Successioni e serie di funzioni *

In questa dispensa generalizzeremo la trattazione delle successioni e delle serie al caso in cui i termini delle stesse siano non numeri reali, ma funzioni reali di una variabile reale. Parte della terminologia ed alcuni risultati saranno ovvie generalizzazioni delle nozioni corrispondenti già viste, ma dovremo affrontare anche molti problemi nuovi ed introdurre nuove nozioni. Infatti, stavolta saranno contemporaneamente presenti due variabili, quella relativa al dominio delle funzioni e l'indice della successione. Trattiamo prima il caso delle successioni e poi quello delle serie, premettendo dei richiami sui concetti di massimo e minimo limite di una successione numerica. Tra le serie di funzioni rivestono un ruolo particolare, per l'importanza in molti problemi applicativi e per la particolarità dei risultati che si possono ottenere, le serie di potenze e le serie di Fourier, che trattiamo in due appositi paragrafi.

1 Massimo e minimo limite di una successione

Data una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, si definiscono il *minimo limite* ed il *massimo limite* ponendo

$$\ell_1 = \liminf_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbf{N}} \inf_{k\geq n} a_k, \qquad \ell_2 = \limsup_{n\to+\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbf{N}} \sup_{k\geq n} a_k.$$

Commentiamo solo la definizione di minimo limite, lasciando per esercizio la riformulazione delle considerazioni che seguono al caso del massimo limite. Data $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, si può costruire la successione (e'_n) ponendo $e'_n = \inf_{k\geq n} a_k$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. Siccome ad ogni passo si calcola l'estremo inferiore su un insieme più piccolo, la successione (e'_n) è crescente e quindi per il teorema fondamentale sulle successioni monotone esiste il suo limite e coincide con $\sup_n\{e'_n\}$. Inoltre, dalle proprietà dell'estremo inferiore e dell'estremo superiore si ricava la seguente caratterizzazione del massimo e minimo limite. Presentiamo in dettaglio il caso in cui ℓ_1, ℓ_2 siano numeri reali. Il caso in cui sono infiniti verrà brevemente discusso nell'Osservazione 1.3.

Proposizione 1.1 *Sia data la successione reale* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

1. *Per* $\ell_1 \in \mathbf{R}$, *risulta* $\ell_1 = \liminf_{n\to+\infty} a_n$ *se e solo se valgono le condizioni:*
   (a) *per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\nu > 0$ *tale che* $a_n > \ell_1 - \varepsilon$ *per ogni* $n \geq \nu$;
   (b) *per ogni* $\varepsilon > 0$ *e per ogni* $n \in \mathbf{N}$ *esiste* $k > n$ *tale che* $a_k < \ell_1 + \varepsilon$.
2. *Per* $\ell_2 \in \mathbf{R}$, *risulta* $\ell_2 = \limsup_{n\to+\infty} a_n$ *se e solo se valgono le condizioni:*
   (a) *per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\nu > 0$ *tale che* $a_n < \ell_2 + \varepsilon$ *per ogni* $n \geq \nu$;

*Si ringraziano i prof. Albanese, Leaci e Pallara dell'Università del Salento per la concessione dei presenti appunti, che sono stati integrati con alcune dimostrazioni e osservazioni.

(b) per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $\nu \in \mathbf{N}$ esiste $n > \nu$ tale che $a_n > \ell_2 - \varepsilon$.

Dim. Concentriamoci sul lim inf, la dimostrazione della caratterizzazione del lim sup essendo analoga. Poiché $\ell_1 = \sup_n e'_n$, tutto dipende dalle proprietà dell'estremo superiore.

Se $\sup_n e'_n = \ell_1$ allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che $e'_\nu = \inf_{k \geq \nu} a_k \geq \ell_1 - \varepsilon$ e quindi per monotonia $e'_n \geq \ell_1 - \varepsilon$ per ogni $n \geq \nu$ e vale (a). D'altra parte, se $\ell_1 = \liminf_n a_n$, allora $e'_n = \inf_{k \geq n} a_k \leq \ell_1$ per ogni n, e quindi per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni n esiste $k > n$ tale che $a_k \leq \ell_1 + \varepsilon$ e vale (b).

Viceversa, se vale (a) allora e'_n è definitivamente maggiore di $\ell_1 - \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$ e quindi $\liminf_n a_n \geq \ell_1$. Se vale anche (b) allora per ogni $\varepsilon > 0$ e'_n è minore di $\ell_1 + \varepsilon$ per infiniti indici, e quindi $\liminf_n a_n \leq \ell_1$. QED

Dalla Proposizione precedente segue in particolare che $\liminf_{n \to +\infty} a_n$ è il più piccolo e $\limsup_{n \to +\infty} a_n$ è il più grande tra i numeri reali ℓ che godono della proprietà che esiste una successione estratta da (a_n) convergente ad ℓ. Ovvia conseguenza di quanto detto è che $\liminf_{h \to \infty} f_h \leq \limsup_{h \to \infty} f_h$, con uguaglianza se e solo se esiste il limite di a_n.

Proposizione 1.2 *Se $\ell_1 = \liminf_n a_n \in \mathbf{R}$ e $\ell_2 = \limsup_n a_n \in \mathbf{R}$ ed $(a_{k_n})_{n \in \mathbf{N}}$ è una successione estratta tale che $a_{k_n} \to \ell$, allora $\ell_1 \leq \ell \leq \ell_2$. Inoltre, esistono sottosuccessioni convergenti ad ℓ_1 e ad ℓ_2.*

Dim. Poiché per le proprietà (a) del minimo e del massimo limite di (a_n) discusse nella proposizione precedente per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu > 0$ tale che $n > \nu$ implica $\ell_1 - \varepsilon < a_n < \ell_2 + \varepsilon$, nessuna sottosuccessione può convergere ad un limite fuori dall'intervallo $[\ell_1, \ell_2]$.

Proviamo ora che esiste una sottosuccessione convergente ad ℓ_1, usando le proprietà (a) e (b) della Proposizione precedente con $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Per (a) troviamo ν_n tale che $a_k > \ell_1 - \frac{1}{n}$ per ogni $k \geq \nu_n$, e per (b) troviamo induttivamente $k_n > \max\{\nu_n, k_{n-1}\}$ tale che $a_{k_n} < \ell_1 + \frac{1}{n}$. La successione (a_{k_n}) così costruita converge ad ℓ_1. QED

Osservazione 1.3 Se $\ell_1 = -\infty$ oppure $\ell_2 = +\infty$, allora la Proposizione 1.1 va riformulata come segue:

1. $\liminf_n a_n = -\infty$ se e solo se per ogni $K > 0$ e per ogni $n \in \mathbf{N}$ esiste $k > n$ tale che $a_k < -K$.

2. $\limsup_n a_n = +\infty$ se e solo se per ogni $K > 0$ e per ogni $n \in \mathbf{N}$ esiste $k > n$ tale che $a_k > K$.

La Proposizione 1.2 vale esattamente negli stessi termini, ma la dimostrazione va adattata. Questo viene lasciato per esercizio.

Abbiamo anche la seguente caratterizzazione delle successioni che ammettono limite.

Proposizione 1.4 *Data una succession $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$, le seguenti affermazioni sono equivalenti;*

1. *posto $\ell_1 = \liminf_n a_n$ e $\ell_2 = \limsup_n a_n$, allora $\ell_1 = \ell_2$;*

2. *la successione ammette limite, cioè esiste $\ell \in \mathbf{R}$ tale che $\ell = \lim_n a_n$;*

3. *la successione è di Cauchy, cioè per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $h \geq \nu$ e $p \in \mathbf{N}$, $|a_{h+p} - a_h| < \varepsilon$.*

Dim.

1.⇒2. Grazie alla Proposizione 1.1, punti 1.(a) e 2.(a), sappiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esite $\nu \in \mathbf{N}$ tale che $\ell_1 - \varepsilon < a_h < \ell_2 + \varepsilon$ per ogni $h \geq \nu$. Dato che $\ell_1 = \ell_2 = \ell$, ne segue che la successione ammette limite uguale ad ℓ.

