

# Capitolo 1

## Numeri complessi

**Esercizio 1.1** Scrivere nelle varie forme i seguenti numeri complessi

$$1 + i, \quad 6e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad 8e^{-i\frac{\pi}{3}}, \quad (1 + i\sqrt{3})^5.$$

**Esercizio 1.2** Utilizzare la formula di De Moivre per  $(\cos \vartheta + i\sin \vartheta)^3$  per calcolare  $\cos 3\vartheta$  e  $\sin 3\vartheta$ .

**Esercizio 1.3** Calcolare il modulo dei seguenti numeri complessi

$$1 + i - \frac{i}{1 - 2i}, \quad \frac{3 - i}{(1 + i)^2} - \frac{i}{1 - i}.$$

**Esercizio 1.4** Scrivere in forma algebrica, cartesiana, polare ed esponenziale i seguenti numeri complessi

$$\frac{1}{1 + i}, \quad -1 + i, \quad -1 - i\sqrt{3}, \quad \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^2.$$

**Esercizio 1.5** Determinare parte reale e parte immaginaria dei seguenti numeri complessi

$$\frac{(-1/2 + 2i)^2 - (1 - i)^3}{(3 + 2i)^3 - (2 + i)^2}, \quad \frac{(1 + i)^9}{(1 - i)^7}.$$

**Esercizio 1.6** Provare la seguente identità;

$$1 + e^{i\pi} = 0.$$

**Esercizio 1.7** Dato il numero complesso  $z = a + ib$ , scrivere, qualora sia possibile, parte reale e parte immaginaria dei numeri

$$\frac{1}{z}, \quad \frac{z - 1}{z + 1}, \quad \frac{1}{z^2}.$$

**Esercizio 1.8** Trovare le radici del polinomio

$$p(z) = z^2 - 5z + 7.$$

**Esercizio 1.9** Trovare le soluzioni complesse dell'equazione

$$z^2 + (1 - i)z - 2 - 2i = 0$$

ed esprimerle in forma algebrica.

**Esercizio 1.10** Risolvere in campo complesso la seguente equazione

$$|z|^2 z - 4i\bar{z} = 0.$$

**Esercizio 1.11** Risolvere in campo complesso la seguente equazione

$$(z + i)^2 = (\sqrt{3} + i)^2.$$

**Esercizio 1.12** Risolvere in campo complesso la seguente equazione

$$z^3 = |z|^2.$$

**Esercizio 1.13** Risolvere in campo complesso la seguente equazione

$$z^2 + i\bar{z} = 1.$$

**Esercizio 1.14** Risolvere in campo complesso la seguente equazione

$$z^2 + i\sqrt{5}|z| + 6 = 0.$$

**Esercizio 1.15** Risolvere in campo complesso la seguente equazione

$$|z|^2 + 5z + 10i = 0.$$

**Esercizio 1.16** Trovare le radici seste del numero complesso

$$w = (\sqrt{3} + i)^9.$$

**Esercizio 1.17** Calcolare le radici quarte del numero  $2 - i\sqrt{12}$ .

**Esercizio 1.18** Risolvere l'equazione  $(z - 2)^3 = -i$ .

**Esercizio 1.19** Dimostrare che la somma delle radici  $n$ -esime dell'unità è pari ad 0.

**Esercizio 1.20** Mostrare che se  $z$  è una radice  $n$ -esima di  $w$ , allora tutte le altre radici sono date da  $z\omega_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ , con  $\omega_0 = 1, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$  le radici  $n$ -esime dell'unità. In particolare, le radici  $n$ -esima saranno della forma  $z\omega_1^k$ ,  $k = 0, \dots, n - 1$ .

**Esercizio 1.21** Calcolare le soluzioni complesse di

$$|z|^2 - 6z + 1 = 0.$$

**Esercizio 1.22** Calcolare le soluzioni complesse di

$$z^4 + 6z^2 - 5 = 0.$$

**Esercizio 1.23** Calcolare le soluzioni complesse di

$$z^4 + 4 = 0.$$

**Esercizio 1.24** Dato il polinomio

$$p(z) = z^4 - 4z^3 + 4z^2 - 4z + 3,$$

calcolare  $p(i)$  e trovare tutte le radici del polinomio.

