantità $o(x^n)$.

Teorema 1.4 (Formula di Taylor; resto integrale e di Lagrange) *Sia f una funzione derivabile $n + 1$ volte con derivata $(n + 1)$–esima continua; allora il resto della formula di Mac Laurin può essere espresso in forma integrale come*

$$(1.8) \quad o(x^n) = x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(tx)dt = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \quad \textit{(resto integrale)}$$

oppure in forma differenziale

$$o(x^n) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad \textit{(resto di Lagrange)} \tag{1.9}$$

con c elemento dell'intervallo di estremi x e 0.

Dim. La dimostrazione della formula con resto integrale si può fare per induzione partendo dalla funzione $g(t) = f(tx)$; notando che $g(0) = f(0)$, $g(1) = f(x)$ e $g'(t) = (x)f'(tx)$, dal Teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene

$$g(1) = g(0) + \int_0^1 g'(t)dt,$$

da cui

$$f(x) = f(0) + x\int_0^1 f'(tx)dt.$$

Si noti che

$$x\int_0^1 f'(tx)dt = o(1)$$

e quindi la formula di Taylor di ordine 0 è dimostrata. Per procedere con il passo induttivo, si integra per parti ottenendo

$$\begin{aligned}\int_0^1 f'(tx)dt &= -(1-t)f'(tx)\Big|_0^1 + x\int_0^1 (1-t)f''(tx)dt \\ &= f'(0) + x\int_0^1 (1-t)f''(tx)dt\end{aligned}$$

o più in generale

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!}f^{(k+1)}(tx)dt = \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!} + x\int_0^1 \frac{(1-t)^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k+2)}(tx)dt,$$

da cui la formula

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + x^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(n)!}f^{(n+1)}(tx)dt;$$

si noti che la (1.8) è immediata. Per la (1.9) si applicherà invece il Teorema di Lagrange; esso infatti afferma che esiste c nell'intervallo di estremi x e 0 tale che

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(c),$$

cioè

$$f(x) = f(0) + f'(c)x$$

che è la formula di Taylor di ordine 0; per ottenere la formula generale si procederà per induzione. □

La formula con il resto di Lagrange permette di dare una stima del tipo

$$|f(x) - T_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(c)||x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ad esempio, se si vuole calcolare $\sqrt{e}$ (sapendo a priori che $e \leq 3$), si può utilizzare lo sviluppo di Mac Laurin per $f(x) = e^x$ con $x = 1/2$: ad esempio, se fissiamo $n = 3$, avremo:

$$T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

con $T_3(1/2) = \frac{79}{48}$. Inoltre $|\sqrt{e} - T_3(1/2)| = \frac{e^c}{2^4 4!} \leq \frac{\sqrt{3}}{2^4 4!} \sim 0,0045$ in quanto $c \in [0, 1/2]$.

Tutti le considerazioni fatte nel caso del polinomio di Mac Laurin per $x_0 = 0$ possono essere trasferiti ad un generico punto x_0; si definisce quindi il polinomio di Taylor di grado n centrato nel punto x_0 nel seguente modo.

Teorema 1.5 (Formula di Taylor) *Sia f una funzione derivabile n volte con derivata n–esima continua in un punto x_0; esiste allora un unico polinomio di grado n in $(x - x_0)$, denotato con $T^f_{x_0 n}$ o semplicemente T_n se la funzione f ed il punto x_0 sono noti, per il quale vale*

$$f(x) = T^f_{x_0,n}(x) + o((x - x_0)^n). \qquad \textit{(Formula di Taylor con resto di Peano).} \tag{1.10}$$

Il polinomio di Taylor è dato da

$$\begin{aligned} T^f_{x_0,n}(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Se poi la funzione f è derivabile $n + 1$ volte in x_0, allora si ottengono le formule di Taylor con resto integrale e di Lagrange

$$\begin{aligned} f(x) &= T^f_{x_0,n}(x) + (x - x_0)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t(x - x_0))dt \\ &= T^f_{x_0,n}(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x - x_0 - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \\ &= T^f_{x_0,n}(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \end{aligned}$$

dove c è un punto compreso nell'intervallo di estremi x_0 e x.

Ad esempio, si possono calcolare i polinomi di Taylor di

$$f(x) = \operatorname{sen} x, x_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad f(x) = e^x, x_0 = 1, \qquad f(x) = \ln(1 + x), x_0 = 2.$$

Osservazione 1.6 Una domanda che ci si potrebbe porre è se l'approssimazione che si ottiene al variare del grado n del polinomio di Taylor possa migliorare per $n \to +\infty$. Supponiamo quindi che la funzione sia derivabile infinite volte in x_0; in questo caso possiamo costruirci i polinomi $T^f_{x_0,n}$ per ogni grado n. Nel passaggio al limite per $n \to \infty$ subentrano però due problemi; il primo è che stiamo definendo una serie, quindi bisogna porsi il problema della convergenza della serie in considerazione. Il secondo, ammesso che la serie converga, consiste nel chiedersi se la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k := g(x),$$

che viene detta serie di Taylor associata ad f, coincida o meno con f, cioè se $g(x) = f(x)$. Questo non è sempre vero, come mostra la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0; \end{cases}$$

tale funzione è derivabile infinite volte in 0 con derivate tutte nulle, quindi la serie associata $g(x)$ definisce la funzione nulla, mentre f non è nulla. Il problema delle serie di Taylor non verrà affrontato in questo corso, ma sarà argomento di corsi più avanzati.

1.3 Algebra degli o e formule di Taylor di funzioni composte

Usando le potenze di x, si può dare la seguente definizione.

Definizione 1.7 *Sia $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ e sia f una funzione definita in un intorno I di x_0, $f : I \to \mathbb{R}$. Avremo allora le seguenti possibilità:*

1. *nel caso $x_0 \in \mathbb{R}$, se esiste $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che per $a \neq 0$ si abbia*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^a} = \lambda,$$

diremo che f è infinitesima di ordine a se $a > 0$, mentre f è infinita di ordine a se $a < 0$;

2. *nel caso $x_0 = \pm\infty$, se esiste $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ed esiste $a \neq 0$ tale che il limite*

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x^a} = \lambda,$$

diremo che f è infinitesima di ordine a se $a < 0$, mentre f è infinita di ordine a se $a > 0$.

In entrambi i precedenti casi si potrà anche dire che f ha ordine a in x_0 e si scriverà $\mathrm{ord}_{x_0}(f) = a$.

Ad esempio, dal limite notevole

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1,$$

si ricava che $\operatorname{sen} x$ è infinitesima di ordine 1 in $x_0 = 0$ o anche che

$$\mathrm{ord}_0(\operatorname{sen} x) = 1,$$

mentre dal limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{1-\cos x} = 1$$

si deduce che la funzione $\frac{2}{1-\cos x}$ è infinita di ordine 2 per $x_0 = 0$ o anche che

$$\mathrm{ord}_0 \left(\frac{2}{1-\cos x} \right) = -2.$$

Abbiamo la seguente proposizione.

Proposizione 1.8 (Algebra degli o e relazioni tra o e ord) *Sia $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, siano f e g due funzioni definite in un intorno I di x_0, $f, g : I \to \mathbb{R}$ e sia $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Valgono allora le seguenti proprietà;*

1. $o_{x_0}(f) \pm o_{x_0}(f) = o_{x_0}(f)$;
2. $\lambda o_{x_0}(f) = o_{x_0}(f)$;
3. $o_{x_0}(f) o_{x_0}(g) = o_{x_0}(fg)$;
4. *se* $f \in o_{x_0}(g)$, *allora* $o_{x_0}(f) \subset o_{x_0}(g)$, $o_{x_0}(f) + o_{x_0}(g) = o_{x_0}(g)$;
5. *se* $\mathrm{ord}_{x_0}(f) = a$, *allora, se* $x_0 \in \mathbb{R}$ *si avrà* $f \in o_{x_0}((x-x_0)^b)$ *per ogni* $b < a$, *mentre se* $x_0 = \pm\infty$ *si avrà che* $f \in o_{\pm\infty}(x^b)$ *per ogni* $b > a$.

Dim. Grazie all'Osservazione 1.2, si ha che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{o_{x_0}(f) \pm o_{x_0}(f)}{f(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{o_{x_0}(f)}{f(x)} \pm \lim_{x\to x_0} \frac{o_{x_0}(f)}{f(x)} = 0,$$

da cui la 1. Analogamente,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\lambda o_{x_0}(f)}{f(x)} = \lambda \lim_{x\to x_0} \frac{o_{x_0}(f)}{f(x)}$$

da cui l'equivalenza 2. in quanto $\lambda \neq 0$. Per la 3. si nota che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{o_{x_0}(f) o_{x_0}(g)}{f(x)g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{o_{x_0}(f)}{f(x)} \lim_{x\to x_0} \frac{o_{x_0}(g)}{g(x)} = 0.$$

Per la proprietà 4. si nota che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{o_{x_0}(f)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \frac{o_{x_0}(f)}{f(x)} = 0.$$

Infine, dimostriamo la 5. solo nel caso $x_0 \in \mathbb{R}$ (essendo il caso $x_0 \pm \infty$ analago); dalla definizione di ordine, si ottiene che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^b} = \lim_{x\to x_0} (x-x_0)^{a-b} \frac{f(x)}{(x-x_0)^a} = \lambda \lim_{x\to x_0} (x-x_0)^{a-b} = 0$$

se e solo se $a > b$. $\square$

Con questi strumenti si può ad esempio calcolare il polinomio di Mac Laurin della funzione $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$ senza calcolare le sue derivate; difatti, sfruttando gli sviluppi di e^x e $\operatorname{sen} x$, si ottiene

$$\begin{aligned} e^{\operatorname{sen} x} &= e^{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)} \\ &= 1+\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2+ \\ &\quad +\frac{1}{6}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^3+o\left((x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))^3\right) \\ &= 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^3) \end{aligned}$$

da cui

$$T_3^{e^{\operatorname{sen} x}}(x) = 1+x+\frac{x^2}{2}.$$

1.4 Applicazioni della formula di Taylor

Una prima applicazione della formula di Taylor si può avere, ad esempio, nel calcolo dei limiti. Abbiamo infatti il seguente risultato.

Proposizione 1.9 *Sia $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ e siano f, f_1 e g tre funzioni definite in un intorno I di x_0, $f, f_1, g : I \to \mathbb{R}$; allora, se $f_1 \in o_{x_0}(f)$, il limite*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+f_1(x)}{g(x)}$$

esiste se e solo se esiste il limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

e vale

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+f_1(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Dim. La dimostrazione segue semplicemente osservando che

$$\frac{f(x)+f_1(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}\left(1+\frac{f_1(x)}{f(x)}\right)$$

e dal fatto che, essendo $f_1 \in o_{x_0}(f)$,

$$\lim_{x\to x_0}\left(1+\frac{f_1(x)}{f(x)}\right) = 1.$$

□

Abbiamo quindi che, se $f(x) = T^f_{n,x_0}(x)+o_{x_0}((x-x_0)^n)$ e $g(x) = T^g_{m,x_0}(x)+o((x-x_0)^m)$ con polinomi non nulli, allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{T^f_{n,x_0}(x)}{T^g_{m,x_0}(x)}$$

almeno ogni qualvolta il limite di destra non si presenti in forma indeterminata. Questa osservazione rende il calcolo dei limiti un problema più semplice, in quanto ridotto al limite di una espressione razionale. Così ad esempio

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6}}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

Così, ad esempio, se si volesse studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \operatorname{sen} \frac{1}{n} \right),$$

il limite precedente ci dice che il termine generale è asintoticamente equivalente a $\frac{1}{6n^3}$, e quindi la serie è assolutamente convergente.

Altra applicazione si può avere nello studio della convessità e nella classificazione dei punti stazionari. Supponiamo ad esempio che $f'' \geq 0$; dalla formula di Taylor con resto di Lagrange si ottiene quindi che

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)(x - x_0)^2}{2} \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

quindi il grafico di f si trova al di sopra del grafico della sua retta tangente in $(x_0, f(x_0))$. Inoltre, se x_0 è un punto stazionario e $f''(x_0) > 0$, allora dalla formula di Taylor di ordine 2 si ottiene

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o_{x_0}((x - x_0)^2)$$

e quindi

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^2} = \frac{f''(x_0)}{2} > 0$$

da cui la positività di $f(x) - f(x_0)$ in un intorno di x_0, cioè il fatto che x_0 è un punto di minimo.

Usando il polinomio di Taylor di grado superiore, si può enunciare il seguente risultato riguardante la classificazione dei punti stazionari di una funzione.

Proposizione 1.10 *Supponiamo che f sia un funzione derivabile n volte con continuità in x_0 e supponiamo che*

$$f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Allora:

1. *se n è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0$, x_0 è un punto di minimo;*
2. *se n è pari e $f^{(n)}(x_0) < 0$, x_0 è un punto di massimo;*
3. *se n è dispari, x_0 è un punto di flesso, ascendente se $f^{(n)}(x_0) > 0$, discendente se $f^{(n)}(x_0) < 0$.*

Capitolo 2

Calcolo vettoriale, topologia, limiti

Nel corso di Analisi I si sono studiate le funzioni $f : I \to \mathbb{R}$ con I sottoinsieme di $\mathbb{R}$; di tali funzioni si sono date le definizioni di continuità, derivabilità e integrabilità, si sono studiati problemi di massimo e minimo e metodi per la loro individuazione. Iniziamo ora lo studio di funzioni $f : A \to B$ con A e B sottoinsiemi di spazi Euclidei a più dimensioni; le nozioni che vorremo considerare, e cioè continuità, derivabilità e integrabilità, si basano sul concetto di limite, che si fonda sulla nozione di distanza.

Nel prossimo paragrafo inizieremo quindi lo studio delle proprietà dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$, in particolare daremo la nozione di insieme aperto e chiuso (si parla in tal caso di topologia di $\mathbb{R}^n$) ed estenderemo il concetto di intervallo ad n variabili.

Iniziamo aprendo una piccola parentesi sul calcolo vettoriale. Uno spazio vettoriale è un insieme V in cui sono definite una somma e la moltiplicazione per scalare, cioè la possibilità di poter sommare due vettori $u, v \in V$ in modo che $u+v \in V$, e poter moltiplicare un vettore $v \in V$ per uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ in modo che $\lambda v \in V$. Esempio semplice di spazio vettoriale è $\mathbb{R}$, ma possiamo anche considerare l'insieme delle funzioni continue o anche derivabili su di un intervallo di $\mathbb{R}$, cioè le funzioni

$$V = C^k(I, \mathbb{R}) = \{f : I \to \mathbb{R} : f \text{ derivabile con continuità } k \text{ volte}\}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Dire che $V = V^n$ ha dimensione n significa supporre che esistono n vettori linearmente indipendenti $e_1, \ldots, e_n \in V^n$ che generano tutto V^n, cioè tali che per ogni $v \in V^n$ siano univocamente determinati n numeri reali $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}$ in modo che

$$v = v_1 e_1 + \ldots + v_n e_n. \tag{2.1}$$

Quindi, solo una volta che viene fissata una base si può identificare V^n con $\mathbb{R}^n$, nel senso che un vettore v può essere identificato con la n–upla di numeri reali $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ che determinano v mediante la (2.1). In questo modo i vettori $e_1, \ldots, e_n$ possono essere identificati con i vettori

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \qquad e_n = (0, 0, \ldots, 1).$$

Questa identificazione non sempre è una banale osservazione, ma funziona anche con spazi di funzioni; in generale lo spazio $C^k(I, \mathbb{R})$ ha dimensione infinita per ogni $k \in \mathbb{N}$ in quanto le funzioni x^a e x^b sono tutte linearmente indipendenti se $a, b \in \mathbb{N}$, $a \neq b$. Se però consideriamo lo spazio

$$V^n = \{f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f \text{ polinomio di grado al più } n - 1\},$$

abbiamo che V^n ha dimensione n in quanto generato dalle n funzioni $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$.

Tipicamente, nel caso si lavori in $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ si denotano i vettori e_1, e_2 ed e_3 con le lettere

$$\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}, \qquad \text{o} \qquad \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}.$$

Denoteremo i punti di $\mathbb{R}^n$ con le usuali lettere x, y intendendo quindi le n–uple $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(y_1, \ldots, y_n)$, ma spesso useremo anche altre lettere quali ad esempio u, v, e w quando sarà comodo vedere gli elementi di $\mathbb{R}^n$ come vettori, oppure p, q quando vorremo precisare che sono punti dello spazio. Nel caso $n = 2$ o $n = 3$ useremo anche le notazioni (x, y) e (x, y, z); sarà sempre possibile capire dal contesto se ad esempio la lettera x denota un vettore o la coordinata di un punto (x, y).

Una volta identificato V^n con $\mathbb{R}^n$, le nozioni di somma vettoriale e prodotto per scalare sono determinate dalle analoghe operazioni componente per componente;

$$x + y = (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$

$$\lambda x = \lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

Risulta molto comodo lavorare direttamente con $\mathbb{R}^n$ e sarà questo praticamente l'unico modo di fare conti con le funzioni di più variabili; bisognerà prestare attenzione al fatto che le considerazioni che faremo non dipendano dalla scelta della base fatta [1], ma che siano effettivamente proprietà intrinseche dello spazio V^n.

2.1 Distanza e topologia

Sullo spazio $\mathbb{R}^n$ è definito il prodotto scalare standard come segue

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n;$$

si parla di spazio Euclideo ogni qual volta è definito un prodotto scalare. Tramite tale prodotto scalare si può definire la norma di un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ ponendo $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$; nel caso $n = 1$ la norma coincide con il valore assoluto di un numero reale. Si parla di versore nel caso di vettore di norma 1 mentre dato un vettore x con $\|x\| \neq 0$, si può definire il versore direzione di x come

$$\hat{x} = \frac{x}{\|x\|}.$$

Dati due vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$, essi generano al più uno spazio di dimensione 2, quindi ragionando come se fossero elementi del piano $\mathbb{R}^2$, è facile rendersi conto che

$$x \cdot y = \|x\| \|y\| \cos \vartheta, \tag{2.2}$$

dove ϑ è l'angolo tra i due vettori. Infatti, supponendo che entrambi i vettori siano non nulli altrimenti la dimostrazione è immediata, abbiamo che x e y generano uno spazio di

[1] Si tenga presente anche che generalmente in dimensione maggiore di uno si possono avere anche sistemi di riferimento diversi dalle basi vettoriali, ma si possono anche considerare coordinate non lineari, quali ad esempio le coordinate polari nel piano, cilindriche e sferiche nello spazio

dimensione 2 che possiamo identificare con $\mathbb{R}^2$; fissiamo quindi la base di $\mathbb{R}^2$ in modo che $e_1 = \hat{x}$, cioè $x = \|x\| e_1 = (\|x\|, 0)$ e $y = (y_1, y_2)$. In tal modo otteniamo che

$$x \cdot y = \|x\| y_1 = \|x\| \|y\| \cos\vartheta$$

in quanto y_1 è il cateto del triangolo rettangolo di ipotenusa $\|y\|$ e adiacente all'angolo ϑ.