2.⇒3. È chiaro che se la successione ammette limite $\ell \in \mathbf{R}$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che $|a_h - \ell| < \varepsilon$ per ogni $h \geq \nu$. In particolare, per $h \geq \nu$ e $p \in \mathbf{N}$ abbiamo che

$$|a_{h+p} - a_h| \leq |a_{h+p} - \ell| + |a_h - \ell| < 2\varepsilon,$$

e cioè la successione è di Cauchy.

3.⇒1. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e $\nu \in \mathbf{N}$ per il quale sia verificata la condizione di Cauchy; grazie alla Proposizione 1.1, sappiamo che esistono $h \geq \nu$ e $k \geq \nu$ per i quali

$$|a_h - \ell_1| < \varepsilon, \qquad |a_k - \ell_2| < \varepsilon.$$

Supponendo $h < k$ e scritto $p = k - h$, troviamo che

$$|\ell_1 - \ell_2| \leq |a_h - \ell_1| + |a_h - a_{h+p}| + |a_{h+p} - \ell_2| < 3\varepsilon,$$

da cui, per l'arbitrarietà di ε, si ha $\ell_1 = \ell_2$.

QED

Infine, richiamiamo alcune proprietà delle serie numeriche, cioè il *prodotto di due serie* e il *teorema di riordinamento.*

Teorema 1.5 (Prodotto di due serie) *Date due serie a termini reali o complessi assolutamente convergenti* $\sum_k a_k$ *e* $\sum_k b_k$*, risulta*

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\Big) \tag{1.1}$$

Il teorema seguente dovrebbe far capire quanta distanza ci sia tra le serie e le somme finite. Una delle proprietà più "ovvie" delle somme finite è la proprietà *commutativa.* È naturale domandarsi se essa valga anche per le serie. Per formulare correttamente il problema bisogna introdurre il concetto di *permutazione dei termini di una serie.* Date la serie $\sum_k a_k$ ed una funzione bigettiva $\pi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ (permutazione), si dice *serie ottenuta permutando i termini di* $\sum_k a_k$ *secondo* π *la serie* $\sum_k a_{\pi(k)}$. Notiamo che i valori assunti dalla successione $(a_{\pi(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ sono *gli stessi di* $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$*, e vengono assunti lo stesso numero di volte*, per cui se avessimo a che fare con una somma finita passare da $\sum_k a_k$ a $\sum_k a_{\pi(k)}$ si ridurrebbe a "cambiare l'ordine degli addendi", ed è ben noto che in tal caso "la somma non cambia". Per le serie infinite le cose vanno in modo completamente diverso, a meno che non si abbia convergenza assoluta.

Teorema 1.6 *Sia* $\sum_k a_k$ *una serie semplicemente convergente. Allora:*

(i) *se la serie* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *converge assolutamente e la sua somma è* S*, allora per ogni permutazione* π *la serie* $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\pi(k)}$ *converge assolutamente ed ha per somma* S*.*

(ii) *se la serie* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *non converge assolutamente, allora nessuna serie permutata converge assolutamente, ed inoltre per ogni* $S \in \mathbf{R}$ *esiste una permutazione* π *tale che la serie permutata* $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\pi(k)}$ *converga (semplicemente) ad* S*.*

Non presentiamo la dimostrazione di questo risultato, ma ci limitiamo a sottolineare ancora la differenza tra le somme finite e le serie non assolutamente convergenti: queste, cambiando l'ordine degli addendi, possono dare *qualunque* somma!

2 Successioni di funzioni

Indichiamo con I un sottoinsieme non vuoto di $\mathbf{R}$.

Definizione 2.1 *Sia $I \subset \mathbf{R}$ e per ogni $h \in \mathbf{N}$ sia data la funzione $f_h : I \to \mathbf{R}$; risulta cosí definita la* successione di funzioni *reali (f_h) in I.*

1. *Diciamo che la successione (f_h)* converge in $x_0 \in I$ *se la successione numerica $(f_h(x_0))$ ha limite reale.*
2. *Diciamo che la successione (f_h)* converge puntualmente *in $J \subset I$ alla funzione $f : J \to \mathbf{R}$ se si ha*
$$\lim_{h\to\infty} f_h(x) = f(x) \qquad \forall x \in J.$$
La funzione f è detta limite puntuale *della successione (f_h).*
3. *Diciamo che la successione (f_h)* converge uniformemente in J *alla funzione $f : J \to \mathbf{R}$ se si ha*
$$\lim_{h\to\infty} \sup_{x\in J} |f_h(x) - f(x)| = 0.$$

È importante capire sotto quali ipotesi di convergenza di una successione di funzioni (f_h) ad una funzione f le varie proprietà di cui godono le f_h continuano a valere per la funzione limite f. Vediamo qualche semplice esempio.

Esempi 2.2

1. È facile verificare che se le funzioni f_h sono tutte crescenti nell'insieme I e convergono puntualmente alla funzione f, allora anche la funzione f è crescente in I.
2. Siano $I = [0, 2\pi]$ e $f_h(x) = \sin^h x$; allora, $f_h(\pi/2) = 1$ per ogni h, $f_h(3\pi/2) = (-1)^h$ non converge, e $f_h(x) \to 0$ per ogni valore di x diverso da $\pi/2, 3\pi/2$. Di conseguenza, la funzione limite f è definita in $J = I \setminus \{3\pi/2\}$, e vale $f(x) = 0$ per $x \neq \pi/2$, $f(\pi/2) = 1$.
3. Siano $I = [0, 1]$, $f_h(x) = e^{-hx}$. Allora il limite puntuale di (f_h) è la funzione che vale 1 per $x = 0$ e 0 altrimenti.
4. Siano $I = [0, \pi/2[$, $f_h(x) = \min\{\tan x, h\}$. Allora il limite puntuale di (f_h) è la funzione $\tan x$.

Questi esempi mostrano che in generale l'insieme di convergenza di una successione è piú piccolo dell'insieme ove le f_h sono definite, e che proprietà come la limitatezza, la continuità e (a maggior ragione) la derivabilità, non sono stabili per la convergenza puntuale. Questa è la motivazione principale che porta ad introdurre la nozione di convergenza uniforme.

Osservazione 2.3 La convergenza uniforme in J implica la convergenza puntuale per ogni $x_0 \in J$: basta osservare che per ogni $x_0 \in J$ si ha
$$|f_h(x_0) - f(x_0)| \leq \sup_{x\in J} |f_h(x) - f(x)|$$

che tende a 0 se f_h converge uniformemente ad f in J. Il viceversa non è vero, neanche se si considerano funzioni continue ed insiemi compatti: sia infatti $I = [0, 1]$ e

$$f_h(x) = x^h \qquad\qquad 0 \leq x \leq 1. \tag{2.2}$$

La successione converge puntualmente alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1; \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

ma non vi converge uniformemente, dal momento che, posto $x_h = (1/2)^{1/h}$, risulta

$$\sup_{x \in I} |f_h(x) - f(x)| \geq f_h(x_h) = 1/2 \quad \text{non tende a zero.}$$

Osservazione 2.4 Se esplicitiamo le richieste sulla successione (f_h) affinché essa converga puntualmente o uniformemente ad f, otteniamo le seguenti equivalenze:

$$f_h \to f \text{ puntualmente in } J \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in J\ \exists \nu > 0 : |f_h(x) - f(x)| < \varepsilon\ \forall h \geq \nu,$$

mentre

$$f_h \to f \text{ uniformemente in } J \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \nu > 0 : |f_h(x) - f(x)| < \varepsilon\ \forall h \geq \nu,\ \forall x \in J.$$

In altri termini, nel primo caso il ν trovato dipende sia da ε che da x, mentre nel secondo dipende solo da ε. Tornando all'esempio (2.2), vediamo che, fissati $\varepsilon \in]0, 1[$ e $x \in [0, 1[$, risulta $x^h < \varepsilon$ se e solo se $x = 0$ e h è qualunque, oppure $x > 0$ e $h \geq \nu = \frac{\log \varepsilon}{\log x}$, sicché non si può scegliere un ν indipendente da x.

