

Esercizi VI settimana

9 novembre 2011

1. Dire se è integrabile in senso generalizzato assoluto la funzione

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

sull'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

2. Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int_E x^2 z dx dy dz.$$

con $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\}$.

3. Calcolare, utilizzando la formula per il volume di un solido di rotazione, il volume del toro, cioè l'insieme il cui bordo è parametrizzato da

$$r(t, s) = ((R + r \cos t) \cos s, (R + r \cos t) \sin s, r \sin t), \quad (t, s) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi].$$

4. Dire se i seguenti campi

$$F(x, y, z) = (x - xe^z, -z, e^z), \quad G(x, y, z) = \left(3x^2y, x^3, -\frac{1}{z}\right)$$

sono conservativi e, in caso, determinarne i potenziali.

Soluzioni

1. Per studiare l'integrabilità di f , consideriamo

$$|f(x, y)| = \begin{cases} -\ln(x^2 + y^2) & 0 < x^2 + y^2 \leq 1 \\ \ln(x^2 + y^2) & 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4. \end{cases}$$

La funzione non è limitata in $(0, 0)$, e quindi possiamo considerare la seguente successione di insiemi invadenti;

$$E_h = \bar{B}_2 \setminus B_{1/h}, \quad E = \{(0, 0)\} \cup \bigcup_{h \in \mathbb{N}} E_h.$$

Si noti infine che $\{(0, 0)\}$ è un insieme trascurabile; quindi, passando alle coordinate polari troviamo che

$$\begin{aligned} \int_{E_h} |f(x, y)| dx dy &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{1/h}^2 2\varrho |\ln \varrho| d\varrho = -4\pi \int_{1/h}^1 \varrho \ln \varrho d\varrho + 4\pi \int_1^2 \varrho \ln \varrho d\varrho \\ &= \pi \left(8 \ln 2 - 2 + \frac{1}{h^2} + \frac{2}{h^2} \ln h. \right) \end{aligned}$$

Se ne deduce che

$$\sup_h \int_{E_h} |f(x, y)| dx dy < +\infty.$$

Quindi possiamo porre

$$\int_E f(x, y) dx dy = \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{E_h} f(x, y) dx dy = 4\pi(\ln 4 - 1).$$

2. L'insieme è normale rispetto al piano xy , cioè z -semplice, quindi

$$\begin{aligned} \int_E x^2 z dx dy dz &= \int_{\{x^2+y^2 \leq R^2\}} dx dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} x^2 z dz \\ &= \frac{1}{2} \int_{\{x^2+y^2 \leq R^2\}} x^2 (R^2 - x^2 - y^2) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^R \varrho^3 \cos \vartheta^2 (R^2 - \varrho^2) d\varrho \\ &= \frac{\pi R^6}{24}. \end{aligned}$$

3. Se andiamo a studiare nel piano xz l'insieme racchiuso dalla curva $r(t) = (R + r \cos t, r \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, otteniamo l'insieme

$$D = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : -r \leq z \leq r, R - \sqrt{r^2 - z^2} \leq x \leq R + \sqrt{r^2 - z^2}\}.$$

Quindi l'insieme ruotato E è ottenuto dalla rotazione di due grafici di funzioni e quindi il suo volume sarà dato da

$$\begin{aligned} |E| = \text{Vol}(E) &= \int_E dx dy dz = \pi \int_{-r}^r \left((R + \sqrt{r^2 - z^2})^2 - (R - \sqrt{r^2 - z^2})^2 \right) dz \\ &= \pi \int_{-r}^r 4R\sqrt{r^2 - z^2} dz = 2\pi^2 R r^2. \end{aligned}$$

4. Notiamo che

$$\text{rot} F(x, y, z) = (1, -xe^z, 0),$$

e quindi il campo F non può essere conservativo. Invece, per G abbiamo che

$$\text{rot} G(x, y, z) = (0, 0, 0),$$

e il dominio di G è dato da

$$\text{Dom}(G) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \neq 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z < 0\},$$

cioè il dominio di G è dato dall'unione di due insiemi connessi e semplicemente connessi. Quindi G è conservativo; per determinare il suo potenziale dobbiamo risolvere il sistema;

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} U(x, y, z) = 3x^2 y \\ \frac{\partial}{\partial y} U(x, y, z) = x^3 \\ \frac{\partial}{\partial z} U(x, y, z) = -\frac{1}{z}. \end{cases}$$

Dalla prima equazione otteniamo che

$$U(x, y, z) = x^3 y + c(y, z);$$

sostituendo nella seconda equazione troviamo che

$$\frac{\partial}{\partial y} c(y, z) = 0,$$

e quindi

$$U(x, y, z) = x^3 y + c(z);$$

sostituendo nella terza equazione troviamo infine che

$$c'(z) = -\frac{1}{z},$$

da cui $c(z) = c - \ln |z|$. Il potenziale è quindi dato da

$$U(x, y, z) = x^3 - \ln |z| + c.$$