

## Esercizi VII settimana

17 novembre 2011

1. Si calcoli l'area della superficie parametrizzata da

$$r(t, s) = (t \cos s, t \sin s, t^2), \quad (t, s) \in [0, 1] \times [0, \pi].$$

2. Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int_{\Sigma} z d\Sigma$$

con  $\Sigma = \{z = xy, 0 \leq x\sqrt{3}, x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

3. Determinare il flusso del campo  $F(x, y, z) = (0, ye^{-x}, 0)$  passante per la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq y\}.$$

4. Si classifichino le seguenti forme quadratiche:

$$q(a, b) = -a^2 + 2b^2 - 2ab,$$

$$q(a, b, c) = 2a^2 - b^2 + c^2 - 4ab + 6bc,$$

$$q(a, b, c, d) = 7a^2 + 3b^2 + 5d^2 + 4ab + 2bc + 2bd + 8cd.$$

## Soluzioni

1. La superficie è un mezzo paraboloide (vedere Figura 1). Per il calcolo dell'area,

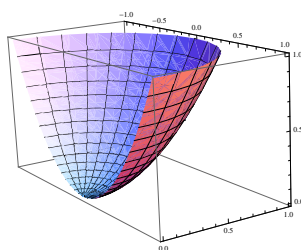


Figura 1:

notiamo che

$$r_t(t, s) \times r_s(t, s) = (\cos s, \sin s, 2t) \times (-t \sin s, t \cos s, 0) = (-2t^2 \cos s, -2t^2 \sin s, t),$$

da cui

$$\|r_t(t, s) \times r_s(t, s)\| = t\sqrt{1 + 4t^2}.$$

L'area della superficie è quindi data da

$$\text{Area}(\Sigma) = |\Sigma| = \int_0^1 dt \int_0^\pi t\sqrt{1 + 4t^2} ds = \frac{\pi}{12}(5\sqrt{5} - 1).$$

2. La superficie data è il grafico della funzione  $g(x, y) = xy$  sul dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\sqrt{3}\}.$$

Tale superficie è rappresentata in Figura 2. Quindi l'integrale di superficie è dato da

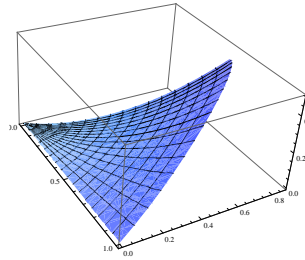


Figura 2:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} z d\Sigma &= \int_D g(x, y) \sqrt{1 + \|\nabla g(x, y)\|^2} dx dy = \int_D xy \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \\ &= \int_0^{\pi/3} d\vartheta \int_0^1 \varrho^3 \cos \vartheta \sin \vartheta \sqrt{1 + 4\varrho^2} d\varrho = \frac{25\sqrt{5} + 1}{320}. \end{aligned}$$

3. La superficie è rappresentata in Figura 3; si nota che  $\Sigma$  non è chiusa e quindi non possiamo eventualmente applicare il Teorema della divergenza, a meno di non aggiungere a  $\Sigma$  altre superfici per ottenere il bordo di un insieme. Appliciamo quindi la definizione di flusso; sfruttiamo la seguente parametrizzazione di  $\Sigma$

$$r(t, s) = (\cos t, \sin t, s), \quad (t, s) \in D = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0, \pi], 0 \leq s \leq \sin t\}.$$

Otteniamo quindi che

$$r_t(t, s) \times r_s(t, s) = (-\sin t, \cos t, 0) \times (0, 0, 1) = (\cos t, \sin t, 0),$$

da cui

$$\begin{aligned} \Phi(F, \Sigma) &= \int_{\Sigma} F \cdot \hat{n}_{\Sigma} d\Sigma = \int_D F(r(t, s)) \cdot r_t(t, s) \times r_s(t, s) dt ds \\ &= \int_0^\pi dt \int_0^{\sin t} (0, \sin t e^{-\cos t}, 0) \cdot (\cos t, \sin t, 0) ds \\ &= \int_0^\pi dt \int_0^{\sin t} \sin^2 t e^{-\cos t} ds = \int_0^\pi \sin^3 t e^{-\cos t} dt = \int_{-1}^1 (1 - x^2) e^{-x} dx = 4e^{-1}. \end{aligned}$$

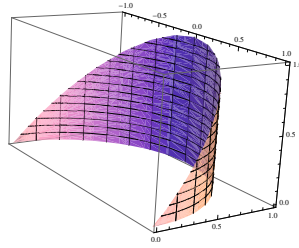


Figura 3:

4. Nel primo caso, la matrice associata alla forma quadratica  $q$  è data da

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tale matrice ha determinante pari a  $-3 < 0$ , quindi è indefinita in quanto i due autovalori sono non nulli e di segno discorde. Nel secondo caso, la matrice associata alla forma quadratica è data da

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

in questo caso utilizziamo il Teorema di Sylvestre; abbiamo che  $A_1 = 2 > 0$ , mentre, posto

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$$

allora  $\det A_2 = -7 < 0$ . Basta questo per capire che la matrice  $A$  è indefinita e quindi anche la forma quadratica è indefinita. Si noti che infine  $A_3 = A$  e  $\det A = -24$ ; siccome  $\text{tr} A = 2$  se ne deduce che un autovalore è negativo e che gli altri due sono positivi, quindi ancora che la matrice è indefinita. Nell'ultimo caso, abbiamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix};$$

qui abbiamo i minori principali dati da  $A_1 = 7 > 0$ ,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

e  $\det A_2 = 17 > 0$ ,

$$A_3 = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi  $\det A_3 = -7$ . Basta questo per concludere che  $A$  è indefinita. Se si volesse tuttavia calcolare il determinante anche della matrice  $A$ , potremmo effettuare lo

sviluppo ad esempio rispetto alla prima colonna per ottenere che

$$\det A = 7 \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = -251.$$

Notando poi che  $\operatorname{tr} A = 15$ , se ne deduce che almeno un autovalore deve essere negativo ma non tutti, da cui ancora la indefinitezza di  $A$ .