Per la convergenza uniforme delle successioni di funzioni vale il seguente criterio di Cauchy.

Teorema 2.5 (Criterio di Cauchy per le successioni di funzioni) *La successione di funzioni $f_h(x)$, $x \in I$, converge uniformemente in I se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu > 0$ tale che per ogni $h > \nu$ e per ogni $p \in \mathbf{N}$ risulta*

$$\sup_{x \in I} |f_{h+p}(x) - f_h(x)| < \varepsilon. \tag{2.3}$$

DIM. Se $f_h \to f$ uniformemente in I allora banalmente per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu > 0$ tale che per ogni $h > \nu$ risulta $\sup_{x \in I} |f_h(x) - f(x)| < \varepsilon$ e quindi

$$\sup_{x \in I} |f_{h+p}(x) - f_h(x)| \leq \sup_{x \in I} |f_{h+p}(x) - f(x)| + \sup_{x \in I} |f_h(x) - f(x)| < 2\varepsilon.$$

Viceversa, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu > 0$ tale che per ogni $h > \nu$ e per ogni $p \in \mathbf{N}$ risulta $\sup_{x \in I} |f_{h+p}(x) - f_h(x)| < \varepsilon$, allora ogni successione numerica $(f_h(x))_{h \in \mathbf{N}}$ è di Cauchy per ogni $x \in I$ e per il criterio di Cauchy relativo alle successioni numeriche è convergente. Detto $f(x)$ il limite (puntuale), resta da provare che $f_h \to f$ uniformemente in I. Per questo, fissato $\varepsilon > 0$ e determinato ν come sopra, basta passare al limite per $p \to \infty$ nella (2.3), che vale per ogni $p \in \mathbf{N}$. $\boxed{QED}$

La convergenza uniforme di una successione di funzioni ha numerose conseguenze sulle proprietà della funzione limite.

Teorema 2.6 (Continuità della funzione limite) *Supponiamo che la successione di funzioni $f_h : I \to \mathbf{R}$ converga uniformemente in I alla funzione f; se tutte le f_h sono continue nel punto $x_0 \in I$, allora anche la funzione f è continua in x_0; di conseguenza, se le f_h sono tutte continue in I, la funzione f è continua in I.*

DIM. Fissato $\varepsilon > 0$, dobbiamo provare che esiste $\delta > 0$ tale che $|x - x_0| < \delta$ implica $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Per la convergenza uniforme sappiamo che esiste $\nu > 0$ tale che per $h > \nu$ risulta $|f_h(x) - f(x)| < \varepsilon$ per ogni $x \in I$. Fissato allora un indice $n > \nu$, per la continuità di f_n in x_0 esiste $\delta > 0$ tale che $|x - x_0| < \delta$ implica $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$, sicché per $|x - x_0| < \delta$ risulta

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon$$

e quindi f è continua in x_0. $\boxed{QED}$

Osservazioni 2.7

1. Il teorema precedente fornisce un'altra prova del fatto che la successione (x^h) non può convergere uniformemente in $[0, 1]$; infatti, il suo limite puntuale non è una funzione continua.

2. Si dimostra il seguente enunciato:

   Sia $I = [a, b]$, siano f_h continue in I, e supponiamo che $f_h \to f$ uniformemente in $]a, b]$; allora si ha convergenza uniforme in $[a, b]$.

   Questo risultato è spesso utile nella discussione della convergenza uniforme: infatti, se è noto che la successione non converge nel punto a, oppure converge ma la funzione limite non è continua in a, si ha subito che non può convergere uniformemente in $]a, b]$.

   Per la dimostrazione, si fa osservare che la convergenza uniforme implica la convergenza anche della successione $(f_h(a))_{h\in\mathbf{N}}$; mostriamo che la successione $f_h(b)$ è di Cauchy, e cioè che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $h > \nu$ e per ogni $p \in \mathbf{N}$

   $$|f_{h+p}(a) - f_h(a)| < \varepsilon.$$

   Fissato $\varepsilon > 0$, per la convergenza uniforme avremo un $\nu \in \mathbf{N}$ tale che per $h > \nu$ e $p \in \mathbf{N}$

   $$\sup_{x\in(a,b]} |f_{h+p}(x) - f_h(x)| < \varepsilon.$$

   Fissiamo quindi $h > \nu$ e $p \in \mathbf{N}$; la continuità di f_{h+p} e f_h, avremo che esiste $\delta > 0$ tale che se $x - a < \delta$, allora $|f_{h+p}(x) - f_{h+p}(a)| < \varepsilon$ e $|f_h(x) - f_h(a)| < \varepsilon$. In definitiva

   $$|f_{h+p}(a) - f_h(a)| \leq |f_{h+p}(a) - f_{h+p}(x)| + |f_{h+p}(x) - f_h(x)| + |f_h(x) - f_h(a)| < 3\varepsilon,$$

   e quindi $f_h(a) \to l := f(a)$. La convergenza uniforme su $[a, b]$ segue immediatamente.

Teorema 2.8 (Passaggio al limite sotto il segno d'integrale) *Supponiamo che la successione di funzioni $f_h : I \to \mathbf{R}$ converga uniformemente in I alla funzione f e che tutte le f_h siano continue in I; allora, per ogni intervallo $[a, b] \subset I$ risulta*

$$\lim_{h\to\infty} \int_a^b f_h(x)dx = \int_a^b f(x)dx. \tag{2.4}$$

DIM. Notiamo che tutti gli integrali sono definiti, perché le f_h sono funzioni continue per ipotesi (quindi integrabili su ogni intevallo compatto), e la f è pure continua per il Teorema 2.6. Sia fissato $\varepsilon > 0$, e sia $\nu > 0$ tale che

$$M_h = \sup_{x \in I} |f_h(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall\ h \geq \nu$$

(tale ν esiste per la convergenza uniforme delle f_h ad f). Allora:

$$\Big| \int_a^b f_h(x)dx - \int_a^b f(x)dx \Big| \leq \int_a^b |f_h(x) - f(x)|dx \leq \int_a^b M_h dx < \varepsilon(b-a)$$

per ogni $h \geq \nu$. $\boxed{QED}$

Esempi 2.9

1. L'eguaglianza (2.4) non vale in generale su intervalli che non sono chiusi e limitati. Per esempio, la successione di funzioni

$$f_h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2h} & \text{per } -h < x < h \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

converge uniformemente a $f(x) \equiv 0$ in $\mathbf{R}$, ma $1 = \int_{\mathbf{R}} f_h \neq \int_{\mathbf{R}} f = 0$.

2. La sola convergenza puntuale non basta ad assicurare la validità della (2.4). Infatti, le $f_h(x) = 2hxe^{-hx^2}$ convergono puntualmente ad $f(x) = 0$ per ogni $x \in [0,1]$, ma

$$\lim_{h \to +\infty} \int_0^1 f_h(x)dx = \lim_{h \to +\infty} (1 - e^{-h}) \neq \int_0^1 f(x)dx = 0.$$

3. In generale, non è vero che, se una successione di funzioni derivabili converge uniformemente, la funzione limite è essa pure derivabile. Per esempio, la successione di funzioni derivabili per ogni $x \in \mathbf{R}$ data da $f_h(x) = \sqrt{x^2 + 1/h}$ converge uniformemente alla funzione $f(x) = |x|$ che non è derivabile per $x = 0$. Infatti, dalle diseguaglianze

$$\Big(|x| - \frac{1}{\sqrt{h}}\Big) \leq \sqrt{x^2 + \frac{1}{h}} \leq |x| + \frac{1}{\sqrt{h}}$$

segue $\big|f_h(x) - |x|\big| \leq 1/\sqrt{h}$ per ogni h e per ogni x, il che prova la convergenza uniforme.

Inoltre, anche se la funzione limite è derivabile, in generale la sua derivata non è il limite delle derivate delle f_h. Per esempio, le funzioni $f_h(x) = \frac{\sin(hx)}{h}$ sono tutte derivabili, convergono a 0 uniformemente in $\mathbf{R}$, ma le loro derivate, $f'_h(x) = \cos(hx)$, non convergono alla derivata del limite.