La norma soddisfa le seguenti proprietà per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. positività, $\|x\| \geq 0$ con $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$;

2. omogeneità, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;

3. confronto con il valore assoluto, cioè per ogni $j = 1, \ldots, n$
$$|x_j| \leq \|x\| \leq \sqrt{n} \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|;$$

4. subadditività,
$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|;$$

5. disuguaglianze triangolari,
$$\Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leq \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Delle precedenti proprietà necessitano una dimostrazione solo gli ultimi due punti; prendendo i quadrati e tenuto conto di (2.2) abbiamo che

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 =&(x + y) \cdot (x + y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2x \cdot y \\ =&\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \|y\| \cos\vartheta \\ \leq&\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2,\end{aligned}$$

da cui la 3.. Per la 4. Notiamo che

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|,$$

cioè $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$. Scambiando i ruoli tra x e y si ottiene la prima disuguaglianza in 4., mentre la seconda segue da

$$\|x - y\| = \|x + (-y)\| \leq \|x\| + \| - y\| = \|x\| + \|y\|.$$

Una operazione tra vettori che daremo solo in $\mathbb{R}^3$ è il prodotto vettoriale [2]; dati due vettori $x, y \in \mathbb{R}^3$, si definisce prodotto vettoriale $z = x \times y$ il vettore avente come modulo l'area del parallelogramma determinato da x e y e orientato in modo che, se x e y sono

[2] Tale definizione si può dare in realtà in dimensione qualsiasi, ma necessita la nozione di forme differenziali; il prodotto vettoriale è in generale una 2–forma, che in $\mathbb{R}^3$, una volta fissato una base orientata destrorsa viene identificata in modo canonico con un vettore. Questa identificazione dipende quindi dall'orientazione che viene fissata e non è quindi una identificazione intrinseca, cambiando di segno se si cambia orientazione da destrorsa a sinistrorsa.

linearmente indipendenti, i vettori x, y e z rappresentano una base destrorsa di $\mathbb{R}^3$. Questo viene realizzato definendo

$$\begin{aligned} z = x \times y = &\det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \\ = &(x_2y_3 - x_3y_2)\mathbf{i} + (x_3y_1 - x_1y_3)\mathbf{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{k} \\ = &(x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1). \end{aligned}$$

La norma $\|\cdot\|$ definisce una distanza su $\mathbb{R}^n$, $d(x, y) = \|x-y\|$; le principali proprietà della distanza, dati $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, sono le seguenti, dirette conseguenze delle analoghe proprietà della norma;

1. positività, $d(x, y) \geq 0$ con $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
2. simmetria, $d(x, y) = d(y, x)$;
3. disuguaglianza triangolare $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Una volta definita la distanza, possiamo dare la nozione di prossimità.

Definizione 2.1 (Intorno sferico) *Si chiamano intorno sferico aperto ed intorno sferico chiuso di $x \in \mathbb{R}$ con raggio $r > 0$ gli insiemi*

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < r\}, \quad \overline{B}_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) \leq r\}$$

mentre viene detta sfera di centro x e raggio $r > 0$ l'insieme

$$S_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) = r\}.$$

Si noti che $\overline{B}_r(x) = B_r(x) \cup S_r(x)$. Nel caso in cui $x = 0$, si usa solitamente la notazione semplificata B_r, $\overline{B}_r$ e S_r; infine, nel caso $r = 1$, a volte si usa la notazione $\mathbb{S}^{n-1}$ per la sfera S_1.

Definizione 2.2 (Intorno cubico) *Si chiamano intorno cubico aperto ed intorno cubico chiuso centrato in $x \in \mathbb{R}$ e lato $2r > 0$ gli insiemi*

$$Q_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y_i - x_i| < r, \forall i = 1, \ldots, n\},$$

$$\overline{Q}_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y_i - x_i| \leq r, \forall i = 1, \ldots, n\}.$$

Esempio 2.1 Nel caso $n = 1$, si ottiene che $B_r(x) = Q_r(x) = (x - r, x + r)$, $\overline{B}_r(x) = \overline{Q}_r(x) = [x - r, x + r]$ e $S_r(x) = \{x - r, x + r\}$.

Definizione 2.3 (Insieme aperto e chiuso) *Dato $E \subset \mathbb{R}^n$ e $x \in E$, si dice che:*

1. *x è punto interno ad E se esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subset E$;*
2. *x si dice esterno ad E se x è interno ad $E^c = \mathbb{R}^n \setminus E$, cioè se esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \cap E = \emptyset$.*

Un punto x che non è né interno né esterno si dice punto di bordo *o di* frontiera. *Denoteremo con:*

1. *E° l'insieme dei punti interni ad E;*
2. *∂E l'insieme dei punti di frontiera di E;*
3. *$\overline{E} = E \cup \partial E$ la chiusura di E.*

Diremo infine che

1. *E è aperto se $E = E^\circ$, cioè se tutti i suoi punti sono punti interni;*
2. *E è chiuso se $\overline{E} = E$ o equivalentemente se $E^c = \mathbb{R}^n \setminus E$ è aperto, che equivale a dire che $\partial E \subset E$.*

Esempio 2.2 Possiamo fornire i seguenti esempi.

1. Se fissiamo $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, allora (a, b) è aperto, $[a, b]$ è chiuso e $(a, b]$, $[a, b)$ non sono né aperti né chiusi; in tutti i casi l'insieme dei punti di frontiera è dato da $\{a, b\}$.
2. $E = \mathbb{R}^n$ è aperto, così come $E^c = \partial E = \emptyset$ è aperto. Quindi $\mathbb{R}^n$ è sia aperto che chiuso; questo è l'unico insieme di $\mathbb{R}^n$ con tale proprietà.
3. Con $E = \mathbb{Q}$ abbiamo che $E^\circ = \emptyset$, $\overline{E} = \partial E = \mathbb{R}$; quindi $\mathbb{Q}$ non è né aperto né chiuso.
4. Infine, se $E = B_r(x)$, $E^\circ = B_r(x)$, $\overline{E} = \overline{B}_r(x)$ e $\partial E = S_r(x)$.
   Dimostrazione. Preso $y \in B_r(x)$, scegliendo $\varepsilon = r - \|y - x\|$ e preso $z \in B_\varepsilon(y)$, cioè se $\|z - y\| < r - \|y - x\|$, si ottiene che
   $$\|z - x\| = \|z - y + y - x\| \leq \|z - y\| + \|y - x\| < r - \|y - x\| + \|y - x\| = r,$$
   cioè $z \in B_r(x)$ e quindi $B_\varepsilon(y) \subset B_r(x)$, che dimostra che $B_r(x)^\circ = B_r(x)$. Analogamente, se $\|y - x\| > r$, si nota che con la scelta $\varepsilon = \|y - x\| - r$ si ottiene che $B_\varepsilon(y) \cap B_r(x) = \emptyset$, cioè $B_\varepsilon(y) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_r(x)$, e quindi $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_r(x)$ è aperto. Infine, se $\|y - x\| = r$, si nota che per ogni $\varepsilon > 0$ la palla $B_\varepsilon(y)$ interseca sia $B_r(x)$ che il suo complementare, e quindi i punti y tali che $\|y - x\| = r$ sono punti di frontiera. □

Per la nozione di limite è utile anche il concetto di punto di accumulazione.

Definizione 2.4 *Dato un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$, diremo che un punto x_0 è di* accumulazione *per E se per ogni $r > 0$, la palla $B_r(x_0)$ contiene punti di E diversi da x_0, cioè se*

$$B_r(x_0) \cap (E \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset.$$

Un punto di accumulazione x_0 può appartenere o meno all'insieme E, ma ci sono anche punti di un insieme che non sono punti di accumulazione; si pensi ad esempio all'insieme della retta reale $E = (0, 1] \cup \{2\}$, in cui 2 non è un punto di accumulazione, mentre 0 lo è anche se non appartiene ad E. Un punto di E che non sia di accumulazione per E viene detto punto *isolato*. In questo modo si trova che i punti di accumulazione per E sono dati dai punti di $\overline{E}$ che non sono isolati.

Nella seguente proposizioni sono elencate le principali proprietà degli aperti e dei chiusi sotto le operazioni di unione e intersezione; tali proprietà sono le proprietà che definiscono una topoologia, cioè una famiglia di insiemi con buone proprietà per unione ed intersezione. [3]

[3] Una topologia in uno spazio Ω (nel nostro caso $\Omega = \mathbb{R}^n$ è una famiglia $\mathscr{T}$ di sottoinsiemi di Ω chiusa per unioni arbitrarie ed intersezioni finite tale che Ω e $\emptyset$ appartengono a $\mathscr{T}$. Quindi la famiglia degli insiemi aperti di $\mathbb{R}^n$ è una topologia, mentre gli insiemi chiusi definiscono una topologia passando ai complementari.

Proposizione 2.5 *Supponiamo di avere due famiglie, una $\mathcal{A}$ fatta di insiemi aperti e una $\mathcal{C}$ fatta di insiemi chiusi. Allora*

1. *l'insieme*
$$\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = \{x \in \mathbb{R}^n : x \in A \text{ per qualche } A \in \mathcal{A}\}$$
è aperto, mentre l'insieme
$$\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C = \{x \in \mathbb{R}^n : x \in C \text{ per ogni } C \in \mathcal{C}\}$$
è chiuso;

2. *dato un numero finito di insiemi $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$ e $C_1 \dots, C_m \in \mathcal{C}$, l'insieme*
$$A_1 \cap \ldots \cap A_k$$
è aperto, mentre l'insieme
$$C_1 \cup \ldots \cup C_m$$
è chiuso.

Dimostrazione. Se $x \in A$ per un qualche A, allora, dato che A è aperto, esiste $r > 0$ tale che
$$B_r(x) \subset A \subset \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$$
da cui il fatto che l'unione qualsiasi di insiemi aperti è aperta. Sia poi $x \in A_1 \cap \ldots \cap A_k$; dato che ogni A_j, $j = 1, \dots, k$, è aperto, esistono $r_j > 0$ tali che $B_{r_j}(x) \subset A_j$ per ogni $j = 1, \dots, k$. Scegliendo $r = \min_j r_j$, si ottiene che $B_r(x) \subset A_1 \cap \ldots \cap A_k$, e quindi tale intersezione è aperta. Le proprietà sui chiusi si ottengono osservando che se C è chiuso, allora $A = \mathbb{R}^n \setminus C$ è aperto. □

Osservazione 2.6 Si nota che intersezione arbitraria di insiemi aperti non è in genere aperta; infatti, ad esempio in $\mathbb{R}$, se si considerano gli insiemi aperti $A_j = (-1/(j+1), 1/(j+1))$, si ottiene che
$$\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j = \{0\}$$
e quest'ultimo non è un insieme aperto.

Definizione 2.7 (Insiemi limitati e insiemi compatti) *Un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ si dice limitato se esiste $r > 0$ tale che $E \subset B_r(0)$, cioè se esiste $r > 0$ tale che $\|x\| < r$ per ogni $x \in E$. Un insieme E viene detto compatto se è chiuso e limitato.*

Osservazione 2.8 La definizione di limitatezza di un insieme E può anche essere data richiedendo che esista $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$ tale che $E \subset B_r(x_0)$; la definizione non cambia se al posto degli intorni sferici aperti si considerano gli intorni sferici chiusi e anche gli intorni cubici aperto o chiusi. Osserviamo inoltre che la definizione di insieme compatto sarebbe in realtà più topologica, mentre la caratterizzazione dei compatti come insiemi chiusi e limitati è un risultato che vale per gli spazi euclidei finito–dimensionali. La definizione topologica di compattezza dice che: E è compatto se da ogni ricoprimento aperto
$$E \subset \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$$

si può scegliere un sottoricoprimento finito, cioè esistono $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ tali che

$$E \subset A_1 \cup \ldots \cup A_k.$$

Esiste anche, come vedremo, una caratterizzazione della compattezza fatta usando le successioni.

2.2 Successioni

Una successione in $\mathbb{R}^n$ è una funzione $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$, cioè una famiglia $(x(h) = x_h)_{h\in\mathbb{N}}$ di elementi di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 2.9 *Una successione $(x_h)_{h\in\mathbb{N}}$ si dice:*

1. *limitata se l'insieme*
$$E = \{x_h : h \in \mathbb{N}\}$$
è limitato in $\mathbb{R}^n$, cioè se esiste $r > 0$ tale che $\|x_h\| < r$ per ogni $h \in \mathbb{N}$;

2. *convergente ad un elemento $x \in \mathbb{R}^n$, e scriveremo*
$$\lim_{h\to+\infty} x_h = x,$$
se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $h_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\|x_h - x\| < \varepsilon$ per ogni $h > h_0$.

Si nota che, se la successione $(x_h)_{h\in\mathbb{N}}$ è convergente, allora è limitata; inoltre, scrivendo $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $x_h = (x_{h,1}, \ldots, x_{h,n})$, da

$$|x_{h,j} - x_j| \le \|x_h - x\| \le \sqrt{n} \max_{i=1,\ldots,n} |x_{h,i} - x_i|, \qquad \forall j = 1, \ldots, n,$$

se ne deduce che una successione $(x_h)_{h\in\mathbb{N}}$ è convergente ad x se e solo se le successioni delle sue componenti $(x_{h,j})_{h\in\mathbb{N}}$ convergono a x_j per ogni $j = 1, \ldots, n$. Questo fatto implica in particolare che:

1. il limite è unico, dato che il limite di ogni componente è unico;

2. date due successioni $(x_h)_{h\in\mathbb{N}}$ e $(y_h)_{h\in\mathbb{N}}$ convergenti rispettivamente ad x ed y in $\mathbb{R}^n$, allora la successione $(x_h + y_h)_{h\in\mathbb{N}}$ converge a $x + y$;

3. se $(x_h)_{h\in\mathbb{N}}$ converge ad $x \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $(\lambda x_h)_{h\in\mathbb{N}}$ converge a λx.

Esempio 2.3 Consideriamo le seguenti successioni in $\mathbb{R}^2$:

1. se definiamo
$$x_h = \left(\frac{1}{h}, \frac{h+1}{h}\right),$$
dato che la prima componente, $\frac{1}{h}$, converge a 0 e la seconda, $\frac{h+1}{h}$, converge ad 1, si avrà che la successione converge al punto $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$;

2. se definiamo
$$x_h = \left((-1)^h, \frac{1}{h}\right)$$
non può convergere in quanto la successione delle prime componenti, $(-1)^h$, non converge.

La definizione di successione estratta sarà data in modo analogo alla definizione di successione estratta in $\mathbb{R}$, e cioè tramite una funzione $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ crescente, da cui la successione estratta $(x_{h_k})_{h\in\mathbb{N}}$ è data da $x_{h_k} = x_{k(h)}$.

Proposizione 2.10 (Chiusi e compatti per successioni) *Dato un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$, si ha che:*

1. *E è chiuso se e solo se per ogni successione $(x_h)_{h\in\mathbb{N}} \subset E$ con x_h convergente ad x, si ha che $x \in E$;*
2. *E è compatto se e solo se da ogni successione $(x_h)_{h\in\mathbb{N}} \subset E$ si può estrarre una sottosuccessione $(x_{h_k})_{h\in\mathbb{N}}$ convergente ad un elemento di $x \in E$;*
3. *un punto $x \in \mathbb{R}^n$ è un punto di accumulazione per E se e solo se esiste una successione $(x_h)_{h\in\mathbb{N}} \subset E$ con $x_h \neq x$ per ogni $h \in \mathbb{N}$ e tale che x_h converge a x.*

Dimostrazione.

1. Sia $(x_h)_{h\in\mathbb{N}} \subset E$ una successione convergente ad x; quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $h_0 \in \mathbb{N}$ tale che per $h > h_0$, $\|x_h - x\| < \varepsilon$, cioè $x_h \in B_\varepsilon(x)$. Dato che $x_h \in E$ per ogni $h \in \mathbb{N}$, abbiamo mostrato che $B_\varepsilon(x) \cap E \neq \emptyset$ per ogni $\varepsilon > 0$, cioè $x \in \overline{E} = E$ in quanto E chiuso.

   Viceversa, supponiamo per assurdo che E non sia chiuso, cioè esiste $x \in \partial E \setminus E$; quindi per ogni $r > 0$, $B_r(x) \cap E \neq \emptyset$. Prendendo $r = 1/h$, ne deduciamo l'esistenza di un elemento $x_h \in B_r(x) \cap E$, cioè la possibilità di costruire una successione $(x_h)_{h\in\mathbb{N}} \subset E$ convergente ad x, e questo contraddice l'ipotesi.
2. Supponiamo E compatto, quindi contenuto in un cubo $\overline{Q}_r$ di lato $2r$. Prendiamo una successione $(x_h)_{h\in\mathbb{N}} \subset E$ e supponiamo $x_h \neq x_k$ per $h \neq k$; cioè si può fare scartando gli elementi uguali, e quindi a meno di sottosuccessioni, se la successione x_h assume infiniti valori differenti. In caso contrario, la successioni deve assumere un dato valore x_0 infinite volte e quindi definendo
$$k(h) = \{h \in \mathbb{N} : x_h = x_0\},$$
   abbiamo trovato una sottosuccessione che converge a $x_0 \in E$. Quindi, se suddividiamo $\overline{Q}_r$ in 2^n cubi di lato r, abbiamo che infiniti valori di x_h devono appartenere ad uno di tali cubi, che denotiamo con $\overline{Q}_1$; definiamo anche
$$k(1) = \min\{h \in N : x_h \in \overline{Q}_1\}.$$
   Possiamo ricorsivamente definire i cubi $\overline{Q}_h$, che avranno quindi lato $r/2^h$, suddividendo $\overline{Q}_{h-1}$ in 2^n in modo che infiniti elementi della successione appartengano a $\overline{Q}_h$ e
$$k(h) = \min\{h > k(h-1) : x_h \in \overline{Q}_h\}.$$
   I cubetti sono uno contenuto nel precedente e i lati tendono a zero, $r/2^h \to 0$. Avremo inoltre che
$$\bigcup_{h\in\mathbb{N}} \overline{Q}_h = \{x_0\}$$
   e la successione x_{h_k} converge a x_0. Il fatto che $x_0 \in E$ deriva dal fatto che E è chiuso.

Viceversa, l'insieme E deve essere limitato altrimenti per ogni $h \in \mathbb{N}$ potremmo trovare un elemento $x_h \in E \setminus B_h$ e quindi costruire una successione $(x_h)_{h\in\mathbb{N}}$ con $\|x_h\| \geq h$ da cui non si potrebbe estrarre alcuna successione convergente. Per la chiusura si ragiona come nella seconda parte della dimostrazione del punto 1.

3. La dimostrazione di quest'ultimo punto è facile ed è lasciata come esercizio.

□

2.3 Limiti

Veniamo ora allo studio delle funzioni di più variabili, e più precisamente alla definizione di limite e continuità per funzioni di più variabili.

Definizione 2.11 *Data una funzione $f : E \to \mathbb{R}^k$ con $E \subset \mathbb{R}^n$ e x_0 punto di accumulazione per E, diremo che $f(x)$ tende ad un vettore $l \in \mathbb{R}^k$ per x che tende ad x_0, in simboli*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l, \tag{2.3}$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $x \in E$ è tale che $0 < \|x - x_0\| < \delta$, allora $\|f(x) - l\| < \varepsilon$. Nel caso $k = 1$, diremo inoltre che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad (-\infty)$$

se per ogni $M > 0$ ($M < 0$) esiste $\delta > 0$ tale che se $x \in E$ soddisfa $0 < \|x - x_0\| < \delta$, allora $f(x) > M$ ($f(x) < M$).

Come nel caso di limiti per successioni, anche in questo caso avremo la validità di (2.3) se e solo se per ogni $j = 1, \ldots, n$

$$\lim_{x\to x_0} f_j(x) = l_j.$$

Quindi il calcolo dei limiti si farà componente per componente.

Abbiamo la seguente utile proposizione, che riduce lo studio dei limiti allo studio di limiti di successioni.

Proposizione 2.12 *Data $f : E \to \mathbb{R}^k$ e x_0 punto di accumulazione per E, abbiamo che*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \tag{2.4}$$

se e solo se per ogni successione $(x_h)_{h\in\mathbb{N}}$ convergente a x_0, la successione $f(x_h)_{h\in\mathbb{N}}$ converge ad l.

