

## Esercizi IV settimana

27 ottobre 2011

1. Dire se la funzione  $r : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$r(t, s) = (\sin^2 t \cos s, \sin^2 t \sin s, \cos^2 t)$$

definisce o meno una superficie parametrizzata regolare.

2. Studiare le proprietà delle superfici ottenute ruotando la curva

$$x = z(z - 1), \quad z \in [0, 1]$$

sia attorno all'asse  $z$  che attorno all'asse  $x$ .

3. Dire se si può applicare il Teorema della funzione implicita alla funzione

$$f(x, y, z) = (xy - z, x^2y^3 - z)$$

nel punto  $(1, 1, 1)$ . Determinare eventualmente la parametrizzazione del livello di  $f$  cui il punto  $(1, 1, 1)$  appartiene.

4. Determinare massa, baricentro e momenti di inerzia della curva

$$y = \frac{1}{x}, \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$$

con densità di massa descritta dalla funzione  $f(x, y) = x$ .

### Soluzioni

1. La parametrizzazione è sicuramente di classe  $C^1$ ; per le derivate abbiamo che

$$r_t(t, s) = 2 \cos t \sin t (\cos s, \sin s, -1),$$

mentre

$$r_s(t, s) = (-\sin^2 t \sin s, \sin^2 t \cos s, 0).$$

Quindi

$$r_t(t, s) \times r_s(t, s) = 2 \sin^3 t \cos t (\cos s, \sin s, 1),$$

da cui

$$\|r_t(t, s) \times r_s(t, s)\| = 2\sqrt{2} \sin^3 t |\cos t|;$$

quindi la parametrizzazione non è regolare per  $t = 0, \pi/2, \pi$ .

2. Si tratta di ruotare la curva che nel piano  $xz$  è parametrizzata da

$$r(t) = (t(t-1), t), \quad t \in [0, 1].$$

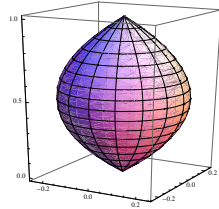
Abbiamo allora che  $r'(t) = (2t-1, 1)$ , cioè  $\|r'(t)\| = \sqrt{4t^2 - 4t + 2}$ , quindi la curva è regolare. Siccome per  $t = 0, 1$   $r_1(t) = 0$ , allora la curva ruotata attorno all'asse  $z$  non sarà regolare in tali punti. La parametrizzazione della curva ruotata attorno a  $z$  sarà quindi data da

$$r(t, s) = (t(t-1) \cos s, t(t-1) \sin s, t)$$

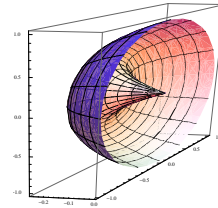
e tale superficie è rappresentata in Figura 1(a). Per la rotazione attorno ad  $x$ , avremo che  $r_2(t) = 0$  per  $t = 0$  e quindi in tale punto la superficie non sarà regolare; per la parametrizzazione si avrà che

$$r(t, s) = (t(t-1), t \cos s, t \sin s)$$

e tale superficie è rappresentata in Figura 1(b).



(a) Rotazione attorno ad asse  $z$



(b) Rotazione attorno ad asse  $x$

Figura 1: Rotazioni della curva  $r$  attorno ai due assi,  $z$  e  $x$ .

3. Calcoliamo la matrice Jacobiana di  $f$ ,

$$Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} y & x & -1 \\ 2xy^3 & 3x^2y^2 & -1 \end{pmatrix}.$$

In  $(1, 1, 1)$  tale matrice vale

$$Df(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

e quindi il rango è pari a 2 in tale punto, quindi si può applicare il teorema della funzione implicita per dire che intorno a  $(1, 1, 1)$  l'insieme  $\{f(x, y, z) = (0, 0)\}$  è localmente una curva. La parametrizzazione locale si può ottenere determinando

$$\begin{cases} xy = z \\ x^2y^3 = z. \end{cases}$$

Parametrizzando ponendo  $y = t$  si trova la curva

$$r(t) = \left( \frac{1}{t^2}, t, \frac{1}{t} \right).$$

Questa parametrizzazione è definita per  $t$  intorno ad 1 mentre diventa degenera per  $t \rightarrow 0$ . Ci si può chiedere se esiste una parametrizzazione globale; in realtà si può vedere che l'insieme  $\{f(x, y, z) = (0, 0)\}$  non è globalmente una curva, ma ha dei punti singolari.

4. La curva è parametrizzata da

$$r(t) = \left( t, \frac{1}{t} \right), \quad t \in [1/2, 2].$$

Abbiamo che  $r'(t) = (1, -1/t^2)$  e quindi  $\|r'(t)\| = \sqrt{t^4 + 1}/t$ , cioè la curva è regolare. La sua massa sarà quindi data da

$$\begin{aligned} m &= \int_r f = \int_{1/2}^2 f(r(t)) \|r'(t)\| dt \\ &= \int_{1/2}^2 \frac{\sqrt{t^4 + 1}}{t} dt. \end{aligned}$$

Ponendo  $s = t^2$ , si arriva all'integrale

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2} \int_{1/4}^4 \frac{\sqrt{s^2 + 1}}{s} ds = \frac{1}{2} \int_{\ln(\frac{1+\sqrt{17}}{4})}^{\ln(4+\sqrt{17})} \frac{\cosh^2 \alpha}{\sinh \alpha} d\alpha = \frac{1}{4} \int_{\ln(\frac{1+\sqrt{17}}{4})}^{\ln(4+\sqrt{17})} \frac{e^{4\alpha} + 2e^{2\alpha} + 1}{e^{2\alpha}(e^{2\alpha} - 1)} e^{\alpha} d\alpha \\ &= \frac{1}{4} \int_{\frac{1+\sqrt{17}}{4}}^{4+\sqrt{17}} \frac{\tau^4 + 2\tau^2 + 1}{\tau^2(\tau^2 - 1)} d\tau \end{aligned}$$

dove abbiamo effettuato le due sostituzioni  $s = \sinh \alpha$  e poi  $\tau = e^{\alpha}$ . A questo punto si nota che

$$\frac{\tau^4 + 2\tau^2 + 1}{\tau^2(\tau^2 - 1)} = 1 + \frac{3\tau^2 + 1}{\tau^2(\tau^2 - 1)}$$

ed inoltre che

$$\frac{3\tau^2 + 1}{\tau^2(\tau^2 - 1)} = -\frac{1}{\tau^2} + \frac{2}{\tau - 1} - \frac{2}{\tau + 1},$$

da cui si deduce che

$$m = \frac{3\sqrt{17}}{8} - \frac{1}{2} \ln(13 - 3\sqrt{17}) + \ln 2.$$

La determinazione del baricentro in questo caso non è agevole in quanto si tratta di calcolare i seguenti integrali;

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \int_{1/2}^2 \sqrt{t^4 + 1} dt,$$

e

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \int_{1/2}^2 \frac{\sqrt{t^4 + 1}}{t^2} dt,$$

e questi due integrali non sono facilmente calcolabili. I momenti di inerzia invece si possono calcolare in modo analogo a quanto fatto per il calcolo della massa in quanto

$$I_x = \int_{1/2}^2 \frac{\sqrt{t^4+1}}{t^3} dt = \frac{15}{8} + \frac{3\sqrt{17}}{4},$$

mentre

$$I_y = \int_{1/2}^2 t\sqrt{t^4+1} dt = \frac{15}{16} + \frac{75\sqrt{17}}{64}.$$

Infine avremo che

$$I_z = I_x + I_y = \frac{45}{16} + \frac{123\sqrt{17}}{64}.$$