Teorema 2.10 (Passaggio al limite sotto il segno di derivata) *Supponiamo che la successione di funzioni $f_h : I \to \mathbf{R}$ converga puntualmente in I alla funzione f, che le f_h siano tutte derivabili in I con derivate prime continue, e che la successione (f'_h) converga uniformemente in I alla funzione g. Allora la funzione f è derivabile in I, la sua derivata è g, e la successione (f_h) converge uniformemente ad f in ogni intervallo chiuso e limitato $[a,b] \subset I$.*

DIM. Fissato un punto $x_0 \in I$, per il Teorema fondamentale del calcolo si ha $f_h(x) = f_h(x_0) + \int_{x_0}^x f_h'(t)dt$ per ogni $h \in \mathbf{N}$ e per ogni $x \in I$. Dalle ipotesi segue che $f_h(x) \to f(x)$ e $f_h(x_0) \to f(x_0)$ e che $\int_{x_0}^x f_h'(t)dt \to \int_{x_0}^x g(t)dt$. Ne segue che

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x g(t)dt, \tag{2.5}$$

e quindi, usando ancora il Teorema fondamentale del calcolo, f è derivabile e $f' = g$. Infine, la convergenza uniforme sugli intervalli chiusi e limitati segue da (2.5) e dal teorema 2.8. Infatti, fissato $[a,b] \subset I$ e scelto $x_0 = a$ nella (2.5), risulta

$$\lim_{h\to 0} \sup_{a\le x\le b} |f(x) - f_h(x)| \le |f(a) - f_h(a)| + \lim_{h\to 0} \sup_{a\le x\le b} |g(x) - f_h'(x)| = 0.$$

$\boxed{QED}$

Osservazioni 2.11 Dalla dimostrazione del Teorema si vede che è sufficiente la convergenza di $f_h(x_0)$ ad $f(x_0)$, in quanto questo implica la convergenza anche di $f_h(x)$ ad una funzione h che risulta derivabile, $h'(x) = g(x)$ e $h(x_0) = f(x_0)$.

3 Serie di funzioni

Come nel paragrafo precedente, indichiamo con I un sottoinsieme non vuoto di $\mathbf{R}$. Data una successione di funzioni (u_k) in I, consideriamo la serie ad essa associata, denotata come nel caso delle serie numeriche con la notazione $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$. Naturalmente, come nel caso delle serie numeriche, intenderemo col termine *serie di funzioni* l'operazione che associa alla successione di termine generale u_k la successione delle somme parziali definita di seguito.

Definizione 3.1 *Sia $I \subset \mathbf{R}$; per ogni $k \in \mathbf{N}$ sia data la funzione $u_k : I \to \mathbf{R}$, e consideriamo la serie di funzioni $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$. Definiamo la successione delle* somme parziali *(o* ridotte*) della serie ponendo, per ogni $h \in \mathbf{N}$ e per ogni $x \in I$, $f_h(x) = \sum_{k=0}^{h} u_k(x)$.*

1. *Diciamo che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$* converge in *$x_0 \in I$ se la successione $(f_h(x_0))$ ammette limite reale.*

2. *Diciamo che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$* converge puntualmente *alla funzione $f : J \to \mathbf{R}$ se la successione (f_h) converge puntualmente ad f in $J \subset I$. La funzione f è detta* somma *della serie in J e si denota anche $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$.*

3. *Diciamo che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$* converge uniformemente *in J alla funzione $f : J \to \mathbf{R}$ se la successione (f_h) converge uniformemente ad f in J.*

Se la serie converge ad f in J, si dice che f è la somma (puntuale o uniforme, secondo i casi) della serie, e si scrive $f = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$.

Osservazione 3.2 Si può formulare la definizione precedente dicendo che la serie $\sum_k u_k$ converge puntualmente o uniformemente se si verificano, rispettivamente le condizioni:

$$\lim_{h\to\infty}\sum_{k=0}^{h} u_k(x) = f(x) \qquad \forall x \in J \qquad \iff$$

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in J\ \exists \nu > 0 : \Big| f(x) - \sum_{k=0}^{h} u_k(x) \Big| < \varepsilon\ \forall h \geq \nu,$$

$$\lim_{h\to\infty}\sup_{x\in J}\Big| f(x) - \sum_{k=0}^{h} u_k(x) \Big| = 0 \qquad \iff$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \nu > 0 : \sup_{x\in J}\Big| f(x) - \sum_{k=0}^{h} u_k(x) \Big| < \varepsilon\ \forall h \geq \nu \qquad \iff$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \nu > 0 : \Big| f(x) - \sum_{k=0}^{h} u_k(x) \Big| < \varepsilon\ \forall h \geq \nu, \forall x \in J.$$

Come nel caso delle successioni, anche nel caso delle serie di funzioni la convergenza uniforme in J implica la convergenza puntuale per ogni $x \in J$.

Come per le serie numeriche, si può dare per le serie di funzioni una nozione di convergenza assoluta, che non ha un'equivalente nella teoria delle successioni (ed infatti la definizione seguente non ricorre alla successione delle ridotte). Si può inoltre dare un'ulteriore nozione di convergenza, detta convergenza totale, che permette un uso diretto dei criteri di convergenza noti per le serie a termini positivi, ed implica, come vedremo, tutti gli altri tipi di convergenza.

Definizione 3.3 *Sia $I \subset \mathbf{R}$; per ogni $k \in \mathbf{N}$ sia data la funzione $u_k : I \to \mathbf{R}$, e consideriamo la serie di funzioni $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$.*

1. *Diciamo che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$* converge puntualmente assolutamente *o, rispettivamente,* uniformemente assolutamente *in $J \subset I$ se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} |u_k|$ converge puntualmente (risp. uniformemente) in J.*

2. *Diciamo che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$* converge totalmente *in $J \subset I$ se la serie numerica $\sum_{k=0}^{\infty} \sup_{x\in J} |u_k(x)|$ converge.*

Osservazione 3.4 È immediato che, come nel caso delle serie numeriche, se una serie di funzioni converge assolutamente puntualmente (risp. uniformemente) allora converge puntualmente (risp. uniformemente); inoltre, è pure immediato per confronto che se la serie converge totalmente allora converge assolutamente uniformemente.

Una serie di funzioni può convergere assolutamente ma non uniformemente e viceversa. Per esempio,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \text{converge assolutamente in }]-1, 1[$$

ma non converge uniformemente (altrimenti dovrebbe convergere anche per $x = -1, 1$), mentre usando il criterio di Leibniz si può verificare che la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} \quad \text{converge uniformemente in } [0, +\infty[$$

ma non converge assolutamente per alcun $x \in [0, +\infty[$ (per confronto con la serie armonica). Detta f la somma della serie, la convergenza uniforme segue subito dalla stima

$$\sup_{x\in[0,+\infty[} \Big| f(x) - \sum_{k=0}^{h} \frac{(-1)^k}{x+k} \Big| \leq \frac{1}{x+(h+1)} \leq \frac{1}{h+1},$$

che è conseguenza immediata della stima dell'errore nel criterio di Leibniz.

Come per le successioni, si può formulare un criterio di tipo Cauchy per la convergenza uniforme delle serie di funzioni.

Teorema 3.5 (Criterio di Cauchy per le serie di funzioni) *La serie di funzioni $\sum_k u_k(x)$, $x \in I$, converge uniformemente in I se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu > 0$ tale che per ogni $n > \nu$ e per ogni $p \in \mathbf{N}$ risulta*

$$\sup_{x\in I} \Big| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \Big| < \varepsilon.$$

Dim. Basta osservare che la successione delle ridotte

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$$

verifica le ipotesi del Teorema 2.5 e quindi converge uniformemente. $\boxed{QED}$

Per verificare la convergenza totale di una serie, non occorre sempre necessariamente calcolare l'estremo superiore delle u_k in I; se si riesce a darne una valutazione sufficientemente accurata, ciò può bastare.