Dimostrazione. Supponiamo che valga la (2.4) e prendiamo una qualsiasi successione x_h che converge a x_0. Questo significa che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $0 < \|x - x_0\| < \delta$ implica $\|f(x) - l\| < \varepsilon$; dato un tale δ, la convergenza di x_h ad x_0 implica che esiste $h_0 \in \mathbb{N}$ per cui $\|x_h - x_0\| < \delta$ se $h \geq h_0$, da cui $\|f(x_h) - l\| < \varepsilon$, cioè il fatto che la successione $f(x_h)$ è convergente con limite l.
Viceversa, dimostriamo l'implicazione inversa; facciamo la dimostrazione per assurdo, supponendo cioè che non valga (2.4). Questo vuol dire che esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ esiste un x_δ con $0 < \|x_\delta - x_0\| < \delta$ e $\|f(x_\delta) - l\| > \varepsilon$. Prendendo $\delta = 1/h$ abbiamo costruito una successione x_h con $0 < \|x_h - x_0\| < 1/h$, cioè x_h convergente ad x_0, tale che $\|f(x_h) - l\| > \varepsilon$, cioè la successione $f(x_h)$ non può convergere a l, e questo è un assurdo. □

Come visto per le successioni, anche per il limite di funzioni valgono le seguenti proprietà;

1. $f(x) \to l \in \mathbb{R}^k$ se e solo se per ogni $j = 1, \dots k$ si ha che $f_j(x) \to l_j$;
2. se $f(x) \to l$ e $g(x) \to l'$, allora $f(x) + g(x) \to l + l'$ (a meno di forme indeterminate);
3. se $f(x) \to l$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $\lambda f(x) \to \lambda l$.

Capitolo 3

Calcolo infinitesimale per le curve

Iniziamo lo studio delle funzioni vettoriali di più variabili con il caso più semplice; tale studio ci permetterà di sviluppare strumenti e concetti utili per un approccio sistematico al caso generale. Cominceremo con lo studiare le curve dello spazio Euclideo, cioè funzioni vettoriali di una sola variabile reale; le curve per noi saranno entità parametrizzate (saranno le funzioni che le definiscono), ma vedremo quali informazioni geometriche sul luogo dei suoi punti (traiettorie) si possono dedurre dalla parametrizzazione.

Da quanto visto nel capitolo precedente, considerare una funzione $r : I \to \mathbb{R}^n$ con $I \subset \mathbb{R}$ equivale a considerare n funzioni $r : I \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$,

$$r(t) = (r_1(t), \ldots, r_n(t)).$$

La nozione di limite e di continuità su r si traduce nelle analoghe nozioni per le funzioni r_i, che sono quindi le usuali nozioni di limite e continuità per funzioni reali di variabile reale. Diremo quindi che r è continua in un punto $t_0 \in I$ se sono continue in t_0 tutte le funzioni r_i.

3.1 Curve e curve regolari

Una curva in $\mathbb{R}^n$ è data da una funzione continua $r : I \to \mathbb{R}^n$ con I intervallo di $\mathbb{R}$, limitato o meno (non necessariamente aperto o chiuso). La richiesta della continuità nella definizione di curva serve per sottolineare che la variare di $t \in I$, il punto $r(t)$ si muove nello spazio $\mathbb{R}^n$ con continuità, descrivendo cioè una traiettoria continua. Si definisce il supporto o sostegno di r l'insieme

$$r(I) = \{r(t) : t \in I\} \subset \mathbb{R}^n :$$

il sostegno di una curva non va confuso con il grafico della curva, il quale è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $I \times \mathbb{R}^n$.

Esempio 3.1

Retta e Segmento. Dati due punti x e y in $\mathbb{R}^n$, la retta passante per essi è parametrizzata da $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$$r(t) = x + t(y - x).$$

Se si usa la stessa parametrizzazione ma definita in $[0,1]$, si ottiene il segmento, che denoteremo con $[x,y]$, congiungente x e y; tale segmento è un segmento orientato che parte da x (tempo $t=0$) e termina in y (tempo $t=1$). Se denotiamo con $v=y-x$, troviamo che

$$r(t)=x+tv;$$

se si utilizza questa notazione si sta sottolineando che il segmento (semiretta o retta) individuato da r passa per il punto x e viene percorso in direzione v.

Unione di due segmenti. Dati tre punti distinti $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}^n$, possiamo definire la curva unione di $[x_1,x_2]$ e $[x_2,x_3]$ in vari modi; ad esempio possiamo definire $r:[0,2]\to\mathbb{R}^n$,

$$r(t)=\begin{cases} x_1+t(x_2-x_1) & t\in[0,1]\\ x_2+(t-1)(x_3-x_2) & t\in[1,2].\end{cases}$$

Analogamente potremmo considerare $\tilde r:[0,1]\to\mathbb{R}^n$ data da

$$\tilde r(t)=\begin{cases} x_1+2t(x_2-x_1) & t\in[0,1/2]\\ x_2+(2t-1)(x_3-x_2) & t\in[1/2,1];\end{cases}$$

come vedremo in seguito, queste due definizioni sono equivalenti tra loro, nel senso che specificheremo.

Poligonale. Data una collezione ordinata di punti $x_0,x_1,\dots,x_k\in\mathbb{R}^n$ di punti, si definisce poligonale $\mathscr{P}$ di vertici $x_0,\dots,x_k$ l'unione dei segmenti $[x_{i-1},x_i]$, $i=1,\dots,k$ parametrizzata quindi dalla curva $r:[0,1]\to\mathbb{R}^n$

$$r(t)=x_{i-1}+\left(kt-\frac{i-1}{k}\right)(x_i-x_{i-1}),\qquad \frac{i-1}{k}\le t\le\frac{i}{k}.$$

Circonferenza nel piano. Nel piano, la circonferenza di raggio $R>0$ centrata nell'origine può essere parametrizzata dalla funzione $r:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$

$$r(t)=(R\cos t,R\operatorname{sen}t).$$

Ellisse nel piano. L'ellisse del piano $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ può essere parametrizzata dalla funzione $r:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$

$$r(t)=(a\cos t,b\operatorname{sen}t).$$

Si fissi ora un punto $t_0\in I$ e si consideri, per $t_1\in I$, la quantità

$$\frac{r(t_1)-r(t_0)}{t_1-t_0}=\left(\frac{r_1(t_1)-r_1(t_0)}{t_1-t_0},\dots,\frac{r_n(t_1)-r_n(t_0)}{t_1-t_0}\right).$$

Avremo quindi che il limite

$$\lim_{t_1\to t_0}\frac{r(t_1)-r(t_0)}{t_1-t_0}=r'(t_0)$$

esiste se e solo se esistono i limiti

$$\lim_{t_1\to t_0}\frac{r_i(t_1)-r_i(t_0)}{t_1-t_0}$$

per ogni $i = 1, \ldots, n$, cioè se e solo se le componenti della curva sono funzioni derivabili. Diremo quindi che la curva è derivabile in t_0 se le sue componenti lo sono, mentre diremo che $r \in C^1(I)$ se le sue componenti sono derivabili con derivata continua in I.

Per quanto abbiamo visto, l'equazione

$$r_{t_1}(t) = r(t_0) + t\frac{r(t_1) - r(t_0)}{t_1 - t_0}$$

rappresenta la retta passante per $r(t_0)$ e $r(t_1)$, cioè la retta secante il sostegno di r in tali punti. Se passiamo al limite per $t_1 \to t_0$, tale retta tende alla tangente al supporto di r nel punto $r(t_0)$, che sarà quindi individuata dalla parametrizzazione

$$r(t) = r(t_0) + tr'(t_0).$$

Il vettore $r'(t_0)$ rappresenta la velocità della curva in t_0 e, nel caso $r'(t_0) \neq 0$, il vettore unitario

$$\hat{\tau}_r(t_0) = \frac{r'(t_0)}{\|r'(t_0)\|}$$

rappresenta il versore tangente alla curva in $r(t_0)$. Useremo anche la nozione di velocità scalare per indicare la quantità $v(t) = \|r'(t)\|$ e velocità vettoriale per $\vec{v}(t) = r'(t)$.

Definizione 3.1 *Data una curva $r : I \to \mathbb{R}^n$, diremo che:*

1. *r è regolare se $r \in C^1(I)$ con $r'(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$;*

2. *r è regolare a tratti se possiamo decomporre I in sottointervalli disgiunti I_i con $i = 1, \ldots, k$ in modo tale che r sia regolare in I_i per ogni $i = 1, \ldots, k$;*

3. *la curva si dice* semplice *se $t_1 \neq t_2$ implica $r(t_1) \neq r(t_2)$, con almeno uno dei due punti t_1 o t_2 interno ad I;*

4. *se $I = [a, b]$, il punto $r(a)$ si dice primo estremo o punto iniziale della curva, mentre $r(b)$ si dice secondo estremo o punto finale della curva;*

5. *se $I = [a, b]$, la curva si dice chiusa se $r(a) = r(b)$.*

Vedremo che si potrà sempre ottenere la condizione $r \neq 0$ nella definizione di curva regolare: qui è stata posta per una semplice questione di comodità. La definizione di curva semplice può sembrare complicata, ma serve semplicemente per ammettere anche curve chiuse semplici, quali la circonferenza, in cui gli unici due punti di non iniettività della curva sono gli estremi.

Definizione 3.2 (Curve equivalenti) *Due curve $r : I \to \mathbb{R}^n$ e $\tilde{r}i : J \to \mathbb{R}^n$ si dicono equivalenti se esiste una funzione $\alpha : I \to J$ di classe $C^1(I)$ iniettiva e suriettiva tale che $\alpha'(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$ e*

$$r(t) = \tilde{r}(\alpha(t)), \qquad \forall t \in I.$$

La mappa α viene anche chiamata cambiamento di parametro o riparametrizzazione ammissibile.

L'equivalenza di due curve implica l'uguaglianza dei due sostegni, mentre il viceversa non è vero; ad esempio le due funzioni $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ e $\tilde{r} : [0, 3\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\tilde{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ hanno lo stesso sostegno ma non sono equivalenti. Per poter caratterizzare curve equivalenti tramite il sostegno, bisogna restringersi alla classe delle curve semplici. Abbiamo cioè il seguente risultato.

Proposizione 3.3 *Siano $r : I \to \mathbb{R}^n$ e $\tilde{r} : J \to \mathbb{R}^n$ due curve regolari e semplici; allora le due curve sono equivalenti se e solo se hanno lo stegno sostegno, cioè se e solo se*

$$r(I) = \tilde{r}(J).$$

Dimostrazione. Si costruisce la riparametrizzazione come segue; supponiamo che $I = [a, b]$ e $J = [c, d]$ e supponiamo che le curve non siano chiuse (altrimenti si ragiona su intervalli del tipo $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$). Per $t \in I$, abbiamo che $r(t) \in r(I) = \tilde{r}(J)$. Esiste quindi $s \in J$ tale che $\tilde{r}(s) = r(t)$. Tale s è unico e definiamo quindi $s := \alpha(t)$. La mappa $\alpha : [a, b] \to [c, d]$ così definitia è iniettiva e suriettiva. Si dimostra anche che α è continua e derivabile con continuità, anche se la dimostrazione non è immediata. □

Si noti che la condizione $\alpha' \neq 0$ implica che $\alpha' > 0$ oppure $\alpha' < 0$; quindi α è sempre strettamente monotona. Nel caso in cui α sia monotona crescente, avremo che due curve equivalenti avranno lo stesso verso di percorrenza, mentre nel caso di α decrescente, il loro verso di percorrenza sarà opposto.

Esempio 3.2

1. Una riparametrizzazione per una curva $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ è data ad esempio da

$$\alpha : [a, b] \to [0, 1], \qquad \alpha(t) = \frac{t - a}{b - a}.$$

Non sarà quindi restrittivo supporre sempre una curva definita sull'intervallo $[0, 1]$, almeno nel caso in cui I sia un intervallo chiuso e limitato.

2. L'arco di circonferenza $r : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$

$$r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

può essere equivalentemente riparametrizzata da $\tilde{r} : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$

$$\tilde{r}(t) = (t, \sqrt{1 - t^2}).$$

In questo caso cercare una riparametrizzazione significa cercare una funzione $\alpha : [-1, 1] \to [0, \pi]$ tale che $r(\alpha(t)) = \psi(t)$, cioè

$$(\cos \alpha(t), \operatorname{sen} \alpha(t)) = (t, \sqrt{1 - t^2}).$$

Troviamo quindi che $\alpha(t) = \arccos t$; tale riparametrizzione è derivabile per $t \in (-1, 1)$ e $\alpha'(t) = -1/\sqrt{1 - t^2}$, cioè cambia l'orientamento della curva.

3.1.1 Curve nel piano

La geometria del piano permette di vedere le curve in vari modi. Ad esempio, se viene data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ continua reale di variabile reale, allora possiamo definire in modo canonico due curve parametrizzate $r_x : I \to \mathbb{R}^2$, $r_y : I \to \mathbb{R}^2$

$$r_x(t) = (t, f(t)), \qquad r_y(y) = (f(t), t),$$

dette curve cartesiane rispettivamente rispetto ad x e rispetto ad y definite dalla funzione f. In tal caso il sostegno delle curve r_x e r_y coincide con il grafico della funzione f, grafico rispettivamente in x e in y. Le curve date sono regolari se e solo se f è di classe $C^1(I)$ ed in tal caso, avendosi

$$r_x'(t) = (1, f'(t)), \qquad r_y'(y) = (f'(t), 1)$$

la condizione $r' \neq 0$ è automaticamente verificata.

Viceversa, se si vuole vedere una curva parametrizzata $r : I \to \mathbb{R}^2$ come una curva cartesiana, si dovrà richiedere che r sia una curva semplice e che il sostegno di r sia un grafico, cioè che l'intersezione del sostegno con rette verticali (nel caso di curva cartesiana rispetto alla x) contenga al più un punto, mentre l'intersezione con rette orizzontali (nel caso cartesiano rispetto alla y) contenga al più un punto.

Un altro modo per definire una curva nel piano è tramite l'utilizzo delle coordinate polari; in tal caso esistono sostanzialmente due approcci, il metodo esplicito e quello parametrico.

Per metodo esplicito si intende il caso in cui nell'utilizzo delle coordinate polari (r, ϑ), il raggio r sia una funzione esplicita dell'angolo ϑ, cioè $r = g(\vartheta)$, $g : [\vartheta_1, \vartheta_2] \to [0, +\infty)$. In questo caso, si può definire una curva parametrizzata $r : [\vartheta_1, \vartheta_2] \to \mathbb{R}^2$ ponendo

$$r(\vartheta) = (r \cos\vartheta, r \operatorname{sen}\vartheta) = g(\vartheta)(\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta); \tag{3.1}$$

derivando, si ottiene

$$r'(\vartheta) = (g'(\vartheta)\cos\vartheta - g(\vartheta)\operatorname{sen}\vartheta, g'(\vartheta)\operatorname{sen}\vartheta + g(\vartheta)\cos\vartheta). \tag{3.2}$$

La curva data sarà regolare se e solo se g è di classe $C^1([\vartheta_1, \vartheta_2])$.

Per metodo parametrico si intende il caso in cui sia r che ϑ sono funzioni di un parametro $t \in I$

$$\begin{cases} r = r(t) \\ \vartheta = \vartheta(t). \end{cases}$$

In tal caso si ottiene la curva parametrizzata $r : I \to \mathbb{R}^2$

$$r(t) = (r(t)\cos\vartheta(t), r(t)\operatorname{sen}\vartheta(t));$$

derivando, si ottiene anche che

$$r'(t) = (r'(t)\cos\vartheta(t) - r(t)\vartheta'(t)\operatorname{sen}\vartheta(t), r'(t)\operatorname{sen}\vartheta(t) + r(t)\vartheta'(t)\cos\vartheta(t)).$$

3.2 Lunghezza, ascissa curvilinea e integrali curvilinei

In questa sezione diamo la definizione di lunghezza di una curva e forniamo un metodo di calcolo, almeno nel caso di curve regolari. La prima osservazione è che, dati due punti $x, y \in \mathbb{R}^n$, la distanza tra essi coincide con la lunghezza del segmento che li unisce, cioè

$$l([x, y]) = \|x - y\|.$$

Analogamente, data una poligonale $\mathscr{P}$ di vertici $x_0, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$, possiamo definire la lunghezza della poligonale ponendo

$$l(\mathscr{P}) = \sum_{i=1}^{k} \|x_i - x_{i-1}\|.$$

Infine, data una curva $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, una poligonale inscritta in r è una scelta crescente di istanti $a \leq t_0 < \ldots < t_k \leq b$ che individuano la poligonale $\mathscr{P}$ di vertici definiti da

$$x_i = r(t_i), \qquad i = 0, \ldots, k.$$

Definizione 3.4 (Lunghezza di una curva) *Data $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ curva parametrizzata, si definisce lunghezza di r la quantità*

$$l(r, [a, b]) = \sup\{l(\mathscr{P}) : \mathscr{P} \text{ poligonale inscritta in } r\}. \tag{3.3}$$

Nel caso in cui sia $r : I \to \mathbb{R}^n$, con I intervallo generico, si procede con un metodo di esaustione, nel senso che si calcola la lunghezza sugli intervalli $[a, b] \subset I$ e si invade I con tali intervalli.

Diremo che la curva r è rettificabile in I se ha lunghezza finita, cioè se $l(r, I) < +\infty$.

Una proprietà importante della definizione della lunghezza di una curva $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ è che se $c \in (a, b)$, allora

$$l(r, [a, b]) = l(r, [a, c]) + l(r, [c, b]).$$

In particolare, la funzione $s : [a, b] \to l(r, [a, b])$ definita da

$$s(t) = l(r, [a, t])$$

è una funzione monotona crescente. Tale funzione prende il nome di *ascissa curvilinea*, oppure *parametro o lunghezza d'arco*. Per il calcolo della lunghezza di una curva abbiamo la Proposizione 3.6, valida nel caso di curve regolari. Prima di enunciare e dimostrare tale proposizione, introduciamo e dimostriamo alcune proprietà dell'integrazione per curve. Se $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ è una curva, possiamo definire il suo integrale ragionando componente per componente;

$$\int_a^b r(t)dt := \left(\int_a^b r_1(t)dt, \ldots \int_a^b r_n(t)dt \right).$$

Per tale integrale vale la seguente proprietà, che enunciamo come Lemma.