Teorema 3.6 (Criterio di Weierstrass) *Sia $I \subset \mathbf{R}$ e per ogni $k \in \mathbf{N}$ sia data la funzione $u_k : I \to \mathbf{R}$. Se esiste una successione numerica (M_k) tale che $|u_k(x)| \leq M_k$ per ogni $x \in I$ e per ogni $k \in \mathbf{N}$ e la serie $\sum_k M_k$ è convergente, allora la serie di funzioni $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge totalmente in I.*

Dim. Il criterio segue facilmente dal criterio di Cauchy 3.5. Infatti, siccome $\sum_k M_k$ converge, per il criterio di Cauchy delle serie numeriche per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu > 0$ tale che per ogni $n > \nu$ e per ogn $p \in \mathbf{N}$ si ha

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \varepsilon$$

e quindi anche

$$\Big| \sum_{k=n+1}^{n+p} \sup_{x\in I} u_k(x) \Big| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \sup_{x\in I} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \varepsilon.$$

Per il criterio di Cauchy uniforme la serie $\sum_k u_k$ converge totalmente in I. $\boxed{QED}$

Esempio 3.7 Consideriamo ad esempio la serie di funzioni

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)\cos(k^2 \log|x|)}{k^2}, \qquad x > 0.$$

È chiaro che sarebbe quanto meno laborioso calcolare esplicitamente l'estremo superiore del termine generale per verificare direttamente la convergenza totale della serie in $\mathbf{R}$. D'altra parte, la semplice maggiorazione

$$\Big|\sin(kx)\cos(k^2\log x)\Big| \leq 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{|\sin(kx)\cos(k^2\log x)|}{k^2} \leq \frac{1}{k^2}$$

basta per concludere che la serie converge totalmente in $\mathbf{R}$, usando $M_k = 1/k^2$ nel criterio di Weierstrass e la convergenza della serie di termine generale $1/k^2$.

Per la somma di una serie di funzioni uniformemente convergente valgono proprietà analoghe a quelle viste per il limite uniforme di una successione, di cui sono conseguenze immediate.

Teorema 3.8 (Continuità della funzione somma) *Se la serie di funzioni $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge uniformemente in I alla funzione f e tutte le u_k sono continue nel punto $x_0 \in I$, allora anche la funzione f è continua in x_0; di conseguenza, se le u_k sono tutte continue in I, la funzione f è continua in I.*

Teorema 3.9 (Integrazione per serie) *Se la serie di funzioni $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge uniformemente in I alla funzione f e tutte le u_k sono continue in I allora, per ogni intervallo $[a,b] \subset I$ risulta*

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b u_k(x)dx.$$

Teorema 3.10 (Derivazione per serie) *Se la serie di funzioni $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge puntualmente in I alla funzione f, le u_k sono tutte derivabili in I con derivate prime continue, e la serie $\sum_{k=0}^{\infty} u_k'$ converge uniformemente in I alla funzione g, allora la funzione f è derivabile in I, la sua derivata è g, e la serie $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge uniformemente ad f in ogni intervallo chiuso e limitato $[a,b] \subset I$.*

4 Serie di potenze

Le serie di potenze sono particolari serie di funzioni, precisamente quelle il cui termine generale $u_k(x)$ è del tipo "potenza intera" e le cui ridotte sono di conseguenza polinomi. Tali serie godono di particolari proprietà: l'insieme di convergenza è sempre un intervallo, eventualmente ridotto ad un punto o coincidente con l'intera retta reale (mentre per una serie di funzioni generica può essere qualunque insieme), e la convergenza è assoluta in tutti i punti dell'insieme, esclusa al piú il bordo, e la somma è una funzione indefinitamente derivabile. I risultati riportati in questa sezione sono enunciati nel campo dei numeri reali $\mathbf{R}$, ma valgono anche nel campo dei numeri complessi $\mathbf{C}$.

Definizione 4.1 *Si dice* serie di potenze di centro $x_0 \in \mathbf{R}$ e coefficienti $(c_k) \subset \mathbf{R}$ *la serie di funzioni*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k, \qquad x \in \mathbf{R}. \tag{4.6}$$

Osservazioni 4.2

1. Il primo termine di una serie di potenze per $x = x_0$ è sempre (sostituendo formalmente) $c_0 0^0$, ossia un'espressione priva di significato. Poiché per ogni altro valore di x esso vale c_0, gli si attribuisce il valore c_0 anche per $x = x_0$.

2. È bene tener presente, anche in vista di una corretta applicazione dei risultati esposti nel seguente Teorema 4.5, che il coefficiente c_k nella (4.6) è *il coefficiente della k-esima potenza di x* e non il coefficiente del k-esimo termine non nullo nella serie. Per esempio, se si considera la serie $\sum_{h=0}^{\infty}(-1)^h x^{2h}$ risulta:

$$c_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è dispari} \\ 1 & \text{se } k = 2h, \text{ con } h \text{ pari} \\ -1 & \text{se } k = 2h, \text{ con } h \text{ dispari} \end{cases}$$

3. L'insieme di convergenza J di una serie di potenze non è mai vuoto, in quanto esso contiene sempre almeno il punto x_0. Vi sono casi in cui la serie converge solo per $x = x_0$, per esempio per la serie $\sum_k k! x^k$ vale $J = \{0\}$.

Per le serie di potenze in $\mathbf{R}$ vale un criterio di Cauchy uniforme analogo al Teorema 3.5 e di conseguenza il criterio di Weierstrass 3.6.

Definizione 4.3 (Raggio di convergenza) *Sia*

$$\ell = \limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|c_k|};$$

si dice raggio di convergenza *della serie (4.6) il seguente valore*

$$\rho = \begin{cases} 0 & \textit{se } \ell = +\infty \\ +\infty & \textit{se } \ell = 0 \\ \ell^{-1} & \textit{se } 0 < \ell < +\infty. \end{cases}$$

Osservazione 4.4 Il valore ρ sopra definito può essere 0 (come nel caso della serie nell'Osservazione 4.2.3), un qualunque numero positivo oppure $+\infty$. Per esempio, le serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} c^k z^k, \; c > 0, \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

hanno raggi di convergenza rispettivi $\rho = 1/c$ e $\rho = +\infty$, come si può agevolmente verificare dalla definizione, oppure usando il criterio del rapporto (vedi Osservazione 4.6.4).

Le proprietà delle serie di potenze sono raccolte nel seguente enunciato, noto come Teorema di Cauchy-Hadamard.

Teorema 4.5 (Proprietà delle serie di potenze) *Data la serie di potenze (4.6), sia $\rho \in [0, +\infty]$ il suo raggio di convergenza.*

(i) *Se $\rho = 0$ allora la serie converge solo per $x = x_0$.*

(ii) *Se $\rho = +\infty$ allora la serie converge assolutamente per ogni $x \in \mathbf{R}$ e converge totalmente in ogni cerchio chiuso di $\mathbf{R}$.*

(iii) *Se* $0 < \rho < +\infty$ *allora la serie converge assolutamente per ogni* $x \in B_\rho(x_0)$, *converge totalmente in ogni cerchio chiuso contenuto in* $B_\rho(x_0)$ *e non converge per alcun* x *tale che* $|x - x_0| > \rho$.

(iv) *Posto* $I = B_\rho(x_0)$ *se* $0 < \rho < +\infty$ *e* $I = \mathbf{R}$ *se* $\rho = +\infty$, *detta* $f : I \to \mathbf{R}$ *la somma della serie,* $f \in C^\infty(I)$ *e vale l'eguaglianza:*

$$f^{(h)}(x) = \sum_{k=h}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-h+1)c_k(x-x_0)^{k-h} \tag{4.7}$$

per ogni $h \in \mathbf{N}$ *e per ogni* $x \in I$. *In particolare, la serie al secondo membro ha raggio di convergenza* ρ *per ogni* h.

DIM. Supponiamo per semplicità $x_0 = 0$ (vedi Osservazione 4.6(1)).
(i) Se $\rho = 0$ allora per le proprietà del massimo limite esiste una successione k_n tale che $\sqrt[k_n]{|c_{k_n}|} \to +\infty$ per $n \to +\infty$. Allora per ogni $x \neq 0$ risulta $\sqrt[k_n]{|c_{k_n} x^{k_n}|} \to +\infty$ e quindi la serie non converge.
(ii) Per ipotesi, $\lim_k \sqrt[k]{|c_k|} = 0$. Fissato $r > 0$, per il criterio della radice la serie numerica $\sum_k |c_k| r^k$ converge: infatti

$$\lim_k \sqrt[k]{|c_k| r^k} = r \lim_k \sqrt[k]{|c_k|} = 0$$

e per il criterio di Weierstrass la serie converge totalmente in $\overline{B_r}$. Infatti $|c_k x^k| \leq |c_k| r^k$ per $|z| \leq r$. Per l'arbitrarietà di r la serie converge assolutamente in $\mathbf{R}$.
(iii) Per ipotesi, $\limsup_k \sqrt[k]{|c_k|} = 1/\rho$, quindi per $r < \rho$ e $r/\rho < h < 1$ risulta $\sqrt[k]{|c_k| r^k} \leq h < 1$ definitivamente, e per il criterio della radice la serie numerica $\sum_k |c_k| r^k$ converge. Ragionando come nel punto (ii) la serie $\sum_k c_k x^k$ converge totalmente in $\overline{B_r}$ e per l'arbitrarietà di $r < \rho$ si ha la convergenza assoluta in B_ρ. Se ora $|x| > \rho$ allora $\limsup_k \sqrt[k]{|c_k x^k|} > 1$ e quindi, come nel punto (i), $|c_k x^k| > 1$ per infiniti indici, e la serie $\sum_k c_k x^k$ non converge.
(iv) La serie nel punto (iv) è ottenuta derivando h volte la serie di potenze (4.6). Poiché per ogni h risulta $\sqrt[k-h]{|c_k|} = (\sqrt[k]{|c_k|})^{k/(k-h)}$ e quindi

$$\limsup_k \sqrt[k-h]{k(k-1)\cdots(k-h+1)|c_k|} = \limsup_k \sqrt[k]{|c_k|},$$

il raggio di convergenza della serie derivata è uguale a ρ. La tesi segue quindi dal Teorema 3.10. $\boxed{QED}$

Osservazioni 4.6

1. Notiamo che il raggio di convergenza dipende solo dai coefficienti della serie, e non dal loro centro. Infatti, cambiando il centro della serie (4.6) si trasla il cerchio di convergenza, ma non se ne altera il raggio.

2. Il Teorema 4.5 non contiene alcuna affermazione sul comportamento delle serie di potenze sulla circonferenza $|x - x_0| = \rho$, bordo del cerchio di convergenza. Infatti, si possono verificare tutti i casi, come vedremo.

3. Nelle ipotesi del punto (iv) del Teorema 4.5 e usando il Teorema 3.9 segue che una serie di potenze si può integrare termine a termine nel suo intervallo di convergenza; supponendo che (4.6) abbia raggio di convergenza $\rho > 0$, risulta

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k \quad \Rightarrow \quad \int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} c_k(t-x_0)^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}$$

per ogni $x \in]x_0-\rho, x_0+\rho[$. Infatti, il Teorema 3.9 si applica, per ogni $x \in]x_0-\rho, x_0+\rho[$, all'intervallo compatto di estremi x_0 e x, ove la serie converge totalmente e quindi uniformemente.

4. Se esiste il limite $\ell = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}$, si ha ovviamente $\rho = 1/\ell$, con le convenzioni che se $\ell = 0$ allora $\rho = +\infty$ e se $\ell = +\infty$ allora $\rho = 0$. In generale però il limite delle radici non esiste. Per esempio, la serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} x^{k^2}$ ha raggio di convergenza $\rho = 1$. Infatti, i coefficienti sono $c_k = 1$ se $k = n^2$ è il quadrato di un numero naturale, $c_k = 0$ altrimenti e quindi il limite della successione $\sqrt[k]{|c_k|}$ non esiste. Poiché la successione $\sqrt[k]{|c_k|}$ assume solo i valori 0 e 1, e ciascuno di essi infinite volte, il suo massimo limite è 1, $\ell = 1$ e $\rho = 1$.

5. Supponiamo che la serie (4.6) abbia raggio di convergenza $\rho > 0$. Dal punto precedente segue che sostituendo αt^n (con $\alpha \neq 0$ e $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$) al posto di $x - x_0$ si ottiene un'altra serie di potenze con raggio di convergenza pari a $\sqrt[n]{\rho/|\alpha|}$.

A volte è possibile calcolare il raggio di convergenza di una serie di potenze usando i *rapporti* anziché le radici dei coefficienti. Questo calcolo è in generale più agevole, ma può accadere che esista il limite delle radici k-esime, ma non dei rapporti. Il seguente risultato è noto come teorema di Ernesto Cesàro.

Teorema 4.7 (Teorema di Cesaro) *Data la successione reale (a_k) con $a_k > 0$ per ogni k, se esiste il limite*

$$\ell = \lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}, \tag{4.8}$$

allora esiste anche

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k},$$

e vale ℓ.

DIM. Supponiamo $\ell \neq 0, \infty$; in questi casi è facile modificare la dimostrazione seguente. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\nu > 0$ tale che

$$k > \nu \quad \Longrightarrow \quad (\ell - \varepsilon)a_{k-1} < a_k < (\ell + \varepsilon)a_{k-1}.$$

Iterando queste diseguaglianze fino ad un indice $n > \nu$ otteniamo

$$(\ell - \varepsilon)^n \frac{a_\nu}{(\ell - \varepsilon)^\nu} < a_n < \frac{a_\nu}{(\ell + \varepsilon)^\nu}(\ell + \varepsilon)^n.$$

Posto $c_1 = \frac{a_\nu}{(\ell-\varepsilon)^\nu}$ e $c_2 = \frac{a_\nu}{(\ell+\varepsilon)^\nu}$, se ne ricava

$$\sqrt[n]{c_1}(\ell - \varepsilon) < \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{c_2}(l + \varepsilon)$$

per ogni $n > \nu$. Poiché $\sqrt[n]{c_i} \to 1$ per $n \to \infty$ per $i = 1, 2$ segue la tesi. $\boxed{QED}$

Naturalmente, il precedente teorema si può applicare alle serie di potenze, e in questo caso dice che se vale (4.8) con $a_k = |c_k|$ allora il raggio di convergenza della serie (4.6) è $1/\ell$, con le solite convenzioni per $\ell = 0, \infty$.

Esempio 4.8 I seguenti esempi, in cui il raggio di convergenza è sempre $\rho = 1$, mostrano che sul bordo dell'intervallo di convergenza di una serie di potenze non è possibile prevedere il comportamento della serie:

$$\begin{array}{lll} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k & \text{converge per} & |x| < 1; \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2} & \text{converge per} & |x| \leq 1. \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} & \text{converge per} & x \in \overline{B_1},\ x \neq 1; \end{array}$$

il primo esempio è la serie geometrica (che sappiamo convergere per $|x| < 1$ e non può convergere per $|x| = 1$ perché in tal caso x^k non tende a zero), il secondo segue dalla convergenza della serie armonica generalizzata di esponente 2 e dal criterio di Weierstrass, mentre il terzo segue dal fatto che per $x = 1$ si ha la serie armonica con potenza 1 e per per $x = -1$ la serie a segni.

5 Serie di Taylor

In questo paragrafo consideriamo serie di potenze *reali.* Abbiamo osservato che le serie di potenze, in un certo senso, generalizzano i polinomi. Inoltre, sappiamo che ad ogni funzione f di classe C^h in un intervallo I, si può associare, per ogni $x_0 \in I$, il polinomio di Taylor di grado h di centro x_0. È quindi ora naturale associare ad una funzione f di classe C^∞ una serie di potenze. Ci aspettiamo che in molti casi la somma della serie, i cui coefficienti sono definiti con la stessa logica dei coefficienti dei polinomi di Taylor, sia proprio la funzione f da cui siamo partiti. Ciò in effetti accade in molte situazioni, ma non sempre.