Lemma 3.5 *Sia $r : [a, b] \to \mathbb{R}$ una curva; allora*

$$\left\| \int_a^b r(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|r(t)\|dt.$$

Dimostrazione. La continuità della funzione r implica che il suo integrale può essere ottenuto come limite delle somme di Riemann

$$\sum_{j=1}^{k-1} r(t_j)(t_{j+1} - t_j),$$

con $a \leq t_0 < \ldots < t_k \leq b$ suddivisione dell'intervallo $[a, b]$. Per la disuguaglianza triangolare della norma, si ottiene che

$$\left\| \sum_{j=1}^{k-1} r(t_j)(t_{j+1} - t_j) \right\| \leq \sum_{j=1}^{k-1} \|r(t_j)\|(t_{j+1} - t_j).$$

Passando al limite sulle somme di Riemann con

$$\max_{j=1,\ldots,k-1} (t_{j+1} - t_j) \to 0,$$

il lemma risulta dimostrato. □

Notiamo infine, che ragionando componente per componente, nel caso in cui $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ sia una curva regolare, vale ancora il Teorema fondamentale del calcolo integrale, cioè

$$\int_a^b r'(t)dt = r(b) - r(a).$$

Proposizione 3.6 *Sia $r : I \to \mathbb{R}^n$ una curva regolare a tratti; allora*

$$l(r, I) = \int_I \|r'(t)\|dt.$$

In particolare, per l'ascissa curvilinea si ha

$$\frac{ds(t)}{dt} = \|r'(t)\|,$$

mentre la curva $\tilde{r} : [0, l(r, I)] \to \mathbb{R}^n$ definita da

$$\tilde{r}(s) = \tilde{r}(s(t)) := r(t)$$

è una riparametrizzazione equivalente di r con

$$\left\| \frac{d\tilde{r}(s)}{ds} \right\| = 1.$$

Dim. Supponiamo per comodità $I = [a, b]$ e $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ regolare; il caso generale si ottiene per additività ed invadendo un intervallo generico I con intervalli chiusi e limitati. Dimostriamo quindi che la funzione lunghezza d'arco

$$s(t) = l(r, [a, t])$$

è derivabile con $s'(t) = \|r'(t)\|$. Se consideriamo i punti t e $t + h$, $h > 0$, è facile rendersi conto che

$$\|r(t + h) - r(t)\| \leq s(t + h) - s(t) = l(r, [t, t + h]), \tag{3.4}$$

dato che t e $t + h$ definiscono una particolare partizione dell'intervallo $[t, t + h]$. Sia ora $\mathscr{P}$ una poligonale generica individuata da una partizione $t_0, \ldots, t_k$ di $[t, t + h]$; grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale, otteniamo

$$\begin{aligned} l(r, \mathscr{P}) &= \sum_{i=1}^{k} \|r(t_i) - r(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^{k} \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} r'(\tau)d\tau \right\| \leq \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|r'(\tau)\|d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t_k} \|r'(\tau)\|d\tau \leq \int_t^{t+h} \|r'(\tau)\|d\tau. \end{aligned}$$

Passando all'estremo superiore su tutte le partizioni:

$$s(t+h) - s(t) = l(r, [t, t+h]) \leq \int_t^{t+h} \|r'(\tau)\| d\tau. \tag{3.5}$$

Combinando (3.4) e (3.5), si ottiene infine:

$$\left\| \frac{r(t+h) - r(t)}{h} \right\| \leq \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|r'(\tau)\| d\tau;$$

Passando al limite $h \to 0^+$, dal fatto che r è derivabile con continuità si ottiene che

$$\exists \lim_{h \to 0^+} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \|r'(t)\|.$$

Il caso $h < 0$ si tratta in modo equivalente, e quindi la prima parte del teorema è dimostrata. Per la seconda parte, quanto detto sopra mostra che $s : [a, b] \to [0, l(r, [a, b])]$ è una funzione strettamente monotona crescente, quindi invertibile. Definiamo la curva $\tilde{r} : [0, l(r, [a, b])] \to \mathbb{R}^n$ ponendo $\tilde{r}(\tau) = r(s^{-1}(\tau))$, cioè $r(t) = \tilde{r}(s(t))$. Le curve $\tilde{r}$ e r sono equivalenti con riparametrizzazione data proprio dalla lunghezza d'arco. Infine, dalla derivata della funzione composta, si ottiene

$$r'(t) = \frac{d}{d} \tilde{r}(s(t)) = s'(t) \tilde{r}'(s(t)) = \|r'(t)\| \tilde{r}'(s).$$

□

Abbiamo anche la seguente proprietà, che ci assicura che la lunghezza di una curva non dipende dalla parametrizzazione scelta.

Proposizione 3.7 *Siano $r : I \to \mathbb{R}^n$ e $\tilde{r} : J \to \mathbb{R}^n$ due curve regolari equivalenti; allora*

$$l(r, I) = l(\tilde{r}, J).$$

DIM. Supponiamo per comodità l'insieme $I = [a, b]$ e $J = [c, d]$ e sia $\alpha : [a, b] \to [c, d]$ una riparametrizzazione ammissibile; supponiamo anche $\alpha' > 0$, da cui si deduce che $\alpha(a) = c$ e $\alpha(b) = d$. Allora, tenendo conto che

$$r'(t) = \frac{d}{dt} r(t) = \frac{d}{dt} \tilde{r}(\alpha(t)) = \alpha'(t) \tilde{r}'(\alpha(t)),$$

si ottiene, mediante il cambio di variabile $\tau = \alpha(t)$,

$$l(\tilde{r}, [c, d]) = \int_c^d \|\tilde{r}'(\tau)\| d\tau = \int_a^b \frac{\|r'(t)\|}{|\alpha'(t)|} \alpha'(t) dt = \int_a^b \|r'(t)\| dt$$

in quanto $\alpha' > 0$. □

Osservazione 3.8 Nel caso di curva $r : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ piana cartesiana rispetto ad esempio ad x, $r(t) = (t, f(t))$ con $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ di classe $C^1([a, b])$, la formula della lunghezza si riduce a

$$l(r, [a, b]) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$$

che fornisce la formula della lunghezza del grafico della funzione f.

Nel caso di curva in coordinate polari esplicite, grazie alla (3.1) la formula diventa:

$$l(r,[\vartheta_1,\vartheta_2]) = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{g(\vartheta)^2 + g'(\vartheta)^2} d\vartheta,$$

mentre nel caso di curva in coordinate polari parametriche, da (3.2) si ricava :

$$l(r,[I]) = \int_I \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2\vartheta'(t)^2} dt.$$

3.3 Curvatura e terna di Frenet

Supponiamo di avere una curva regolare $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$; per definire la curvatura di r abbiamo bisogno di prendere le derivate seconde di r e quindi supporremo $r \in C^2(I,\mathbb{R}^n)$. Se consideriamo la riparametrizzazione $\tilde{r}$ di r per lunghezza d'arco, abbiamo visto che $\|\tilde{r}'(s)\|^2 = 1$, e quindi

$$0 = \frac{d}{ds}\left(\tilde{r}'(s)\cdot\tilde{r}'(s)\right) = 2\tilde{r}'(s)\cdot\tilde{r}''(s),$$

cioè il vettore $\tilde{r}''(s)$ è ortogonale a $\tilde{r}'(s)$. La quantità

$$k_{\tilde{r}}(s) = \|\tilde{r}''(s)\|$$

viene detta curvatura scalare di $\tilde{r}$; se $k_{\tilde{r}}(s) \neq 0$, possiamo quindi definire il versore

$$\hat{n}_{\tilde{r}}(s) = \frac{\tilde{r}''(s)}{\|\tilde{r}''(s)\|}$$

che viene chiamato *normale principale* alla curva. In questo modo possiamo scrivere che

$$\tilde{r}''(s) = k_{\tilde{r}}(s)\hat{n}_{\tilde{r}}(s).$$

Siccome non sempre è agevole calcolare il parametro d'arco e quindi riparametrizzare la curva per lunghezza d'arco, vediamo come si può definire la curvatura utilizzando direttamente la parametrizzazione r. Denoteremo con

$$\hat{n}_r(t) := \hat{n}_{\tilde{r}}(s(t)), \qquad k_r(t) := k_{\tilde{r}}(s(t)). \tag{3.6}$$

Dal fatto che $\hat{\tau}_r(t) = \hat{\tau}_{\tilde{r}}(s(t)) = \tilde{r}'(s(t))$ e da (3.6), derivando si ottiene che

$$\hat{\tau}_r'(t) = s'(t)\tilde{r}''(s(t)) = \|r'(t)\|k_r(t)\hat{n}_r(t) = v(t)k_r(t)\hat{n}_r(t).$$

Quindi, siccome $r'(t) = v(t)\hat{\tau}_r(t)$, otteniamo la seguente decomposizione per l'accelerazione vettoriale

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) :=& r''(t) = v'(t)\hat{\tau}_r(t) + v^2(t)k_r(t)\hat{n}_r(t)\\ =& a(t)\hat{\tau}_r(t) + \frac{v^2(t)}{\varrho_r(t)}\hat{n}_r(t),\end{aligned} \tag{3.7}$$

dove abbiamo denotato con $a(t) = v'(t)$ l'accelerazione scalare e con $\varrho_r(t) = 1/k_r(t)$ il raggio di curvatura della curva. Si chiama *cerchio osculatore* il cerchio di raggio $\varrho_r(t)$ centrato in

$r(t) + \varrho_r(t)\hat{n}_r(t)$ e convenuto nel piano generato da $\hat{\tau}_r(t)$ e $\hat{n}_r(t)$. Se moltiplichiamo (3.7) scalarmente per $\hat{\tau}_r(t)$ otteniamo che

$$a(t) = r''(t) \cdot \hat{\tau}_r(t),$$

che in realtà non è una formula tanto interessante in quanto $a(t)$ può essere calcolata derivando direttamente $v(t)$. Conoscendo la velocità scalare e $\hat{\tau}_r(t)$, si possono ricavare la curvatura e la normale principale mediante

$$k_r(t)\hat{n}_r(t) = r''(t) - a(t)\hat{\tau}_r(t).$$

Nel caso in cui la curva sia in $\mathbb{R}^3$, si può anche moltiplicare la (3.7) vettorialmente per $\hat{\tau}_r(t)$ in modo da ottenere

$$\hat{\tau}_r(t) \times r''(t) = v^2(t)k_r(t)\hat{\tau}_r(t) \times \hat{n}_r(t).$$

Il vettore $b_r(t) = \hat{\tau}_r(t) \times \hat{n}_r(t)$, chiamato *binormale alla curva* r, ha norma 1, è ortogonale sia a $\hat{\tau}_r(t)$ che a $\hat{n}_r(t)$ e quindi il sistema $\{\hat{\tau}_r(t), \hat{n}_r(t), b_r(t)\}$ definisce una base destrorsa di $\mathbb{R}^3$; tale sistema viene chiamato *terna di Frenet*. Se ne deduce che la curvatura di r può essere calcolata come

$$k_r(t) = \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3}.$$

Capitolo 4

I Numeri Complessi

In questo capitolo daremo la definizione e le principali proprietà di un nuovo insieme numerico: il campo[1] dei numeri complessi $\mathbb{C}$.

La motivazione che spinge ad introdurre questo nuovo insieme numerico, quantomeno per il presente corso, viene dalla necessità di risolvere equazioni, principalmente, del secondo ordine, cioè equazioni della forma

$$ax^2 + bx + c = 0;$$

come è ben noto, le soluzioni di tale equazione sono date dalla formula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Tale formula funziona con i seguenti accorgimenti;

1. se $b^2 - 4ac > 0$, allora la radice quadrata è ben definita e si ottengono due soluzioni reali distinte;

2. se $b^2 - 4ac = 0$, la radice non compare e si ottiene una sola soluzione, o meglio due soluzioni coincidenti.

Resta il problema del caso $b^2 - 4ac < 0$, in cui ci si trova di fronte al problema di dover calcolare

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{-|b^2 - 4ac|} = \sqrt{-1}\sqrt{|b^2 - 4ac|};$$

nella precedente espressione basta dare un senso alla radice quadrata del numero negativo -1 per ottenere una buona formula risolutiva di ogni polinomio di secondo grado, senza distinzioni sul discriminante (in realtà l'unica distinzione sarà discriminante nullo o non

[1] Ricordiamo che per campo si intende un insieme K sul quale siano definite due operazioni, dette somma e prodotto e denotate con $+$ e $\cdot$, per le quali valgono le proprietà:

1. $+$ è associativa, ammette elemento neutro, denotato con 0, e ogni elemento $a \in K$ è invertibile rispetto alla somma con inversa denotata con $-a$;

2. $\cdot$ è associativa, ammette elemento neutro, denotato con 1, e ogni elemento $a \in K$ con $a \neq 0$ è invertibile rispetto al prodotto con inverso denotato con a^{-1} o $\frac{1}{a}$;

3. le operazioni di somma e prodotto godono della proprietà distributiva.

Se le operazioni di somma e prodotto sono commutative, si parla di campo commutativo o abeliano.

nullo). Si tratta quindi di trovare un insieme numerico in cui l'equazione $x^2+1=0$ abbia soluzione; come vedremo, risolvere quest'ultima equazione renderà possibile trovare le radici non solo di polinomi di secondo grado, ma di grado arbitrario e a coefficienti non reali (vedi Teorema 4.13).

4.1 Definizione e prime proprietà

In questa sezione daremo la definizione e le principali proprietà dei numeri complessi. Come si è visto nel corso di Analisi Matematica I, si parte dall'insieme numerico $\mathbb{N}$ sul quale sono ben definite le operazioni di somma e prodotto ma nel quale non esistono gli elementi inversi rispetto a queste due operazioni. Si introducono quindi delle estensioni di $\mathbb{N}$ in cui sono ancora definite somma e prodotto, che sono estensioni della somma e prodotto su $\mathbb{N}$, in modo che esistano gli elementi inversi rispetto alla somma (e si ottiene così l'insieme $\mathbb{Z}$) e prodotto (ottenendo così $\mathbb{Q}$). L'introduzione di $\mathbb{R}$ viene fatta in modo che ci sia completezza non tanto rispetto alle operazioni di somma e prodotto, ma rispetto alla convergenza delle successioni di Cauchy, ottenendo in definitiva le seguenti inclusioni $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$. Vogliamo definire qui il campo $\mathbb{C}$ in modo che $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ e che le operazioni di somma e prodotto su $\mathbb{C}$ non siano altro che estensioni della somma e prodotto su $\mathbb{R}$.

Esistono vari modi equivalenti di definire $\mathbb{C}$; quello che seguiremo è quello di tipo cartesiano.

Definizione 4.1 (Campo complesso) *Diremo* campo complesso*, e lo denoteremo con* $\mathbb{C}$*, l'insieme consistente nel piano* $\mathbb{R}^2$ *(che prende il nome di piano di Gauss) munito delle operazioni di somma e prodotto*

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc).$$

Un generico elemento di $\mathbb{C}$ *si indicherà con le ultime lettere dell'alfabeto,* $z,w,\dots$ *intendendo* $z=(a,b)$*, ecc. La prima componente di un numero complesso si chiama parte reale,* $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(a,b)=a$ *e la seconda componente si chiama parte immaginaria,* $\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(a,b)=b$ *(si tenga ben presente che parte reale e parte immaginaria di un numero complesso sono entrambi numeri reali). Un numero complesso* z *si dirà reale (o reale puro) se* $\mathrm{Im}(z)=0$*, mentre si dirà immaginario puro se* $\mathrm{Re}(z)=0$.

Osservazione 4.2 Dato che l'insieme dei numeri complessi è definito tramite una coppia ordinata, l'uguaglianza tra numeri complessi, $z=w$ con $z=(a,b)$ e $w=(c,d)$, si verificherà se e solo se $a=c$ e $b=d$, cioè se e solo se $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(w)$ e $\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(w)$.

La terminologia *campo* è motivata dalla seguente Proposizione.

Proposizione 4.3 $\mathbb{C}$ *è un campo abeliano.*

DIM. Le proprietà di associatività e commutatività della somma sono immediate, mentre quelle per il prodotto sono lasciate come verifica. Si nota quindi che gli elementi $(0,0)$ e $(1,0)$ sono elementi neutri per la somma e per il prodotto rispettivamente; si nota infine che l'elemento $-z=-(a,b)=(-a,-b)$ è l'inverso additivo di $z=(a,b)$, mentre, se $z\neq(0,0)$, allora

$$z^{-1}=\frac{1}{z}=\left(\frac{a}{a^2+b^2},-\frac{b}{a^2+b^2}\right) \tag{4.1}$$

è l'inverso moltiplicativo di z. Si noti che dire $z \neq (0,0)$ significa che almeno uno tra a e b è diverso da zero, da cui il fatto che $a^2 + b^2 \neq 0$ e cioè la buona definizione di z^{-1} $\square$

Vediamo ora in che senso $\mathbb{C}$ è una estensione di $\mathbb{R}$; si nota che sull'insieme

$$R = \{(a,0) : a \in \mathbb{R}\}$$

le operazioni sopra definite si riducono a

$$(a,0) + (b,0) = (a+b,0). \quad (a,0) \cdot (b,0) = (ab,0).$$

ed inoltre

$$-(a,0) = (-a,0), \quad (a,0)^{-1} = (1/a,0), \qquad a \neq 0.$$

Identificando quindi R con $\mathbb{R}$, avremo che $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$; useremo sempre questa identificazione che ci porta a scrivere la seguente uguaglianza

$$(a,0) = a.$$

Avremo in particolare che gli elementi neutri rispetto a somma e prodotto in $\mathbb{C}$ sono gli stessi di quelli in $\mathbb{R}$, essendo $0 = (0,0)$ e $1 = (1,0)$.

Osservazione 4.4 Si noti che, mentre $\mathbb{R}$ è un campo ordinato, su $\mathbb{C}$ non abbiamo introdotto nessuna nozione di ordinamento; questo è dovuto al fatto che non c'è un modo naturale per estendere l'ordinamento $\leq$ su $\mathbb{C}$ e non avrà quindi senso per i numeri complessi l'espressione $z \leq w$.

Notiamo inoltre che, con le notazioni appena introdotte, si ha:

$$(0,1) \cdot (0,1) = (-1.0) = -1,$$

cioè l'elemento $i = (0,1)$ ha la proprietà che $i^2 = -1$; tale elemento verrà chiamato unità immaginaria. In questo modo siamo arrivati a poter scrivere un numero complesso, oltre che con la notazione cartesiana, anche in notazione algebrica. Infatti, abbiamo che

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (0,1) \cdot (b,0) = a + ib.$$

La definizione algebrica dei numeri complessi passa quindi attraverso la definizione di un numero *speciale* i con la proprietà che $i^2 = -1$, e definendo numero complesso tutte le possibili combinazioni lineari degli elementi 1 e i, cioè tutti i numeri della forma appunto

$$a + ib, \quad a,b \in \mathbb{R}.$$

In questo modo l'operazione di prodotto diventa più intuitiva; infatti dati due numeri complessi $a + ib, c + id$, abbiamo, tenendo presente che $i^2 = -1$,

$$(a+ib) \cdot (c+id) = a \cdot c + a \cdot id + ib \cdot c + ib \cdot id = ac - bd + i(ad+bc).$$

4.2 Coniugato e modulo di un numero complesso

Sui numeri complessi è definita l'operazione di coniugio; dato cioè un numero complesso $z = a + ib$, si definisce il numero complesso $\overline{z}$ detto coniugato di z tramite

$$\overline{z} = a - ib.$$

Per l'operazione di coniugio abbiamo le seguenti proprietà.

Proposizione 4.5 *Siano $z, w \in \mathbb{C}$; allora*

1. $\overline{\overline{z}} = z$ *(proprietà involutiva del coniugio);*
2. $\overline{z} = z$ *se e solo se z reale;*
3. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$*;*
4. $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$*;*
5. *se $z \neq 0$, allora* $\overline{1/z} = 1/\overline{z}$*;*
6. $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$*,* $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$*.*

Dim. Basta scrivere z e w in forma algebrica $z = a+ib$, $w = c+id$ e verificare le identità; vediamo solamente le dimostrazioni di 4. e 5. Dato che $zw = (ac - bd) + i(ad + bc)$, segue che $\overline{zw} = (ac - bd) - i(ad + bc)$, mentre

$$\overline{z} \cdot \overline{w} = (a - ib)(c - id) = (ac - bd) + i(-ad - bc)$$

da cui la 4. Per la 5. si nota che da (4.1) applicata a z e $\overline{z}$, si ottiene che

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}, \quad \frac{1}{\overline{z}} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\frac{b}{a^2 + b^2},$$

da cui la 5. □

Notiamo che scrivendo $z = a + ib$ si ottiene che $z\overline{z} = a^2 + b^2$, e quindi il fatto che $z\overline{z}$ è un numero reale positivo. Possiamo quindi dare la seguente definizione.

Definizione 4.6 (Modulo in $\mathbb{C}$) *Dato un numero complesso $z \in \mathbb{C}$, si definisce il modulo di z tramite*

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}}.$$

Osservazione 4.7 Non si deve confondere la notazione di modulo di un numero complesso con quella di valore assoluto di un numero reale; tuttavia, le due nozioni coincidono nel caso in cui z sia reale puro, in quanto in questo caso $b = 0$ e quindi

$$|z| = \sqrt{a^2} = |a|.$$

Per il modulo di un numero complesso valgono le seguenti proprietà.