Definizione 5.1 (Serie di Taylor) *Sia I un intervallo di $\mathbf{R}$, x_0 interno ad I, e sia $f \in C^\infty(I)$; si dice* serie di Taylor di f di punto iniziale x_0 *la serie di potenze*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{5.9}$$

(i) *Si dice che f è* sviluppabile in serie di Taylor di centro x_0 in I *se la serie (5.9) converge ad f in I.*

(ii) *Si dice che f è* analitica reale in I *se per ogni $x_0 \in I$ esiste $\rho > 0$ tale che la serie (5.9) converge ad f in $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$.*

Esempi 5.2 Per ogni funzione C^∞ è evidentemente possibile *scrivere* la serie di Taylor. Il fatto che la serie converga, e che la somma sia la funzione di partenza, è invece da verificare.

1. La somma di una serie di potenze è sempre sviluppabile in serie di Taylor nel suo intervallo di convergenza.

2. La funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

appartiene a $C^\infty(\mathbf{R})$ e verifica $f^{(k)}(0) = 0$ per ogni $k \in \mathbf{N}$, sicché la sua serie di Taylor di centro 0 è la serie con tutti i coefficienti nulli. Tale serie converge banalmente in $\mathbf{R}$, ma la sua somma è 0 per ogni $x \in \mathbf{R}$, ma coincide con la funzione f solo per $x = 0$.

3. La funzione $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, vedi (5.12), è analitica reale in $\mathbf{R}$, ma non è sviluppabile in serie di Taylor in $\mathbf{R}$, in quanto per nessun $x_0 \in \mathbf{R}$ la serie di Taylor di f con centro x_0 ha raggio di convergenza $\rho = +\infty$.

4. Le ridotte di della serie di Taylor di f non sono altro che i polinomi di Taylor di f.

Molte funzioni elementari sono analitiche reali, ed alcune sviluppabili in serie di Taylor sull'intera retta reale $\mathbf{R}$. Elenchiamo alcuni sviluppi, precisando l'intervallo di validità

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \qquad x \in]-1,1[. \tag{5.10}$$

Quest'esempio è di fatto già noto, è la serie geometrica. Da questa formula si possono dedurre altri sviluppi, cambiando variabile. Sostituendo x con $-x$ si ottiene

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x} \qquad x \in]-1,1[, \tag{5.11}$$

mentre sostituendo x con $-x^2$ si ottiene (vedi Osservazione 4.6.5):

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1+x^2} \qquad x \in]-1,1[. \tag{5.12}$$

Integrando termine a termine la (5.11) si ottiene

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} = \log(1+x) \qquad x \in]-1,1[, \tag{5.13}$$

ed integrando termine a termine (5.12)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = \arctan x \qquad x \in]-1,1[. \tag{5.14}$$

Infine, segnaliamo la *serie binomiale* che fornisce lo sviluppo di Taylor della funzione $(1+x)^\alpha$ con centro $x = 0$, per $\alpha \neq 0$ qualunque. Posto (*coefficiente binomiale*)

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

si ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = (1+x)^\alpha \qquad x \in]-1,1[. \tag{5.15}$$

Infine, il calcolo diretto dei coefficienti permette di ottenere facilmente gli sviluppi di Taylor delle funzioni e^x, $\sin x$ e $\cos x$, che valgono per ogni $x \in \mathbf{R}$:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \qquad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \qquad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}. \tag{5.16}$$

Notiamo che, coerentemente con le proprietà di parità e disparità del seno e del coseno, i rispettivi sviluppi contengono solo potenze pari o dispari. I risultati di convergenza per le serie di Taylor della funzione esponenziale, del seno e del coseno si possono dedurre, per esempio, dal seguente risultato.

Teorema 5.3 (Criterio di sviluppabilità in serie di Taylor) *Sia $I \subset \mathbf{R}$ un intervallo e sia $f \in C^\infty(I)$. Se esistono $L, M > 0$ tali che*

$$|f^{(k)}(x)| \leq ML^k \qquad \forall\, x \in I, \quad \forall\, k \in \mathbf{N}$$

allora f è sviluppabile in serie di Taylor in I.

DIM. La dimostrazione segue dalla formula di Taylor con resto di Lagrange

$$f(x) = f(x_0) + \ldots + \frac{f^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1} + \frac{f^{(k)(\eta)}}{k!}(x-x_0)^k$$

dove η è un punto interno all'intervallo di estremi x_0 e x. Dalla stima per la derivata si ottiene quindi che

$$\left| f(x) - f(x_0) + \ldots - \frac{f^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1} \right| \leq M\frac{L^k}{k!}|x-x_0|^k.$$

Dato che l'ultimo termine è un addendo della serie

$$Me^{L|x-x_0|} = M\sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^k}{k!}|x-x_0|^k,$$

allora, dato che la serie è convergente, si ottiene la sviluppabilità. $\boxed{QED}$

6 Serie di Fourier

Un tipo di sviluppo in serie rispetto a funzioni elementari completamente diverso da quello di Taylor è fornito dagli sviluppi in serie di Fourier. Questa volta le funzioni di partenza non sono potenze, ma funzioni trigonometriche elementari del tipo $\sin(kx)$ e $\cos(kx)$. Gli sviluppi in serie di Fourier si prestano ad approssimare le funzioni periodiche, di cui ora ricordiamo la definizione.

Definizione 6.1 (Funzioni periodiche) *Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; diciamo che f è* periodica di periodo T *(o T-*periodica*) se $T > 0$ è il piú piccolo numero reale positivo tale che $f(x+T) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. Se f è T-periodica, T si dice* periodo *della funzione f.*

Osservazioni 6.2

1. Osserviamo che se f è T-periodica allora $f(x+kT) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ e per ogni $k \in \mathbf{Z}$.

2. Fissato $T > 0$ e posto $\omega = \frac{2\pi}{T}$, le funzioni $\sin(k\omega x)$ e $\cos(k\omega x)$ sono T-periodiche per ogni $k \in \mathbf{Z}$. Il numero ω si dice *pulsazione*.

Al contrario degli sviluppi in serie di Taylor, che presuppongono di partire da funzioni di classe C^∞, gli sviluppi in serie di Fourier si possono considerare per funzioni anche assai poco regolari. Infatti i coefficienti degli sviluppi in serie di Fourier si ottengono calcolando degli integrali, e non delle derivate. Definiamo una classe funzionale in cui si possono considerare gli sviluppi di Fourier, anche se essa non è certamente la piú ampia possibile.

Definizione 6.3 (Funzioni continue a tratti) *Una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ si dice* continua a tratti *se per ogni intervallo limitato $I \subset \mathbf{R}$ essa è continua in I eccetto un numero finito di punti di I, ed in tali punti ammette limiti finiti a destra ed a sinistra. Se f è continua a tratti, per ogni punto x_0 di discontinuità poniamo*

$$f(x_0+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x), \qquad f(x_0-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

Ricordiamo che una funzione continua a tratti è integrabile in ogni intervallo limitato, quindi possiamo dare la seguente definizione.

Definizione 6.4 (Serie di Fourier) *Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua a tratti e T-periodica, e sia $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Poniamo*

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx,$$

e, per $k \in \mathbf{N}, k \geq 1$,

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos(k\omega x)dx, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin(k\omega x)dx.$$

I numeri a_0, a_k, b_k si dicono coefficienti di Fourier della funzione f. *Si dice* serie di Fourier associata ad f *la serie*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x) \Big). \tag{6.17}$$

Come nel caso delle serie di Taylor, in generale non si può affermare che la serie di Fourier converga, né, se converge, che la sua somma sia f. Ciò vale sotto ipotesi piú restrittive su f della sola continuità a tratti.

Definizione 6.5 (Funzioni regolari a tratti) *La funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ si dice* regolare a tratti *se è continua a tratti e, inoltre, valgono le condizioni seguenti:*

(i) *f è derivabile in ogni intervallo di continuità, eccetto un numero finito di punti;*

(ii) *in ogni punto di discontinuità x_0 di f o di f' esistono finiti i limiti*

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x), \qquad \lim_{x \to x_0^-} f'(x).$$

Teorema 6.6 (Convergenza della serie di Fourier) *Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ periodica e regolare a tratti. Allora, la serie di Fourier di f converge puntualmente per ogni $x \in \mathbf{R}$ al valore*

$$\tilde{f}(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Inoltre, la convergenza è uniforme in ogni intervallo chiuso in cui f è continua.