Proposizione 4.8 *Siano $z, w \in \mathbb{C}$; allora*

1. $|z| \geq 0$*,* $|z| = 0$ *se e solo se* $z = 0$*;*

2. *$|z| = |\overline{z}|$, $|-z| = |z|$;*

3. *$|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$, $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$, $|z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$;*

4. *se $z \neq 0$, $|1/z| = 1/|z|$, $1/z = \overline{z}/|z|^2$;*

5. *$|zw| = |z||w|$;*

6. *$|z+w| \leq |z| + |w|$ (disuguaglianza triangolare);*

7. *$|z+w| \geq ||z| - |w||$ (seconda disuguaglianza triangolare).*

Dim. Si scrivono $z = a + ib$ e $w = c + id$ e le proprietà 1., 2. e 3. sono immediate. Notando poi che per $z \neq 0$

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \left|\frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}\right| = \sqrt{\frac{a^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{b^2}{(a^2+b^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{|z|}$$

da cui la 4. (la seconda proprietà della 4. segue direttamente dalla definizione $|z|^2 = z\overline{z}$). Per la 5., si nota che, dalle proprietà del coniugio, si ottiene:

$$|zw|^2 = zw\overline{zw} = zw\overline{z} \cdot \overline{w} = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2.$$

Per quanto riguarda la disuguaglianza triangolare, tenendo presente la proprietà 6. della Proposizione 4.5 e la 3. di questa Proposizione, si ha:

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} = z\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} = |z|^2 + |w|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) \\ &\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\overline{w}| = |z|^2 + |w|^2 + 2|z| \cdot |w| \\ &= (|z| + |w|)^2, \end{aligned}$$

da cui la 6. Per quanto riguarda la 7., basta notare che

$$|z| = |z - w + w| \leq |z - w| + |w|,$$

da cui $|z| - |w| \leq |z - w|$; analogamente

$$|w| \leq |w - z| + |z| = |z - w| + |z|,$$

da cui $|w| - |z| \leq |z - w|$. Mettendo insieme queste due disuguaglianze, si ottiene la 7. □

4.3 Forma polare ed esponenziale

Nelle sezioni precedenti abbiamo introdotto le forme cartesiana ed algebrica di un numero complesso; in questa sezione introdurremo la forma polare ed esponenziale. Il vantaggio di queste nuove definizioni è che, mentre la forma cartesiana e algebrica è comoda quando si vogliono sommare due numeri complessi, la forma polare ed esponenziale lo sono nella moltiplicazione.

La definizione della forma polare di un numero complesso segue dall'osservazione che un numero complesso $z = a + ib = (a, b)$ rappresenta un punto nel piano $\mathbb{R}^2$ ed è quindi determinato dalle sue coordinate polari (ϱ, ϑ), dove $\varrho = \sqrt{a^2 + b^2}$ rappresenta la distanza del punto (a,b) dall'origine e coincide con il modulo del numero complesso, $\varrho = |z|$, mentre l'angolo ϑ, detto argomento o anomalia e denotato con $\vartheta = \arg(z)$, rappresenta l'angolo, preso in senso antiorario, formato dal semiasse $\{x = 0, y \geq 0\}$ e la semiretta originata in $(0,0)$ e passante per (a,b). Si nota che mentre ϱ è univocamente determinato, l'angolo ϑ è individuato a meno di multipli di 2π (fa eccezione l'origine, che è individuata da $\varrho = 0$ ma non ha un ϑ determinato) ed è univocamente determinato in un intervallo semiaperto di ampiezza 2π; si parla in questo caso di argomento principale di z e come intervallo si può scegliere $(-\pi,\pi]$ (o $[0,2\pi)$ a seconda dei casi). Per passare dalla forma algebrica alle coordinate polari del numero $z = a + ib$ si possono usare, nel caso $z \neq 0$, le formule

$$\left\{\begin{array}{l} a = \varrho\cos\vartheta \\ b = \varrho\,\mathrm{sen}\,\vartheta \end{array}\right. , \qquad \left\{\begin{array}{l} \varrho = \sqrt{a^2+b^2} \\[2ex] \cos\vartheta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\[2ex] \mathrm{sen}\,\vartheta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{array}\right. \tag{4.2}$$

Possiamo quindi dare la seguente definizione.

Definizione 4.9 (Forma polare) *Dato $z \in \mathbb{C}$, si chiama forma polare (o trigonometrica) l'espressione di z usata utilizzando le coordinate polari*

$$z = \varrho(\cos\vartheta + i\,\mathrm{sen}\,\vartheta).$$

Uno dei maggiori vantaggi della rappresentazione polare dei numeri complessi si presenta quando si deve fare il prodotto di due numeri complessi. Supponiamo infatti di avere due numeri complessi $z = \varrho(\cos\vartheta + i\,\mathrm{sen}\,\vartheta)$, $w = r(\cos\phi + i\,\mathrm{sen}\,\phi)$, otteniamo che

$$zw = \varrho r(\cos(\vartheta+\phi) + i\,\mathrm{sen}(\vartheta+\phi)), \qquad \frac{z}{w} = \frac{\varrho}{r}(\cos(\vartheta-\phi) + i\,\mathrm{sen}(\vartheta-\phi)), \tag{4.3}$$

cioè la moltiplicazione per il numero w è data da una dilatazione pari a r e una rotazione di un angolo ϕ. In particolare, se $w = z$, si ottiene che

$$z^2 = \varrho^2(\cos 2\vartheta + i\,\mathrm{sen}\,2\vartheta),$$

o più in generale, per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$z^n = \varrho^n(\cos n\vartheta + i\,\mathrm{sen}\,n\vartheta); \tag{4.4}$$

le formule (4.3) e (4.4) prendono anche il nome di Formule di De Moivre. Dato che la funzione

$$f(\vartheta) = \cos\vartheta + i\,\mathrm{sen}\,\vartheta,$$

ha la proprietà che $f(\vartheta_1)f(\vartheta_2) = f(\vartheta_1+\vartheta_2)$, ha senso la seguente definizione.

Definizione 4.10 *Si definisce l'esponenziale immaginario come la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ data da*

$$e^{i\vartheta} = f(\vartheta) = \cos\vartheta + i\,\mathrm{sen}\,\vartheta;$$

Più in generale, dato un numero complesso $z = a + ib$, si definisce l'esponenziale complesso $e : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$e^z = e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i\,\mathrm{sen}\,b).$$

Osservazione 4.11 Si noti che, dalla definizione data, si ha che la funzione $\vartheta \mapsto e^{i\vartheta}$ è 2π-periodica e che per ogni $\vartheta \in \mathbb{R}$ $|e^{i\vartheta}| = 1$.

Definizione 4.12 (Forma esponenziale) *Dato un numero complesso $z \in \mathbb{C}$, si chiama forma esponenziale di z la scrittura di z nella forma*

$$z = \varrho e^{i\vartheta},$$

dove ϱ e ϑ sono determinate dalle (4.2).

4.4 Polinomi e radici n-esime

In questa sezione tratteremo i polinomi in campo complesso. Ricordiamo che un polinomio complesso di grado n è una funzione $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita da

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \quad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}, a_n \neq 0.$$

Ricordiamo anche che un numero complesso z_0 si dice radice del polinomio p se $p(z_0) = 0$; in tal caso il polinomio p è divisibile per $(z - z_0)$ e si potrà scrivere

$$p(z) = (z - z_0)q(z)$$

con q polinomio di grado $n - 1$. Si dice inoltre che z_0 ha molteplicità m se

$$p(z) = (z - z_0)^m q(z)$$

con q polinomio di grado $n - m$ tale che $q(z_0) \neq 0$; in tal caso $p(z)$ è divisibile per $(z - z_0)^m$ ma non per $(z - z_0)^{m+1}$. Conseguenza di questi fatti è che un polinomio di grado n ha al più n radici, contate con le relative molteplicità. In campo complesso vale però anche il viceversa, cioè che le radici sono esattemante n, se contate con le loro molteplicità; vale infatti il seguente Teorema, che non dimostreremo.

Teorema 4.13 (Teorema fondamentale dell'algebra) *Ogni polinomio complesso di grado almeno* 1 *ammette una radice complessa.*

Il precedente Teorema ha come immediato corollario il seguente risultato.

Teorema 4.14 (Teorema fondamentale dell'algebra) *Ogni polinomio complesso di grado $n \geq 1$ ammette n radici complesse, se si conta ogni radice con la relativa molteplicità.*

I precedenti Teoremi non danno alcuna informazione su come trovare le radici del polinomio considerato; abbiamo però il seguente Teorema, valido per polinomi a coefficienti reali.

Proposizione 4.15 *Se p è un polinomio complesso a coefficienti reali, cioè $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, allora $z_0 \in \mathbb{C}$ è radice di p se e solo se $\overline{z_0}$ lo è e in tal caso z_0 e $\overline{z_0}$ hanno la stessa molteplicità.*

DIM. Basta osservare che, essendo $p(z_0) = 0$, allora

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{p(z_0)} = \overline{a_0 + a_1 z_0 \cdots + a_n z_0^n} = \overline{a_0} + \overline{a_1} \cdot \overline{z_0} + \cdots + \overline{a_n} \cdot \overline{z_0}^n \\ &= a_0 + a_1 \overline{z_0} \cdots + a_n \overline{z_0}^n = p(\overline{z_0}). \end{aligned}$$

$\square$

Osservazione 4.16 Si noti che, come corollario, si deduce che ogni polinomio reale a coefficienti reali può essere scritto come prodotto di polinomi di grado uno o al massimo due; infatti, visto come polinomio complesso, si ha dal Teorema fondamentale dell'algebra 4.14 che

$$p(z) = a_n(z - z_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (z - z_k)^{m_k} \tag{4.5}$$

con $m_1 + \dots + m_k = n$; ne deriva che in campo coplesso i fattori primi dei polinomi sono i polinomi di grado uno, nel senso che ogni polinomio si decompone come prodotto di binomi di primo grado (si pensi all'analogia della decomposizione dei numeri interi in fattori primi). Tornando a vedere il polinomio come reale a coefficienti reali, se z_i è reale, allora abbiamo un fattore di grado uno, mentre se z_i è non reale, allora in (4.5) deve comparire anche $\overline{z_i}$ (Proposizione 4.15), esiste cioè $j \neq i$ tale che $z_j = \overline{z_i}$ e $m_j = m_i$. Notando poi che

$$(z - z_i)(z - \overline{z_i}) = z^2 - 2\text{Re}(z_i)z + |z_i|^2$$

è un polinomio di secondo grado a coefficienti reali, segue l'osservazione.

Consideriamo ora il problema della radice n–esima di un numero complesso. Dato un numero complesso w, si dice che il numero complesso z è una radice n–esima di w se $z^n = w$. Le radici n–esime sono quindi le soluzioni dell'equazione $z^n - w = 0$, cioè sono le radici del polinomio $p(z) = z^n - w$; quindi, per quanto visto sopra, esistono al più n radici n–esime del numero w. La seguente Proposizione afferma che le radici sono esattamente n.

Proposizione 4.17 *Dato il numero complesso $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, esistono n radici complesse distinte di w date dalla formula*

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}e^{i\vartheta_k}, \quad \textit{con } \vartheta_k = \frac{\arg(w) + 2k\pi}{n}, k = 0, \dots, n-1.$$

Osservazione 4.18 Va osservato che la radice n-esima complessa non definisce una funzione in $\mathbb{C}$, avendo essa più valori; bisogna quindi fare attenzione che il simbolo $\sqrt[n]{w}$ può avere significati differenti, anche nel caso in cui w sia un numero reale, a seconda che si parli di radice reale o radice complessa.

DIM. Scrivendo $z = \varrho e^{i\vartheta}$ e $w = re^{i\phi}$, si nota che $z^n = w$ se e solo se

$$\begin{cases} \varrho^n = r \\ \cos(n\vartheta) = \cos\phi \\ \text{sen}(n\vartheta) = \text{sen}\,\phi; \end{cases}$$

tale sistema ha per soluzioni $\varrho = \sqrt[n]{r}$ (radice reale) e

$$\vartheta_k = \frac{\phi + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{4.6}$$

Chiaramente abbiamo infiniti valori di ϑ_k; notiamo però che due differenti valori di k e h definiscono lo stesso numero complesso, cioè $z_h = z_k$ se ϑ_h e ϑ_k differiscono per un multiplo di 2π, cioè se

$$\vartheta_h = \vartheta_k + 2m\pi;$$

la precedente espressione, usando (4.6), è equivalente a

$$h - k = nm,$$

cioè $z_h = z_k$ se e solo se $h - k$ è divisibile per n, o equivalentemente h e k hanno lo stesso resto nella divisione per n. Siccome i possibili resti della divisione per n sono $0, 1, \dots, n-1$, la dimostrazione segue. $\square$

Esempio 4.1 Consideriamo il numero $w = 1$, numero di modulo uno e argomento zero; nel caso $n = 2$, cioè nel caso delle radici quadrate, si ottengono i numeri

$$z_k = e^{i\vartheta_k}, \qquad \vartheta_k = k\pi, k = 0, 1$$

cioè i due numeri $z_0 = 1$ e $z_1 = -1$. Per $n = 3$, si ottengono

$$z_k = e^{i\vartheta_k}, \qquad \vartheta_k = \frac{2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2$$

cioè i numeri complessi $z_0 = 1$, $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Analogamente, per $n = 4$

$$z_k = e^{i\vartheta_k}, \qquad \vartheta_k = \frac{k\pi}{2}, k = 0, 1, 2, 3$$

che producono i numeri $z_0 = 1$, $z_1 = i$, $z_2 = -1$ e $z_3 = -i$. In figura sono rappresentate queste radici e quelle relative al caso $n = 5$ e $n = 6$; si noti quindi che il numero 1 si trova sempre tra le radici per ogni ordine (come nel caso reale) ed anche il numero -1 si trova (sempre come nel caso reale) in ogni radice di ordine pari. Si hanno però altre radici a partire dal caso $n = 3$ che si distribuiscono nel piano complesso secondo triangoli equilateri ($n = 3$), quadrati ($n = 4$), pentagoni ($n = 5$) ed esagoni ($n = 6$), avendo sempre (siccome il numero w è reale) due radici coniugate tra loro (si veda figura 4.1).

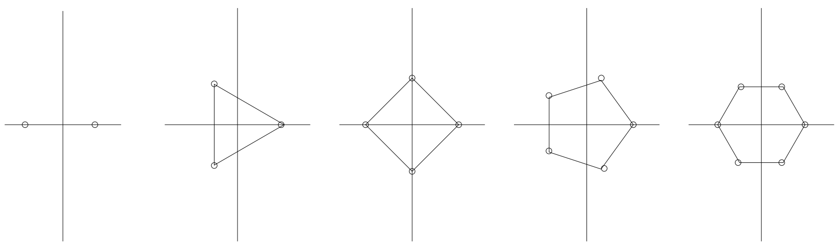


Figura 4.1: Distribuzione nel piano complesso delle radici n–esime di 1, $n = 2, 3, 4, 5, 6$.

Esempio 4.2 Nel caso $w = -1$, il numero di modulo uno e argomento π, si ottiene che nel

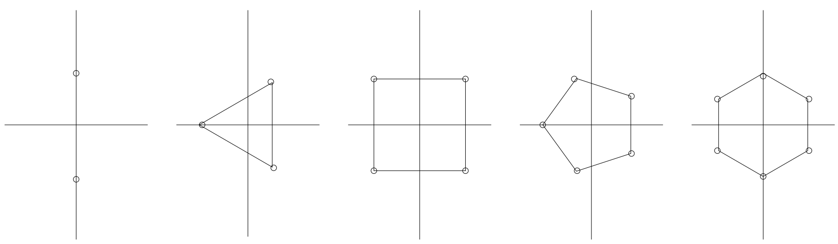


Figura 4.2: Distribuzione nel piano complesso delle radici n–esime di -1, $n = 2, 3, 4, 5, 6$.

caso $n = 2$,

$$z_k = e^{i\vartheta_k}, \qquad \vartheta_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, k = 0, 1$$

cioè i due numeri $z_0 = i$ e $z_1 = -i$. Per $n = 3$, si ottengono

$$z_k = e^{i\vartheta_k}, \qquad \vartheta_k = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2$$

cioè i numeri complessi $z_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_1 = -1$ e $z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Analogamente, per $n = 4$

$$z_k = e^{i\vartheta_k}, \qquad \vartheta_k = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k = 0, 1, 2, 3$$

che producono i numeri $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$. Si veda la figura 4.2 per la distribuzione di queste radici e per quelle del caso $n = 5$ e $n = 6$. Come esercizio, si provi a vedere cosa succede nel caso $w = i$ e $w = -i$.

Capitolo 5

Successioni e serie di funzioni

In questo capitolo generalizzeremo la trattazione delle successioni e delle serie al caso in cui i termini delle stesse siano non numeri reali, ma funzioni reali di una variabile reale. Parte della terminologia ed alcuni risultati saranno ovvie generalizzazioni delle nozioni corrispondenti già viste, ma dovremo affrontare anche molti problemi nuovi ed introdurre nuove nozioni. Infatti, stavolta saranno contemporaneamente presenti due variabili, quella relativa al dominio delle funzioni e l'indice della successione. Trattiamo prima il caso delle successioni e poi quello delle serie, premettendo dei richiami sui concetti di massimo e minimo limite di una successione numerica. Tra le serie di funzioni rivestono un ruolo particolare, per l'importanza in molti problemi applicativi e per la particolarità dei risultati che si possono ottenere, le serie di potenze e le serie di Fourier, che trattiamo in due appositi paragrafi.

Ringraziamenti. Si ringraziano i prof. Albanese, Leaci e Pallara dell'Università del Salento per la concessione dei presenti appunti, che sono stati integrati con alcune dimostrazioni e osservazioni.

5.1 Massimo e minimo limite di una successione

Data una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si definiscono il *minimo limite* ed il *massimo limite* ponendo

$$\ell_1 = \liminf_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} a_k, \qquad \ell_2 = \limsup_{n\to+\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_k.$$

Commentiamo solo la definizione di minimo limite, lasciando per esercizio la riformulazione delle considerazioni che seguono al caso del massimo limite. Data $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si può costruire la successione (e'_n) ponendo $e'_n = \inf_{k\geq n} a_k$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Siccome ad ogni passo si calcola l'estremo inferiore su un insieme più piccolo, la successione (e'_n) è crescente e quindi per il teorema fondamentale sulle successioni monotone esiste il suo limite e coincide con $\sup_n\{e'_n\}$. Inoltre, dalle proprietà dell'estremo inferiore e dell'estremo superiore si ricava la seguente caratterizzazione del massimo e minimo limite. Presentiamo in dettaglio il caso in cui $\ell_1,\ \ell_2$ siano numeri reali. Il caso in cui sono infiniti verrà brevemente discusso nell'Osservazione 5.3.

Proposizione 5.1 *Sia data la successione reale* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. *Per* $\ell_1 \in \mathbb{R}$, *risulta* $\ell_1 = \liminf_{n\to+\infty} a_n$ *se e solo se valgono le condizioni:*

   (a) *per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\nu > 0$ *tale che* $a_n > \ell_1 - \varepsilon$ *per ogni* $n \geq \nu$*;*

   (b) *per ogni* $\varepsilon > 0$ *e per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *esiste* $k > n$ *tale che* $a_k < \ell_1 + \varepsilon$*.*

2. *Per* $\ell_2 \in \mathbb{R}$*, risulta* $\ell_2 = \limsup_{n\to+\infty} a_n$ *se e solo se valgono le condizioni:*

   (a) *per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\nu > 0$ *tale che* $a_n < \ell_2 + \varepsilon$ *per ogni* $n \geq \nu$*;*

   (b) *per ogni* $\varepsilon > 0$ *e per ogni* $\nu \in \mathbb{N}$ *esiste* $n > \nu$ *tale che* $a_n > \ell_2 - \varepsilon$*.*

Dim. Concentriamoci sul lim inf, la dimostrazione della caratterizzazione del lim sup essendo analoga. Poiché $\ell_1 = \sup_n e'_n$, tutto dipende dalle proprietà dell'estremo superiore.

Se $\sup_n e'_n = \ell_1$ allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $e'_\nu = \inf_{k\geq\nu} a_k \geq \ell_1 - \varepsilon$ e quindi per monotonia $e'_n \geq \ell_1 - \varepsilon$ per ogni $n \geq \nu$ e vale (a). D'altra parte, se $\ell_1 = \liminf_n a_n$, allora $e'_n = \inf_{k\geq n} a_k \leq \ell_1$ per ogni n, e quindi per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni n esiste $k > n$ tale che $a_k \leq \ell_1 + \varepsilon$ e vale (b).

Viceversa, se vale (a) allora e'_n è definitivamente maggiore di $\ell_1 - \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$ e quindi $\liminf_n a_n \geq \ell_1$. Se vale anche (b) allora per ogni $\varepsilon > 0$ e'_n è minore di $\ell_1 + \varepsilon$ per infiniti indici, e quindi $\liminf_n a_n \leq \ell_1$. □

Dalla Proposizione precedente segue in particolare che $\liminf_{n\to+\infty} a_n$ è il più piccolo e $\limsup_{n\to+\infty} a_n$ è il più grande tra i numeri reali ℓ che godono della proprietà che esiste una successione estratta da (a_n) convergente ad ℓ. Ovvia conseguenza di quanto detto è che $\liminf_{h\to\infty} f_h \leq \limsup_{h\to\infty} f_h$, con uguaglianza se e solo se esiste il limite di a_n.

Proposizione 5.2 *Se* $\ell_1 = \liminf_n a_n \in \mathbb{R}$ *e* $\ell_2 = \limsup_n a_n \in \mathbb{R}$ *ed* $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *è una successione estratta tale che* $a_{k_n} \to \ell$*, allora* $\ell_1 \leq \ell \leq \ell_2$*. Inoltre, esistono sottosuccessioni convergenti ad* ℓ_1 *e ad* ℓ_2*.*

Dim. Poiché per le proprietà (a) del minimo e del massimo limite di (a_n) discusse nella proposizione precedente per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu > 0$ tale che $n > \nu$ implica $\ell_1 - \varepsilon < a_n < \ell_2 + \varepsilon$, nessuna sottosuccessione può convergere ad un limite fuori dall'intervallo $[\ell_1, \ell_2]$.

Proviamo ora che esiste una sottosuccessione convergente ad ℓ_1, usando le proprietà (a) e (b) della Proposizione precedente con $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Per (a) troviamo ν_n tale che $a_k > \ell_1 - \frac{1}{n}$ per ogni $k \geq \nu_n$, e per (b) troviamo induttivamente $k_n > \max\{\nu_n, k_{n-1}\}$ tale che $a_{k_n} < \ell_1 + \frac{1}{n}$. La successione (a_{k_n}) così costruita converge ad ℓ_1. □

Osservazione 5.3 Se $\ell_1 = -\infty$ oppure $\ell_2 = +\infty$, allora la Proposizione 5.1 va riformulata come segue:

1. $\liminf_n a_n = -\infty$ se e solo se per ogni $K > 0$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $k > n$ tale che $a_k < -K$.

2. $\limsup_n a_n = +\infty$ se e solo se per ogni $K > 0$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $k > n$ tale che $a_k > K$.

La Proposizione 5.2 vale esattamente negli stessi termini, ma la dimostrazione va adattata. Questo viene lasciato per esercizio.

Abbiamo anche la seguente caratterizzazione delle successioni che ammettono limite.

Proposizione 5.4 *Data una succession* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, le seguenti affermazioni sono equivalenti;*

1. *posto* $\ell_1 = \liminf_n a_n$ *e* $\ell_2 = \limsup_n a_n$*, allora* $\ell_1 = \ell_2$*;*

2. *la successione ammette limite, cioè esiste* $\ell \in \mathbb{R}$ *tale che* $\ell = \lim_n a_n$*;*

3. *la successione è di Cauchy, cioè per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\nu \in \mathbb{N}$ *tale che per ogni* $h \geq \nu$ *e* $p \in \mathbb{N}$*,* $|a_{h+p} - a_h| < \varepsilon$*.*

DIM.

1.⇒2. Grazie alla Proposizione 5.1, punti 1.(a) e 2.(a), sappiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esite $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\ell_1 - \varepsilon < a_h < \ell_2 + \varepsilon$ per ogni $h \geq \nu$. Dato che $\ell_1 = \ell_2 = \ell$, ne segue che la successione ammette limite uguale ad ℓ.

2.⇒3. È chiaro che se la successione ammette limite $\ell \in \mathbb{R}$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $|a_h - \ell| < \varepsilon$ per ogni $h \geq \nu$. In particolare, per $h \geq \nu$ e $p \in \mathbb{N}$ abbiamo che

$$|a_{h+p} - a_h| \leq |a_{h+p} - \ell| + |a_h - \ell| < 2\varepsilon,$$

e cioè la successione è di Cauchy.

3.⇒1. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e $\nu \in \mathbb{N}$ per il quale sia verificata la condizione di Cauchy; grazie alla Proposizione 5.1, sappiamo che esistono $h \geq \nu$ e $k \geq \nu$ per i quali

$$|a_h - \ell_1| < \varepsilon, \qquad |a_k - \ell_2| < \varepsilon.$$

Supponendo $h < k$ e scritto $p = k - h$, troviamo che

$$|\ell_1 - \ell_2| \leq |a_h - \ell_1| + |a_h - a_{h+p}| + |a_{h+p} - \ell_2| < 3\varepsilon,$$

da cui, per l'arbitrarietà di ε, si ha $\ell_1 = \ell_2$.

□

Infine, richiamiamo alcune proprietà delle serie numeriche, cioè il *prodotto di due serie* e il *teorema di riordinamento.*

Teorema 5.5 (Prodotto di due serie) *Date due serie a termini reali o complessi assolutamente convergenti* $\sum_k a_k$ *e* $\sum_k b_k$*, risulta*

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\Big) \tag{5.1}$$

Il teorema seguente dovrebbe far capire quanta distanza ci sia tra le serie e le somme finite. Una delle proprietà più "ovvie" delle somme finite è la proprietà *commutativa.* È naturale domandarsi se essa valga anche per le serie. Per formulare correttamente il problema bisogna introdurre il concetto di *permutazione dei termini di una serie.* Date la serie $\sum_k a_k$ ed una funzione bigettiva $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (permutazione), si dice *serie ottenuta permutando i termini di* $\sum_k a_k$ *secondo* π *la serie* $\sum_k a_{\pi(k)}$. Notiamo che i valori assunti dalla successione $(a_{\pi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ sono *gli stessi di* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$*, e vengono assunti lo stesso numero di volte*, per cui se avessimo a che fare con una somma finita passare da $\sum_k a_k$ a $\sum_k a_{\pi(k)}$ si ridurrebbe a "cambiare l'ordine degli addendi", ed è ben noto che in tal caso "la somma non cambia". Per le serie infinite le cose vanno in modo completamente diverso, a meno che non si abbia convergenza assoluta.

Teorema 5.6 *Sia* $\sum_k a_k$ *una serie semplicemente convergente. Allora:*

(i) *se la serie* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *converge assolutamente e la sua somma è* S*, allora per ogni permutazione* π *la serie* $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\pi(k)}$ *converge assolutamente ed ha per somma* S*.*

(ii) *se la serie* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *non converge assolutamente, allora nessuna serie permutata converge assolutamente, ed inoltre per ogni* $S \in \mathbb{R}$ *esiste una permutazione* π *tale che la serie permutata* $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\pi(k)}$ *converga (semplicemente) ad* S*.*

Non presentiamo la dimostrazione di questo risultato, ma ci limitiamo a sottolineare ancora la differenza tra le somme finite e le serie non assolutamente convergenti: queste, cambiando l'ordine degli addendi, possono dare *qualunque* somma!

5.2 Successioni di funzioni

Indichiamo con I un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$.

Definizione 5.7 *Sia* $I \subset \mathbb{R}$ *e per ogni* $h \in \mathbb{N}$ *sia data la funzione* $f_h : I \to \mathbb{R}$*; risulta cosí definita la* successione di funzioni *reali* (f_h) *in* I*.*

1. *Diciamo che la successione* (f_h) converge in $x_0 \in I$ *se la successione numerica* $(f_h(x_0))$ *ha limite reale.*

2. *Diciamo che la successione* (f_h) converge puntualmente *in* $J \subset I$ *alla funzione* $f : J \to \mathbb{R}$ *se si ha*
$$\lim_{h\to\infty} f_h(x) = f(x) \qquad \forall x \in J.$$
La funzione f *è detta* limite puntuale *della successione* (f_h)*.*

3. *Diciamo che la successione* (f_h) converge uniformemente in J *alla funzione* $f : J \to \mathbb{R}$ *se si ha*
$$\lim_{h\to\infty} \sup_{x\in J} |f_h(x) - f(x)| = 0.$$

È importante capire sotto quali ipotesi di convergenza di una successione di funzioni (f_h) ad una funzione f le varie proprietà di cui godono le f_h continuano a valere per la funzione limite f. Vediamo qualche semplice esempio.

Esempio 5.1

1. È facile verificare che se le funzioni f_h sono tutte crescenti nell'insieme I e convergono puntualmente alla funzione f, allora anche la funzione f è crescente in I.

2. Siano $I = [0, 2\pi]$ e $f_h(x) = \sin^h x$; allora, $f_h(\pi/2) = 1$ per ogni h, $f_h(3\pi/2) = (-1)^h$ non converge, e $f_h(x) \to 0$ per ogni valore di x diverso da $\pi/2$, $3\pi/2$. Di conseguenza, la funzione limite f è definita in $J = I \setminus \{3\pi/2\}$, e vale $f(x) = 0$ per $x \neq \pi/2$, $f(\pi/2) = 1$.

3. Siano $I = [0, 1]$, $f_h(x) = e^{-hx}$. Allora il limite puntuale di (f_h) è la funzione che vale 1 per $x = 0$ e 0 altrimenti.

4. Siano $I = [0, \pi/2[$, $f_h(x) = \min\{\tan x, h\}$. Allora il limite puntuale di (f_h) è la funzione $\tan x$.

Questi esempi mostrano che in generale l'insieme di convergenza di una successione è piú piccolo dell'insieme ove le f_h sono definite, e che proprietà come la limitatezza, la continuità e (a maggior ragione) la derivabilità, non sono stabili per la convergenza puntuale. Questa è la motivazione principale che porta ad introdurre la nozione di convergenza uniforme.

Osservazione 5.8 La convergenza uniforme in J implica la convergenza puntuale per ogni $x_0 \in J$: basta osservare che per ogni $x_0 \in J$ si ha

$$|f_h(x_0) - f(x_0)| \le \sup_{x \in J} |f_h(x) - f(x)|$$

che tende a 0 se f_h converge uniformemente ad f in J. Il viceversa non è vero, neanche se si considerano funzioni continue ed insiemi compatti: sia infatti $I = [0, 1]$ e

$$f_h(x) = x^h \qquad 0 \le x \le 1. \tag{5.2}$$

La successione converge puntualmente alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le x < 1; \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

ma non vi converge uniformemente, dal momento che, posto $x_h = (1/2)^{1/h}$, risulta

$$\sup_{x \in I} |f_h(x) - f(x)| \ge f_h(x_h) = 1/2 \quad \text{non tende a zero.}$$

Osservazione 5.9 Se esplicitiamo le richieste sulla successione (f_h) affinché essa converga puntualmente o uniformemente ad f, otteniamo le seguenti equivalenze:

$$f_h \to f \text{ puntualmente in } J \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in J\ \exists \nu > 0 : |f_h(x) - f(x)| < \varepsilon\ \forall h \ge \nu,$$

mentre

$$f_h \to f \text{ uniformemente in } J \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \nu > 0 : |f_h(x) - f(x)| < \varepsilon\ \forall h \ge \nu,\ \forall x \in J.$$

In altri termini, nel primo caso il ν trovato dipende sia da ε che da x, mentre nel secondo dipende solo da ε. Tornando all'esempio (5.2), vediamo che, fissati $\varepsilon \in]0, 1[$ e $x \in [0, 1[$, risulta $x^h < \varepsilon$ se e solo se $x = 0$ e h è qualunque, oppure $x > 0$ e $h \ge \nu = \frac{\log \varepsilon}{\log x}$, sicché non si può scegliere un ν indipendente da x.

Per la convergenza uniforme delle successioni di funzioni vale il seguente criterio di Cauchy.

Teorema 5.10 (Criterio di Cauchy per successioni di funzioni) *La successione di funzioni $f_h(x)$, $x \in I$, converge uniformemente in I se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu > 0$ tale che per ogni $h > \nu$ e per ogni $p \in \mathbb{N}$ risulta*

$$\sup_{x \in I} |f_{h+p}(x) - f_h(x)| < \varepsilon. \tag{5.3}$$

Dim. Se $f_h \to f$ uniformemente in I allora banalmente per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu > 0$ tale che per ogni $h > \nu$ risulta $\sup_{x\in I} |f_h(x) - f(x)| < \varepsilon$ e quindi

$$\sup_{x\in I} |f_{h+p}(x) - f_h(x)| \le \sup_{x\in I} |f_{h+p}(x) - f(x)| + \sup_{x\in I} |f_h(x) - f(x)| < 2\varepsilon.$$

Viceversa, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu > 0$ tale che per ogni $h > \nu$ e per ogni $p \in \mathbb{N}$ risulta $\sup_{x\in I} |f_{h+p}(x) - f_h(x)| < \varepsilon$, allora ogni successione numerica $(f_h(x))_{h\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy per ogni $x \in I$ e per il criterio di Cauchy relativo alle successioni numeriche è convergente. Detto $f(x)$ il limite (puntuale), resta da provare che $f_h \to f$ uniformemente in I. Per questo, fissato $\varepsilon > 0$ e determinato ν come sopra, basta passare al limite per $p \to \infty$ nella (5.3), che vale per ogni $p \in \mathbb{N}$. □

La convergenza uniforme di una successione di funzioni ha numerose conseguenze sulle proprietà della funzione limite.

Teorema 5.11 (Continuità della funzione limite) *Supponiamo che la successione di funzioni $f_h : I \to \mathbb{R}$ converga uniformemente in I alla funzione f; se tutte le f_h sono continue nel punto $x_0 \in I$, allora anche la funzione f è continua in x_0; di conseguenza, se le f_h sono tutte continue in I, la funzione f è continua in I.*

Dim. Fissato $\varepsilon > 0$, dobbiamo provare che esiste $\delta > 0$ tale che $|x - x_0| < \delta$ implica $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Per la convergenza uniforme sappiamo che esiste $\nu > 0$ tale che per $h > \nu$ risulta $|f_h(x) - f(x)| < \varepsilon$ per ogni $x \in I$. Fissato allora un indice $n > \nu$, per la continuità di f_n in x_0 esiste $\delta > 0$ tale che $|x - x_0| < \delta$ implica $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$, sicché per $|x - x_0| < \delta$ risulta

$$|f(x) - f(x_0)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon$$

e quindi f è continua in x_0. □

Osservazione 5.12 1. Il teorema precedente fornisce un'altra prova del fatto che la successione (x^h) non può convergere uniformemente in $[0, 1]$; infatti, il suo limite puntuale non è una funzione continua.

2. Si dimostra il seguente enunciato:

   Sia $I = [a, b]$, siano f_h continue in I, e supponiamo che $f_h \to f$ uniformemente in $]a, b]$; allora si ha convergenza uniforme in $[a, b]$.

   Questo risultato è spesso utile nella discussione della convergenza uniforme: infatti, se è noto che la successione non converge nel punto a, oppure converge ma la funzione limite non è continua in a, si ha subito che non può convergere uniformemente in $]a, b]$.

   Per la dimostrazione, si fa osservare che la convergenza uniforme implica la convergenza anche della successione $(f_h(a))_{h\in\mathbb{N}}$; mostriamo che la successione $f_h(a)$ è di Cauchy, e cioè che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $h > \nu$ e per ogni $p \in \mathbb{N}$

$$|f_{h+p}(a) - f_h(a)| < \varepsilon.$$

   Fissato $\varepsilon > 0$, per la convergenza uniforme avremo un $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per $h > \nu$ e $p \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x\in(a,b]} |f_{h+p}(x) - f_h(x)| < \varepsilon.$$

Fissiamo quindi $h > \nu$ e $p \in \mathbb{N}$; la continuità di f_{h+p} e f_h, avremo che esiste $\delta > 0$ tale che se $x - a < \delta$, allora $|f_{h+p}(x) - f_{h+p}(a)| < \varepsilon$ e $|f_h(x) - f_h(a)| < \varepsilon$. In definitiva

$$|f_{h+p}(a) - f_h(a)| \leq |f_{h+p}(a) - f_{h+p}(x)| + |f_{h+p}(x) - f_h(x)| + |f_h(x) - f_h(a)| < 3\varepsilon,$$

e quindi $f_h(a) \to l := f(a)$. La convergenza uniforme su $[a, b]$ segue immediatamente.

Teorema 5.13 (Passaggio al limite sotto segno d'integrale) *Supponiamo che la successione di funzioni $f_h : I \to \mathbb{R}$ converga uniformemente in I alla funzione f e che tutte le f_h siano continue in I; allora, per ogni intervallo $[a, b] \subset I$ risulta*

$$\lim_{h\to\infty} \int_a^b f_h(x)dx = \int_a^b f(x)dx. \tag{5.4}$$

DIM. Notiamo che tutti gli integrali sono definiti, perché le f_h sono funzioni continue per ipotesi (quindi integrabili su ogni intevallo compatto), e la f è pure continua per il Teorema 5.11. Sia fissato $\varepsilon > 0$, e sia $\nu > 0$ tale che

$$M_h = \sup_{x\in I} |f_h(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall\ h \geq \nu$$

(tale ν esiste per la convergenza uniforme delle f_h ad f). Allora:

$$\Big|\int_a^b f_h(x)dx - \int_a^b f(x)dx\Big| \leq \int_a^b |f_h(x) - f(x)|dx \leq \int_a^b M_h dx < \varepsilon(b - a)$$

per ogni $h \geq \nu$. $\square$

Esempio 5.2

1. L'eguaglianza (5.4) non vale in generale su intervalli che non sono chiusi e limitati. Per esempio, la successione di funzioni

$$f_h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2h} & \text{per } -h < x < h \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

converge uniformemente a $f(x) \equiv 0$ in $\mathbb{R}$, ma $1 = \int_{\mathbb{R}} f_h \neq \int_{\mathbb{R}} f = 0$.

2. La sola convergenza puntuale non basta ad assicurare la validità della (5.4). Infatti, le $f_h(x) = 2hxe^{-hx^2}$ convergono puntualmente ad $f(x) = 0$ per ogni $x \in [0, 1]$, ma

$$\lim_{h\to+\infty} \int_0^1 f_h(x)dx = \lim_{h\to+\infty} (1 - e^{-h}) \neq \int_0^1 f(x)dx = 0.$$

3. In generale, non è vero che, se una successione di funzioni derivabili converge uniformemente, la funzione limite è essa pure derivabile. Per esempio, la successione di funzioni derivabili per ogni $x \in \mathbb{R}$ data da $f_h(x) = \sqrt{x^2 + 1/h}$ converge uniformemente alla funzione $f(x) = |x|$ che non è derivabile per $x = 0$. Infatti, dalle diseguaglianze

$$\Big(|x| - \frac{1}{\sqrt{h}}\Big) \leq \sqrt{x^2 + \frac{1}{h}} \leq |x| + \frac{1}{\sqrt{h}}$$

segue $\big|f_h(x) - |x|\big| \leq 1/\sqrt{h}$ per ogni h e per ogni x, il che prova la convergenza uniforme.