Osservazioni 6.7

1. Si vede facilmente con un cambiamento di variabili che per calcolare i coefficienti di Fourier non bisogna necessariamente integrare sull'intervallo $(-T/2, T/2)$, ma qualunque intervallo di lunghezza T, cioè pari ad un periodo, fornisce lo stesso risultato.

2. Osserviamo esplicitamente che se f è periodica, regolare a tratti e *continua* in $\mathbf{R}$ allora la sua serie di Fourier converge *uniformemente in* $\mathbf{R}$; infatti si può applicare il Teorema 6.6 all'intervallo chiuso $\mathbf{R}$.

3. Il termine $a_0/2$ che compare nella serie di Fourier di f esprime la *media integrale* di f nel periodo.

4. **(Funzioni pari e dispari)** Ricordiamo che f si dice *pari* se $f(x) = f(-x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ e si dice *dispari* se $f(x) = -f(-x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, e che le funzioni $\cos(k\omega x)$ sono pari, le funzioni $\sin(k\omega x)$ sono dispari. Possiamo osservare che se f è pari allora tutti i coefficienti b_k sono nulli, mentre se f è dispari sono nulli tutti i coefficienti a_k. Infatti, in entrambi i casi nelle formule della Definizione 6.4 detti coefficienti si ottengono attraverso integrali di funzioni dispari su intervalli simmetrici rispetto all'origine, che dànno risultato nullo. Inoltre, si possono ottenere i coefficienti non nulli usando le formule semplificate

$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos(k\omega x)dx, \quad b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin(k\omega x)dx$$

per f pari e dispari rispettivamente.

5. **(Funzioni non periodiche)** Data una funzione f definita in un intervallo limitato qualunque, che senza ledere la generalità possiamo supporre sia del tipo $[0, b]$, si può definire una estensione periodica arbitraria di f e studiare la convergenza della serie di Fourier dell'estensione. Il Teorema 6.6 implica, in particolare, che se due funzioni sviluppabili in serie di Fourier coincidono in un intervallo J allora le loro serie convergono allo stesso limite in J. Di conseguenza, se si considerano due estensioni periodiche differenti di f, e le rispettive serie di Fourier convergono entrambe ad esse, si ottengono due serie di Fourier diverse convergenti, *nell'intervallo* $(0, b)$, alla stessa funzione f. Queste considerazioni portano ad associare una serie di Fourier anche ad una funzione non periodica, passando per una sua estensione periodica. Le estensioni periodiche naturali di una $f : [0, b] \to \mathbf{R}$ sono le seguenti:

   (i) l'estensione f^* di periodo b cosí definita:

   $$f^*(x) = f(x - kb), \qquad x \in \mathbf{R},$$

   dove, per ogni $x \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{Z}$ è l'unico intero tale che $x - kb \in [0, b)$.

   (ii) l'estensione dispari f_d di periodo $2b$ cosí definita:

   $$f_d(x) = -f(-x) \quad \text{per } x \in [-b, 0), \quad f_d^*(x) = f_d(x - 2kb),\ x \in \mathbf{R},$$

   dove per ogni $x \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{Z}$ è l'unico intero tale che $x - 2kb \in [-b, b)$. Tale estensione, essendo dispari, dà luogo ad una serie di Fourier contenente solo i termini in $\sin(k\omega x)$, detta *sviluppo in soli seni di* f. A rigore, perché f_d sia dispari, occorre anche $f(0) = 0$; in realtà, anche senza supporre tale condizione si ottengono i medesimi risultati, dal momento che né i coefficienti di Fourier né il valore della somma nello 0 dipendono dal valore $f(0)$.

(iii) l'estensione pari f_p di periodo $2b$ cosí definita:

$$f_p(x) = f(-x) \quad \text{per } x \in [-b,0), \quad f_p^*(x) = f_p(x-2kb), \ x \in \mathbf{R},$$

dove per ogni $x \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{Z}$ è l'unico intero tale che $x - 2kb \in [-b,b)$. Tale estensione, essendo pari, dà luogo ad una serie di Fourier contenente solo i termini in $\cos(k\omega x)$, detta *sviluppo in soli coseni di* f. Osserviamo che il prolungamento pari di f ha il vantaggio di essere una funzione contnua su tutto $\mathbf{R}$ se f è continua in $[0,b)$, con limite finito in b.

6. **(Serie di Fourier con ampiezza e fase)**A volte si scrive la serie di Fourier di f in modo equivalente nella forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\omega x + \phi_k),$$

che mette in evidenza i coefficienti di *ampiezza* A_k e di *fase* ϕ_k. I legami tra i coefficienti si deducono facilmente dalla formula di addizione $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$, e sono dati da:

$$a_0 = A_0 \cos\phi_0, \qquad a_k = A_k \cos\phi_k, \qquad b_k = -A_k \sin\phi_k, \ k \geq 1.$$

7. **(Uguaglianza di Parseval)** Usando le formule di prostaferesi si verificano facilmente le seguenti uguaglianze:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(k\omega x)\cos(h\omega x)dx = 0,$$
$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(k\omega x)\sin(h\omega x)dx = \frac{T}{2}\delta_{hk},$$
$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(k\omega x)\cos(h\omega x)dx = \frac{T}{2}\delta_{hk},$$

(ove $\delta_{hk} = 1$ se $h = k$ e $\delta_{hk} = 0$ se $h \neq k$) da cui, passando al limite sotto il segno di integrale, si può dedurre l'*eguaglianza di Parseval*

$$\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx = \frac{T}{2}\Big(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 + |b_k|^2\Big).$$

Per il calcolo delle serie di Fourier è a volte utile il seguente risultato, che lega i coefficienti di f a quelli delle sue primitive.

Teorema 6.8 (Integrazione della serie di Fourier) *Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua a tratti e T-periodica, e poniamo*

$$F(x) = \int_{-T/2}^{x} \big(f(t) - a_0/2\big)dt.$$

Allora, F è T-periodica, continua e regolare a tratti, sicché la sua serie di Fourier converge uniformemente ad F in $\mathbf{R}$. Inoltre, i suoi coefficienti di Fourier A_k e B_k sono legati ai coefficienti a_k, b_k di f dalle relazioni

$$A_k = -\frac{b_k}{\omega k}, \qquad B_k = \frac{a_k}{\omega k} \qquad \text{per } k \geq 1.$$

Osserviamo che nel teorema precedente non si suppone che la serie di Fourier di f sia convergente, ed infatti quest'ipotesi non è necessaria. Per quanto riguarda la derivazione termine a termine, non c'è nulla di nuovo rispetto al Teorema 3.10, che vale in generale per le serie di funzioni.

Osservazione 6.9 (Serie di Fourier complesse) Quanto detto finora vale senza cambiamenti per funzioni a valori complessi (un caso utile in varie applicazioni), dal momento che si può ragionare separatamente sulla parte reale e sulla parte immaginaria. Per le funzioni a valori complessi valgono quindi ancora le formule nella Definizione 6.4, ma si può scrivere la serie di Fourier in modo piú naturale usando esponenziali complessi anziché funzioni trigonometriche reali. Tenendo conto delle relazioni di Eulero

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}), \qquad \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}),$$

si ottiene la *serie di Fourier complessa*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega x}$$

con

$$\begin{cases} c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \\ c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k) \end{cases} \qquad \begin{cases} a_k = c_k + c_{-k} \\ b_k = i(c_k - c_{-k}) \end{cases}$$

e i coefficienti c_k possono essere calcolati tramite le

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-ik\omega x}dx, \qquad k \in \mathbf{Z}.$$

inoltre, l'eguaglianza di Parseval diviene

$$\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx = T\sum_{k\in\mathbf{Z}} |c_k|^2$$

e, detti c_k, C_k i coefficienti di Fourier complessi delle funzioni f, F del Teorema 6.8, valgono le relazioni $C_k = c_k/(i\omega k)$ per ogni $k \in \mathbf{Z}$, $k \neq 0$, $C_0 = 0$.