Inoltre, anche se la funzione limite è derivabile, in generale la sua derivata non è il limite delle derivate delle f_h. Per esempio, le funzioni $f_h(x) = \frac{\sin(hx)}{h}$ sono tutte derivabili, convergono a 0 uniformemente in $\mathbb{R}$, ma le loro derivate, $f_h'(x) = \cos(hx)$, non convergono alla derivata del limite.

Teorema 5.14 (Passaggio al limite sotto il segno di derivata) *Supponiamo che la successione di funzioni $f_h : I \to \mathbb{R}$ converga puntualmente in I alla funzione f, che le f_h siano tutte derivabili in I con derivate prime continue, e che la successione (f'_h) converga uniformemente in I alla funzione g. Allora la funzione f è derivabile in I, la sua derivata è g, e la successione (f_h) converge uniformemente ad f in ogni intervallo chiuso e limitato $[a,b] \subset I$.*

Dim. Fissato un punto $x_0 \in I$, per il Teorema fondamentale del calcolo si ha $f_h(x) = f_h(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'_h(t)dt$ per ogni $h \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in I$. Dalle ipotesi segue che $f_h(x) \to f(x)$ e $f_h(x_0) \to f(x_0)$ e che $\int_{x_0}^{x} f'_h(t)dt \to \int_{x_0}^{x} g(t)dt$. Ne segue che

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)dt, \tag{5.5}$$

e quindi, usando ancora il Teorema fondamentale del calcolo, f è derivabile e $f' = g$. Infine, la convergenza uniforme sugli intervalli chiusi e limitati segue da (5.5) e dal teorema 5.13. Infatti, fissato $[a,b] \subset I$ e scelto $x_0 = a$ nella (5.5), risulta

$$\lim_{h\to 0} \sup_{a \le x \le b} |f(x) - f_h(x)| \le |f(a) - f_h(a)| + \lim_{h\to 0} \sup_{a \le x \le b} |g(x) - f'_h(x)| = 0.$$

□

Osservazione 5.15 Dalla dimostrazione del Teorema si vede che è sufficiente la convergenza di $f_h(x_0)$ ad $f(x_0)$, in quanto questo implica la convergenza anche di $f_h(x)$ ad una funzione h che risulta derivabile, $h'(x) = g(x)$ e $h(x_0) = f(x_0)$.

5.3 Serie di funzioni

Come nel paragrafo precedente, indichiamo con I un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$. Data una successione di funzioni (u_k) in I, consideriamo la serie ad essa associata, denotata come nel caso delle serie numeriche con la notazione $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$. Naturalmente, come nel caso delle serie numeriche, intenderemo col termine *serie di funzioni* l'operazione che associa alla successione di termine generale u_k la successione delle somme parziali definita di seguito.

Definizione 5.16 *Sia $I \subset \mathbb{R}$; per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia data la funzione $u_k : I \to \mathbb{R}$, e consideriamo la serie di funzioni $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$. Definiamo la successione delle* somme parziali *(o* ridotte*) della serie ponendo, per ogni $h \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in I$, $f_h(x) = \sum_{k=0}^{h} u_k(x)$.*

1. *Diciamo che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$* converge in $x_0 \in I$ *se la successione $(f_h(x_0))$ ammette limite reale.*

2. *Diciamo che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$* converge puntualmente *alla funzione $f : J \to \mathbb{R}$ se la successione (f_h) converge puntualmente ad f in $J \subset I$. La funzione f è detta* somma *della serie in J e si denota anche $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$.*

3. *Diciamo che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$* converge uniformemente in J *alla funzione $f : J \to \mathbb{R}$ se la successione (f_h) converge uniformemente ad f in J.*

Se la serie converge ad f in J, si dice che f è la somma (puntuale o uniforme, secondo i casi) della serie, e si scrive $f = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$.

Osservazione 5.17 Si può formulare la definizione precedente dicendo che la serie $\sum_k u_k$ converge puntualmente o uniformemente se si verificano, rispettivamente le condizioni:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to\infty}\sum_{k=0}^{h} u_k(x) = f(x) \qquad \forall x \in J \qquad &\iff \\
\forall\varepsilon > 0, \forall x \in J\ \exists\nu > 0 : \Big| f(x) - \sum_{k=0}^{h} u_k(x)\Big| < \varepsilon\ \forall h \geq \nu, & \\
\lim_{h\to\infty}\sup_{x\in J}\Big| f(x) - \sum_{k=0}^{h} u_k(x)\Big| = 0 \qquad &\iff \\
\forall\varepsilon > 0\ \exists\nu > 0 : \sup_{x\in J}\Big| f(x) - \sum_{k=0}^{h} u_k(x)\Big| < \varepsilon\ \forall h \geq \nu \qquad &\iff \\
\forall\varepsilon > 0\ \exists\nu > 0 : \Big| f(x) - \sum_{k=0}^{h} u_k(x)\Big| < \varepsilon\ \forall h \geq \nu, \forall x \in J. &
\end{aligned}$$

Come nel caso delle successioni, anche nel caso delle serie di funzioni la convergenza uniforme in J implica la convergenza puntuale per ogni $x \in J$.

Come per le serie numeriche, si può dare per le serie di funzioni una nozione di convergenza assoluta, che non ha un'equivalente nella teoria delle successioni (ed infatti la definizione seguente non ricorre alla successione delle ridotte). Si può inoltre dare un'ulteriore nozione di convergenza, detta convergenza totale, che permette un uso diretto dei criteri di convergenza noti per le serie a termini positivi, ed implica, come vedremo, tutti gli altri tipi di convergenza.

Definizione 5.18 *Sia $I \subset \mathbb{R}$; per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia data la funzione $u_k : I \to \mathbb{R}$, e consideriamo la serie di funzioni $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$.*

1. *Diciamo che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$* converge puntualmente assolutamente *o, rispettivamente,* uniformemente assolutamente *in $J \subset I$ se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} |u_k|$ converge puntualmente (risp. uniformemente) in J.*

2. *Diciamo che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$* converge totalmente *in $J \subset I$ se la serie numerica $\sum_{k=0}^{\infty} \sup_{x\in J} |u_k(x)|$ converge.*

Osservazione 5.19 È immediato che, come nel caso delle serie numeriche, se una serie di funzioni converge assolutamente puntualmente (risp. uniformemente) allora converge puntualmente (risp. uniformemente); inoltre, è pure immediato per confronto che se la serie converge totalmente allora converge assolutamente uniformemente.

Una serie di funzioni può convergere assolutamente ma non uniformemente e viceversa. Per esempio,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \text{converge assolutamente in }]-1,1[$$

ma non converge uniformemente (altrimenti dovrebbe convergere anche per $x = -1, 1$), mentre usando il criterio di Leibniz si può verificare che la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} \quad \text{converge uniformemente in } [0, +\infty[$$

ma non converge assolutamente per alcun $x \in [0, +\infty[$ (per confronto con la serie armonica). Detta f la somma della serie, la convergenza uniforme segue subito dalla stima

$$\sup_{x \in [0,+\infty[} \Big| f(x) - \sum_{k=0}^{h} \frac{(-1)^k}{x+k} \Big| \le \frac{1}{x+(h+1)} \le \frac{1}{h+1},$$

che è conseguenza immediata della stima dell'errore nel criterio di Leibniz.

Come per le successioni, si può formulare un criterio di tipo Cauchy per la convergenza uniforme delle serie di funzioni.

Teorema 5.20 (Criterio di Cauchy per le serie di funzioni) *La serie di funzioni $\sum_k u_k(x)$, $x \in I$, converge uniformemente in I se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu > 0$ tale che per ogni $n > \nu$ e per ogni $p \in \mathbb{N}$ risulta*

$$\sup_{x \in I} \Big| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \Big| < \varepsilon.$$

Dim. Basta osservare che la successione delle ridotte

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$$

verifica le ipotesi del Teorema 5.10 e quindi converge uniformemente. □

Per verificare la convergenza totale di una serie, non occorre sempre necessariamente calcolare l'estremo superiore delle u_k in I; se si riesce a darne una valutazione sufficientemente accurata, ciò può bastare.

Teorema 5.21 (Criterio di Weierstrass) *Sia $I \subset \mathbb{R}$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia data la funzione $u_k : I \to \mathbb{R}$. Se esiste una successione numerica (M_k) tale che $|u_k(x)| \le M_k$ per ogni $x \in I$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ e la serie $\sum_k M_k$ è convergente, allora la serie di funzioni $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge totalmente in I.*

Dim. Il criterio segue facilmente dal criterio di Cauchy 5.20. Infatti, siccome $\sum_k M_k$ converge, per il criterio di Cauchy delle serie numeriche per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu > 0$ tale che per ogni $n > \nu$ e per ogn $p \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \varepsilon$$

e quindi anche

$$\Big| \sum_{k=n+1}^{n+p} \sup_{x \in I} u_k(x) \Big| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} \sup_{x \in I} |u_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \varepsilon.$$

Per il criterio di Cauchy uniforme la serie $\sum_k u_k$ converge totalmente in I. □

Esempio 5.3 Consideriamo ad esempio la serie di funzioni

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)\cos(k^2 \log|x|)}{k^2}, \qquad x > 0.$$

È chiaro che sarebbe quanto meno laborioso calcolare esplicitamente l'estremo superiore del termine generale per verificare direttamente la convergenza totale della serie in $\mathbb{R}$. D'altra parte, la semplice maggiorazione

$$\left| \sin(kx)\cos(k^2 \log x) \right| \le 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{|\sin(kx)\cos(k^2 \log x)|}{k^2} \le \frac{1}{k^2}$$

basta per concludere che la serie converge totalmente in $\mathbb{R}$, usando $M_k = 1/k^2$ nel criterio di Weierstrass e la convergenza della serie di termine generale $1/k^2$.

Per la somma di una serie di funzioni uniformemente convergente valgono proprietà analoghe a quelle viste per il limite uniforme di una successione, di cui sono conseguenze immediate.

Teorema 5.22 (Continuità della funzione somma) *Se la serie di funzioni $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge uniformemente in I alla funzione f e tutte le u_k sono continue nel punto $x_0 \in I$, allora anche la funzione f è continua in x_0; di conseguenza, se le u_k sono tutte continue in I, la funzione f è continua in I.*

Teorema 5.23 (Integrazione per serie) *Se la serie di funzioni $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge uniformemente in I alla funzione f e tutte le u_k sono continue in I allora, per ogni intervallo $[a, b] \subset I$ risulta*

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b u_k(x)dx.$$

Teorema 5.24 (Derivazione per serie) *Se la serie di funzioni $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge puntualmente in I alla funzione f, le u_k sono tutte derivabili in I con derivate prime continue, e la serie $\sum_{k=0}^{\infty} u'_k$ converge uniformemente in I alla funzione g, allora la funzione f è derivabile in I, la sua derivata è g, e la serie $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge uniformemente ad f in ogni intervallo chiuso e limitato $[a, b] \subset I$.*

5.4 Serie di potenze

Le serie di potenze sono particolari serie di funzioni, precisamente quelle il cui termine generale $u_k(x)$ è del tipo "potenza intera" e le cui ridotte sono di conseguenza polinomi. Tali serie godono di particolari proprietà: l'insieme di convergenza è sempre un intervallo, eventualmente ridotto ad un punto o coincidente con l'intera retta reale (mentre per una serie di funzioni generica può essere qualunque insieme), e la convergenza è assoluta in tutti i punti dell'insieme, esclusa al piú il bordo, e la somma è una funzione indefinitamente derivabile. I risultati riportati in questa sezione sono enunciati nel campo dei numeri reali $\mathbb{R}$, ma valgono anche nel campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$.

Definizione 5.25 *Si dice* serie di potenze di centro $x_0 \in \mathbb{R}$ e coefficienti $(c_k) \subset \mathbb{R}$ *la serie di funzioni*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{5.6}$$

Osservazione 5.26 1. Il primo termine di una serie di potenze per $x = x_0$ è sempre (sostituendo formalmente) $c_0 0^0$, ossia un'espressione priva di significato. Poiché per ogni altro valore di x esso vale c_0, gli si attribuisce il valore c_0 anche per $x = x_0$.

2. È bene tener presente, anche in vista di una corretta applicazione dei risultati esposti nel seguente Teorema 5.29, che il coefficiente c_k nella (5.6) è *il coefficiente della k-esima potenza di x* e non il coefficiente del k-esimo termine non nullo nella serie. Per esempio, se si considera la serie $\sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h x^{2h}$ risulta:

$$c_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è dispari} \\ 1 & \text{se } k = 2h, \text{ con } h \text{ pari} \\ -1 & \text{se } k = 2h, \text{ con } h \text{ dispari} \end{cases}$$

3. L'insieme di convergenza J di una serie di potenze non è mai vuoto, in quanto esso contiene sempre almeno il punto x_0. Vi sono casi in cui la serie converge solo per $x = x_0$, per esempio per la serie $\sum_k k! x^k$ vale $J = \{0\}$.

Per le serie di potenze in $\mathbb{R}$ vale un criterio di Cauchy uniforme analogo al Teorema 5.20 e di conseguenza il criterio di Weierstrass 5.21.

Definizione 5.27 (Raggio di convergenza) *Sia*

$$\ell = \limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|c_k|};$$

si dice raggio di convergenza *della serie (5.6) il seguente valore*

$$\rho = \begin{cases} 0 & \textit{se } \ell = +\infty \\ +\infty & \textit{se } \ell = 0 \\ \ell^{-1} & \textit{se } 0 < \ell < +\infty. \end{cases}$$

Osservazione 5.28 Il valore ρ sopra definito può essere 0 (come nel caso della serie nell'Osservazione 5.26.3), un qualunque numero positivo oppure $+\infty$. Per esempio, le serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} c^k z^k, \ c > 0, \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

hanno raggi di convergenza rispettivi $\rho = 1/c$ e $\rho = +\infty$, come si può agevolmente verificare dalla definizione, oppure usando il criterio del rapporto (vedi Osservazione 5.30.4).

Le proprietà delle serie di potenze sono raccolte nel seguente enunciato, noto come Teorema di Cauchy-Hadamard.

Teorema 5.29 (Proprietà delle serie di potenze) *Data la serie di potenze (5.6), sia $\rho \in [0, +\infty]$ il suo raggio di convergenza.*

(i) *Se* $\rho = 0$ *allora la serie converge solo per* $x = x_0$.

(ii) *Se* $\rho = +\infty$ *allora la serie converge assolutamente per ogni* $x \in \mathbb{R}$ *e converge totalmente in ogni cerchio chiuso di* $\mathbb{R}$.

(iii) *Se* $0 < \rho < +\infty$ *allora la serie converge assolutamente per ogni* $x \in B_\rho(x_0)$, *converge totalmente in ogni cerchio chiuso contenuto in* $B_\rho(x_0)$ *e non converge per alcun* x *tale che* $|x - x_0| > \rho$.

(iv) *Posto* $I = B_\rho(x_0)$ *se* $0 < \rho < +\infty$ *e* $I = \mathbb{R}$ *se* $\rho = +\infty$, *detta* $f : I \to \mathbb{R}$ *la somma della serie,* $f \in C^\infty(I)$ *e vale l'eguaglianza:*

$$f^{(h)}(x) = \sum_{k=h}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-h+1)c_k(x-x_0)^{k-h} \tag{5.7}$$

per ogni $h \in \mathbb{N}$ *e per ogni* $x \in I$. *In particolare, la serie al secondo membro ha raggio di convergenza* ρ *per ogni* h.

DIM. Supponiamo per semplicità $x_0 = 0$ (vedi Osservazione 5.30(1)).
(i) Se $\rho = 0$ allora per le proprietà del massimo limite esiste una successione k_n tale che $\sqrt[k_n]{|c_{k_n}|} \to +\infty$ per $n \to +\infty$. Allora per ogni $x \neq 0$ risulta $\sqrt[k_n]{|c_{k_n} x^{k_n}|} \to +\infty$ e quindi la serie non converge.
(ii) Per ipotesi, $\lim_k \sqrt[k]{|c_k|} = 0$. Fissato $r > 0$, per il criterio della radice la serie numerica $\sum_k |c_k| r^k$ converge: infatti

$$\lim_k \sqrt[k]{|c_k| r^k} = r \lim_k \sqrt[k]{|c_k|} = 0$$

e per il criterio di Weierstrass la serie converge totalmente in $\overline{B_r}$. Infatti $|c_k x^k| \leq |c_k| r^k$ per $|z| \leq r$. Per l'arbitrarietà di r la serie converge assolutamente in $\mathbb{R}$.
(iii) Per ipotesi, $\limsup_k \sqrt[k]{|c_k|} = 1/\rho$, quindi per $r < \rho$ e $r/\rho < h < 1$ risulta $\sqrt[k]{|c_k| r^k} \leq h < 1$ definitivamente, e per il criterio della radice la serie numerica $\sum_k |c_k| r^k$ converge. Ragionando come nel punto (ii) la serie $\sum_k c_k x^k$ converge totalmente in $\overline{B_r}$ e per l'arbitrarietà di $r < \rho$ si ha la convergenza assoluta in B_ρ. Se ora $|x| > \rho$ allora $\limsup_k \sqrt[k]{|c_k x^k|} > 1$ e quindi, come nel punto (i), $|c_k x^k| > 1$ per infiniti indici, e la serie $\sum_k c_k x^k$ non converge.
(iv) La serie nel punto (iv) è ottenuta derivando h volte la serie di potenze (5.6). Poiché per ogni h risulta $\sqrt[k-h]{|c_k|} = (\sqrt[k]{|c_k|})^{k/(k-h)}$ e quindi

$$\limsup_k \sqrt[k-h]{k(k-1)\cdots(k-h+1)|c_k|} = \limsup_k \sqrt[k]{|c_k|},$$

il raggio di convergenza della serie derivata è uguale a ρ. La tesi segue quindi dal Teorema 5.24. □

Osservazione 5.30 1. Notiamo che il raggio di convergenza dipende solo dai coefficienti della serie, e non dal loro centro. Infatti, cambiando il centro della serie (5.6) si trasla il cerchio di convergenza, ma non se ne altera il raggio.

2. Il Teorema 5.29 non contiene alcuna affermazione sul comportamento delle serie di potenze sulla circonferenza $|x - x_0| = \rho$, bordo del cerchio di convergenza. Infatti, si possono verificare tutti i casi, come vedremo.

3. Nelle ipotesi del punto (iv) del Teorema 5.29 e usando il Teorema 5.23 segue che una serie di potenze si può integrare termine a termine nel suo intervallo di convergenza; supponendo che (5.6) abbia raggio di convergenza $\rho > 0$, risulta
$$\begin{aligned} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k \quad \Rightarrow \quad \int_{x_0}^{x} f(t)dt &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} c_k (t - x_0)^k dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1} \end{aligned}$$
per ogni $x \in]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$. Infatti, il Teorema 5.23 si applica, per ogni $x \in]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$, all'intervallo compatto di estremi x_0 e x, ove la serie converge totalmente e quindi uniformemente.

4. Se esiste il limite $\ell = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}$, si ha ovviamente $\rho = 1/\ell$, con le convenzioni che se $\ell = 0$ allora $\rho = +\infty$ e se $\ell = +\infty$ allora $\rho = 0$. In generale però il limite delle radici non esiste. Per esempio, la serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} x^{k^2}$ ha raggio di convergenza $\rho = 1$. Infatti, i coefficienti sono $c_k = 1$ se $k = n^2$ è il quadrato di un numero naturale, $c_k = 0$ altrimenti e quindi il limite della successione $\sqrt[k]{|c_k|}$ non esiste. Poiché la successione $\sqrt[k]{|c_k|}$ assume solo i valori 0 e 1, e ciascuno di essi infinite volte, il suo massimo limite è 1, $\ell = 1$ e $\rho = 1$.

5. Supponiamo che la serie (5.6) abbia raggio di convergenza $\rho > 0$. Dal punto precedente segue che sostituendo αt^n (con $\alpha \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$) al posto di $x - x_0$ si ottiene un'altra serie di potenze con raggio di convergenza pari a $\sqrt[n]{\rho/|\alpha|}$.

A volte è possibile calcolare il raggio di convergenza di una serie di potenze usando i *rapporti* anziché le radici dei coefficienti. Questo calcolo è in generale più agevole, ma può accadere che esista il limite delle radici k-esime, ma non dei rapporti. Il seguente risultato è noto come teorema di Ernesto Cesàro.

Teorema 5.31 (Teorema di Cesaro) *Data la successione reale (a_k) con $a_k > 0$ per ogni k, se esiste il limite*
$$\ell = \lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}, \tag{5.8}$$
allora esiste anche
$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k},$$
e vale ℓ.

DIM. Supponiamo $\ell \neq 0, \infty$; in questi casi è facile modificare la dimostrazione seguente. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\nu > 0$ tale che
$$k > \nu \quad \Longrightarrow \quad (\ell - \varepsilon) a_{k-1} < a_k < (\ell + \varepsilon) a_{k-1}.$$
Iterando queste diseguaglianze fino ad un indice $n > \nu$ otteniamo
$$(\ell - \varepsilon)^n \frac{a_\nu}{(\ell - \varepsilon)^\nu} < a_n < \frac{a_\nu}{(\ell + \varepsilon)^\nu} (\ell + \varepsilon)^n.$$
Posto $c_1 = \frac{a_\nu}{(\ell-\varepsilon)^\nu}$ e $c_2 = \frac{a_\nu}{(\ell+\varepsilon)^\nu}$, se ne ricava
$$\sqrt[n]{c_1}(\ell - \varepsilon) < \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{c_2}(l + \varepsilon)$$
per ogni $n > \nu$. Poiché $\sqrt[n]{c_i} \to 1$ per $n \to \infty$ per $i = 1, 2$ segue la tesi. □

Naturalmente, il precedente teorema si può applicare alle serie di potenze, e in questo caso dice che se vale (5.8) con $a_k = |c_k|$ allora il raggio di convergenza della serie (5.6) è $1/\ell$, con le solite convenzioni per $\ell = 0, \infty$.

Esempio 5.4 I seguenti esempi, in cui il raggio di convergenza è sempre $\rho = 1$, mostrano che sul bordo dell'intervallo di convergenza di una serie di potenze non è possibile prevedere il comportamento della serie:

$$\begin{array}{lll} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k & \text{converge per} & |x| < 1; \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2} & \text{converge per} & |x| \leq 1. \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} & \text{converge per} & x \in \overline{B_1},\ x \neq 1; \end{array}$$

il primo esempio è la serie geometrica (che sappiamo convergere per $|x| < 1$ e non può convergere per $|x| = 1$ perché in tal caso x^k non tende a zero), il secondo segue dalla convergenza della serie armonica generalizzata di esponente 2 e dal criterio di Weierstrass, mentre il terzo segue dal fatto che per $x = 1$ si ha la serie armonica con potenza 1 e per per $x = -1$ la serie a segni.

5.5 Serie di Taylor

In questo paragrafo consideriamo serie di potenze *reali*. Abbiamo osservato che le serie di potenze, in un certo senso, generalizzano i polinomi. Inoltre, sappiamo che ad ogni funzione f di classe C^h in un intervallo I, si può associare, per ogni $x_0 \in I$, il polinomio di Taylor di grado h di centro x_0. È quindi ora naturale associare ad una funzione f di classe C^∞ una serie di potenze. Ci aspettiamo che in molti casi la somma della serie, i cui coefficienti sono definiti con la stessa logica dei coefficienti dei polinomi di Taylor, sia proprio la funzione f da cui siamo partiti. Ciò in effetti accade in molte situazioni, ma non sempre.

Definizione 5.32 (Serie di Taylor) *Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$, x_0 interno ad I, e sia $f \in C^\infty(I)$; si dice* serie di Taylor di f di punto iniziale x_0 *la serie di potenze*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{5.9}$$

(i) *Si dice che f è* sviluppabile in serie di Taylor di centro x_0 in I *se la serie (5.9) converge ad f in I.*

(ii) *Si dice che f è* analitica reale in I *se per ogni $x_0 \in I$ esiste $\rho > 0$ tale che la serie (5.9) converge ad f in $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$.*

Esempio 5.5 Per ogni funzione C^∞ è evidentemente possibile *scrivere* la serie di Taylor. Il fatto che la serie converga, e che la somma sia la funzione di partenza, è invece da verificare.

1. La somma di una serie di potenze è sempre sviluppabile in serie di Taylor nel suo intervallo di convergenza.

2. La funzione
$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$
appartiene a $C^\infty(\mathbb{R})$ e verifica $f^{(k)}(0) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, sicché la sua serie di Taylor di centro 0 è la serie con tutti i coefficienti nulli. Tale serie converge banalmente in $\mathbb{R}$, ma la sua somma è 0 per ogni $x \in \mathbb{R}$, ma coincide con la funzione f solo per $x = 0$.

3. La funzione $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, vedi (5.12), è analitica reale in $\mathbb{R}$, ma non è sviluppabile in serie di Taylor in $\mathbb{R}$, in quanto per nessun $x_0 \in \mathbb{R}$ la serie di Taylor di f con centro x_0 ha raggio di convergenza $\rho = +\infty$.

4. Le ridotte di della serie di Taylor di f non sono altro che i polinomi di Taylor di f.

Molte funzioni elementari sono analitiche reali, ed alcune sviluppabili in serie di Taylor sull'intera retta reale $\mathbb{R}$. Elenchiamo alcuni sviluppi, precisando l'intervallo di validità

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \qquad x \in]-1,1[. \tag{5.10}$$

Quest'esempio è di fatto già noto, è la serie geometrica. Da questa formula si possono dedurre altri sviluppi, cambiando variabile. Sostituendo x con $-x$ si ottiene

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x} \qquad x \in]-1,1[, \tag{5.11}$$

mentre sostituendo x con $-x^2$ si ottiene (vedi Osservazione 5.30.5):

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1+x^2} \qquad x \in]-1,1[. \tag{5.12}$$

Integrando termine a termine la (5.11) si ottiene

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} = \log(1+x) \qquad x \in]-1,1[, \tag{5.13}$$

ed integrando termine a termine (5.12)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = \arctan x \qquad x \in]-1,1[. \tag{5.14}$$

Infine, segnaliamo la *serie binomiale* che fornisce lo sviluppo di Taylor della funzione $(1+x)^\alpha$ con centro $x = 0$, per $\alpha \neq 0$ qualunque. Posto (*coefficiente binomiale*)

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

si ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = (1+x)^\alpha \qquad x \in]-1,1[. \tag{5.15}$$

Infine, il calcolo diretto dei coefficienti permette di ottenere facilmente gli sviluppi di Taylor delle funzioni e^x, $\sin x$ e $\cos x$, che valgono per ogni $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \qquad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \qquad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}. \tag{5.16}$$

Notiamo che, coerentemente con le proprietà di parità e disparità del seno e del coseno, i rispettivi sviluppi contengono solo potenze pari o dispari. I risultati di convergenza per le serie di Taylor della funzione esponenziale, del seno e del coseno si possono dedurre, per esempio, dal seguente risultato.

Teorema 5.33 (Criterio di sviluppabilità in serie di Taylor) *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f \in C^\infty(I)$. Se esistono $L, M > 0$ tali che*

$$|f^{(k)}(x)| \leq ML^k \qquad \forall\, x \in I, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

allora f è sviluppabile in serie di Taylor in I.

Dim. La dimostrazione segue dalla formula di Taylor con resto di Lagrange

$$f(x) = f(x_0) + \ldots + \frac{f^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}(x - x_0)^{k-1} + \frac{f^{(k)(\eta)}}{k!}(x - x_0)^k$$

dove η è un punto interno all'intervallo di estremi x_0 e x. Dalla stima per la derivata si ottiene quindi che

$$\left| f(x) - f(x_0) + \ldots - \frac{f^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}(x - x_0)^{k-1} \right| \leq M \frac{L^k}{k!} |x - x_0|^k.$$

Dato che l'ultimo termine è un addendo della serie

$$Me^{L|x-x_0|} = M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^k}{k!} |x - x_0|^k,$$

allora, dato che la serie è convergente, si ottiene la sviluppabilità. □

5.6 Serie di Fourier

Un tipo di sviluppo in serie rispetto a funzioni elementari completamente diverso da quello di Taylor è fornito dagli sviluppi in serie di Fourier. Questa volta le funzioni di partenza non sono potenze, ma funzioni trigonometriche elementari del tipo $\sin(kx)$ e $\cos(kx)$. Gli sviluppi in serie di Fourier si prestano ad approssimare le funzioni periodiche, di cui ora ricordiamo la definizione.

Definizione 5.34 (Funzioni periodiche) *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; diciamo che f è* periodica di periodo T *(o T-*periodica*) se $T > 0$ è il piú piccolo numero reale positivo tale che $f(x+T) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Se f è T-periodica, T si dice* periodo *della funzione f.*

Osservazione 5.35 1. Osserviamo che se f è T-periodica allora $f(x + kT) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $k \in \mathbf{Z}$.

2. Fissato $T > 0$ e posto $\omega = \frac{2\pi}{T}$, le funzioni $\sin(k\omega x)$ e $\cos(k\omega x)$ sono T-periodiche per ogni $k \in \mathbf{Z}$. Il numero ω si dice *pulsazione*.

Al contrario degli sviluppi in serie di Taylor, che presuppongono di partire da funzioni di classe C^∞, gli sviluppi in serie di Fourier si possono considerare per funzioni anche assai poco regolari. Infatti i coefficienti degli sviluppi in serie di Fourier si ottengono calcolando degli integrali, e non delle derivate. Definiamo una classe funzionale in cui si possono considerare gli sviluppi di Fourier, anche se essa non è certamente la piú ampia possibile.

Definizione 5.36 (Funzioni continue a tratti) *Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice* continua a tratti *se per ogni intervallo limitato $I \subset \mathbb{R}$ essa è continua in I eccetto un numero finito di punti di I, ed in tali punti ammette limiti finiti a destra ed a sinistra. Se f è continua a tratti, per ogni punto x_0 di discontinuità poniamo*

$$f(x_0+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x), \qquad f(x_0-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

Ricordiamo che una funzione continua a tratti è integrabile in ogni intervallo limitato, quindi possiamo dare la seguente definizione.

Definizione 5.37 (Serie di Fourier) *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua a tratti e T-periodica, e sia $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Poniamo*

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx,$$

e, per $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$,

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(k\omega x)dx, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin(k\omega x)dx.$$

I numeri a_0, a_k, b_k si dicono coefficienti di Fourier della funzione f. *Si dice* serie di Fourier associata ad f *la serie*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x) \Big). \tag{5.17}$$

Come nel caso delle serie di Taylor, in generale non si può affermare che la serie di Fourier converga, né, se converge, che la sua somma sia f. Ciò vale sotto ipotesi piú restrittive su f della sola continuità a tratti.

Definizione 5.38 (Funzioni regolari a tratti) *La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice* regolare a tratti *se è continua a tratti e, inoltre, valgono le condizioni seguenti:*

(i) *f è derivabile in ogni intervallo di continuità, eccetto un numero finito di punti;*

(ii) *in ogni punto di discontinuità x_0 di f o di f' esistono finiti i limiti*

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x), \qquad \lim_{x \to x_0^-} f'(x).$$

Teorema 5.39 (Convergenza della serie di Fourier) *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica e regolare a tratti. Allora, la serie di Fourier di f converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$ al valore*

$$\tilde{f}(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Inoltre, la convergenza è uniforme in ogni intervallo chiuso in cui f è continua.

Osservazione 5.40

1. Si vede facilmente con un cambiamento di variabili che per calcolare i coefficienti di Fourier non bisogna necessariamente integrare sull'intervallo $(-T/2, T/2)$, ma qualunque intervallo di lunghezza T, cioè pari ad un periodo, fornisce lo stesso risultato.

2. Osserviamo esplicitamente che se f è periodica, regolare a tratti e *continua* in $\mathbb{R}$ allora la sua serie di Fourier converge *uniformemente in* $\mathbb{R}$; infatti si può applicare il Teorema 5.39 all'intervallo chiuso $\mathbb{R}$.

3. Il termine $a_0/2$ che compare nella serie di Fourier di f esprime la *media integrale* di f nel periodo.

4. **(Funzioni pari e dispari)** Ricordiamo che f si dice *pari* se $f(x) = f(-x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e si dice *dispari* se $f(x) = -f(-x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e che le funzioni $\cos(k\omega x)$ sono pari, le funzioni $\sin(k\omega x)$ sono dispari. Possiamo osservare che se f è pari allora tutti i coefficienti b_k sono nulli, mentre se f è dispari sono nulli tutti i coefficienti a_k. Infatti, in entrambi i casi nelle formule della Definizione 5.37 detti coefficienti si ottengono attraverso integrali di funzioni dispari su intervalli simmetrici rispetto all'origine, che dànno risultato nullo. Inoltre, si possono ottenere i coefficienti non nulli usando le formule semplificate

$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos(k\omega x)dx, \quad b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin(k\omega x)dx$$

   per f pari e dispari rispettivamente.

5. **(Funzioni non periodiche)** Data una funzione f definita in un intervallo limitato qualunque, che senza ledere la generalità possiamo supporre sia del tipo $[0, b]$, si può definire una estensione periodica arbitraria di f e studiare la convergenza della serie di Fourier dell'estensione. Il Teorema 5.39 implica, in particolare, che se due funzioni sviluppabili in serie di Fourier coincidono in un intervallo J allora le loro serie convergono allo stesso limite in J. Di conseguenza, se si considerano due estensioni periodiche differenti di f, e le rispettive serie di Fourier convergono entrambe ad esse, si ottengono due serie di Fourier diverse convergenti, *nell'intervallo* $(0, b)$, alla stessa funzione f. Queste considerazioni portano ad associare una serie di Fourier anche ad una funzione non periodica, passando per una sua estensione periodica. Le estensioni periodiche naturali di una $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ sono le seguenti:

   (i) l'estensione f^* di periodo b cosí definita:

$$f^*(x) = f(x - kb), \qquad x \in \mathbb{R},$$

   dove, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbf{Z}$ è l'unico intero tale che $x - kb \in [0, b)$.

(ii) l'estensione dispari f_d di periodo $2b$ cosí definita:

$$f_d(x) = -f(-x) \quad \text{per } x \in [-b,0), \quad f_d^*(x) = f_d(x-2kb),\ x \in \mathbb{R},$$

dove per ogni $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbf{Z}$ è l'unico intero tale che $x - 2kb \in [-b,b)$. Tale estensione, essendo dispari, dà luogo ad una serie di Fourier contenente solo i termini in $\sin(k\omega x)$, detta *sviluppo in soli seni di* f. A rigore, perché f_d sia dispari, occorre anche $f(0) = 0$; in realtà, anche senza supporre tale condizione si ottengono i medesimi risultati, dal momento che né i coefficienti di Fourier né il valore della somma nello 0 dipendono dal valore $f(0)$.

(iii) l'estensione pari f_p di periodo $2b$ cosí definita:

$$f_p(x) = f(-x) \quad \text{per } x \in [-b,0), \quad f_p^*(x) = f_p(x-2kb),\ x \in \mathbb{R},$$

dove per ogni $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbf{Z}$ è l'unico intero tale che $x - 2kb \in [-b,b)$. Tale estensione, essendo pari, dà luogo ad una serie di Fourier contenente solo i termini in $\cos(k\omega x)$, detta *sviluppo in soli coseni di* f. Osserviamo che il prolungamento pari di f ha il vantaggio di essere una funzione contnua su tutto $\mathbb{R}$ se f è continua in $[0,b)$, con limite finito in b.

6. **(Serie di Fourier con ampiezza e fase)**A volte si scrive la serie di Fourier di f in modo equivalente nella forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\omega x + \phi_k),$$

che mette in evidenza i coefficienti di *ampiezza* A_k e di *fase* ϕ_k. I legami tra i coefficienti si deducono facilmente dalla formula di addizione $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$, e sono dati da:

$$a_0 = A_0 \cos\phi_0, \qquad a_k = A_k \cos\phi_k, \qquad b_k = -A_k \sin\phi_k,\ k \geq 1.$$

7. **(Uguaglianza di Parseval)** Usando le formule di prostaferesi si verificano facilmente le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned}
&\int_{-T/2}^{T/2} \sin(k\omega x)\cos(h\omega x)dx = 0,\\
&\int_{-T/2}^{T/2} \sin(k\omega x)\sin(h\omega x)dx = \frac{T}{2}\delta_{hk},\\
&\int_{-T/2}^{T/2} \cos(k\omega x)\cos(h\omega x)dx = \frac{T}{2}\delta_{hk},
\end{aligned}$$

(ove $\delta_{hk} = 1$ se $h = k$ e $\delta_{hk} = 0$ se $h \neq k$) da cui, passando al limite sotto il segno di integrale, si può dedurre l'*eguaglianza di Parseval*

$$\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx = \frac{T}{2}\Big(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 + |b_k|^2\Big).$$

Per il calcolo delle serie di Fourier è a volte utile il seguente risultato, che lega i coefficienti di f a quelli delle sue primitive.

Teorema 5.41 (Integrazione della serie di Fourier) *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua a tratti e T-periodica, e poniamo*

$$F(x) = \int_{-T/2}^{x} \big(f(t) - a_0/2\big)dt.$$

Allora, F è T-periodica, continua e regolare a tratti, sicché la sua serie di Fourier converge uniformemente ad F in $\mathbb{R}$. Inoltre, i suoi coefficienti di Fourier A_k e B_k sono legati ai coefficienti a_k, b_k di f dalle relazioni

$$A_k = -\frac{b_k}{\omega k}, \qquad B_k = \frac{a_k}{\omega k} \qquad \textit{per } k \geq 1.$$

Osserviamo che nel teorema precedente non si suppone che la serie di Fourier di f sia convergente, ed infatti quest'ipotesi non è necessaria. Per quanto riguarda la derivazione termine a termine, non c'è nulla di nuovo rispetto al Teorema 5.24, che vale in generale per le serie di funzioni.

Osservazione 5.42 [Serie di Fourier complesse] Quanto detto finora vale senza cambiamenti per funzioni a valori complessi (un caso utile in varie applicazioni), dal momento che si può ragionare separatamente sulla parte reale e sulla parte immaginaria. Per le funzioni a valori complessi valgono quindi ancora le formule nella Definizione 5.37, ma si può scrivere la serie di Fourier in modo piú naturale usando esponenziali complessi anziché funzioni trigonometriche reali. Tenendo conto delle relazioni di Eulero

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}), \qquad \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}),$$

si ottiene la *serie di Fourier complessa*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega x}$$

con

$$\begin{cases} c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \\ c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k) \end{cases} \qquad \begin{cases} a_k = c_k + c_{-k} \\ b_k = i(c_k - c_{-k}) \end{cases}$$

e i coefficienti c_k possono essere calcolati tramite le

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-ik\omega x}dx, \qquad k \in \mathbf{Z}.$$

inoltre, l'eguaglianza di Parseval diviene

$$\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx = T \sum_{k\in\mathbf{Z}} |c_k|^2$$

e, detti c_k, C_k i coefficienti di Fourier complessi delle funzioni f, F del Teorema 5.41, valgono le relazioni $C_k = c_k/(i\omega k)$ per ogni $k \in \mathbf{Z}$, $k \neq 0$, $C_0 = 0$.