**Esercizio 1.25** Calcolare le soluzioni complesse di

$$z^3 + 3z^2 + 3z + 1 = 8i.$$

**Esercizio 1.26** Trovare le soluzioni complesse di

$$z^2 + iz + i\frac{\sqrt{3}}{4} = 0.$$

**Esercizio 1.27** Trovare le soluzioni complesse di

$$z|z|^2 - (1 + 4\sqrt{3})i\bar{z} = 0.$$

**Esercizio 1.28** Dato  $w \in \mathbb{C}$ , trovare i numeri complessi  $z \in \mathbb{C}$  tali che

$$|z - w| = |z + w|.$$

## 1.1 Soluzioni

**Soluzione 1.1** Si ottengono le seguenti espressioni

$$\begin{aligned} 1 + i &= (1, 1) = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}, \end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned} 6e^{i\frac{\pi}{6}} &= 6 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 6 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) \\ &= 3\sqrt{3} + 3i = (3\sqrt{3}, 3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8e^{-i\frac{\pi}{3}} &= 8e^{i\frac{5\pi}{3}} = 8 \left( \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) \\ &= 8 \left( \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 4 - 4i\sqrt{3} = (4, -4\sqrt{3}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 + i\sqrt{3})^5 &= 32 \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^5 = 32(e^{i\frac{\pi}{3}})^5 \\ &= 32e^{i\frac{5\pi}{3}} = 16 - 16i\sqrt{3} = (16, -16\sqrt{3}). \end{aligned}$$

**Soluzione 1.2** Notiamo che

$$(\cos \vartheta + i \operatorname{sen} \vartheta)^3 = e^{3i\vartheta} = \cos 3\vartheta + i \operatorname{sen} 3\vartheta,$$

mentre analogamente con lo sviluppo del cubo di un binomio, si ottiene

$$(\cos \vartheta + i \operatorname{sen} \vartheta)^3 = \cos^3 \vartheta - 3 \cos \vartheta \operatorname{sen}^2 \vartheta + i(3 \cos^2 \vartheta \operatorname{sen} \vartheta - \operatorname{sen}^3 \vartheta)$$

da cui

$$\cos 3\vartheta = \cos^3 \vartheta - 3 \cos \vartheta \operatorname{sen}^2 \vartheta, \quad \operatorname{sen} 3\vartheta = 3 \cos^2 \vartheta \operatorname{sen} \vartheta - \operatorname{sen}^3 \vartheta$$

**Soluzione 1.3** Notiamo che

$$\left| 1 + i - \frac{i}{1-2i} \right| = \left| \frac{1+i-2i+2-i}{1-2i} \right| = \frac{|3-2i|}{|1-2i|} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}},$$

e analogamente

$$\left| \frac{3-i}{(1+i)^2} - \frac{i}{1-i} \right| = \left| \frac{(3-i)(1-i) - i(1+i)^2}{(1+i)^2(1-i)} \right| = \frac{|4-4i|}{|1+i|^2|1-i|} = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 2.$$

**Soluzione 1.4** Usando la formula

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

e tenendo presente che  $|1+i|^2 = 1+1 = 2$ , si ottiene che

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Se ne deduce che  $|1/(1+i)| = \sqrt{2}/2$  e  $\arg(1/(1+i)) = -\pi/4$ , da cui

$$\frac{1}{1+i} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

In definitiva, si ha che

$$\frac{1}{1+i} = \begin{cases} \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) & \text{(forma cartesiana)} \\ \frac{1}{2} - i\frac{1}{2} & \text{(forma algebrica)} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos \frac{-\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{-\pi}{4} \right) & \text{(forma polare)} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} & \text{(forma esponenziale).} \end{cases}$$

Per gli altri numeri abbiamo che

$$-1+i = (-1, 1) = \sqrt{2} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}},$$

$$-1 - i\sqrt{3} = (-1, -\sqrt{3}) = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{4\pi}{3}},$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^2 &= \left(\frac{2(1/2+i\sqrt{3}/2)}{\sqrt{2}(1/\sqrt{2}-i/\sqrt{2})}\right)^2 = \left(\frac{2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})}{\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})}\right)^2 \\ &= \left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}}\right)^2 = \left(\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{7\pi}{4})}\right)^2 \\ &= 2e^{-i\frac{17\pi}{6}} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i\end{aligned}$$

**Soluzione 1.5** Abbiamo che

$$\begin{aligned}\frac{(-1/2+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2} &= \frac{1/4-4-2i-1+3i+3-i}{27+54i-36-8i-4+1-4i} = \frac{-7/4}{-12+42i} = \frac{-7}{12} \frac{1}{-4+14i} \\ &= \frac{(-7/12)(-4-14i)}{212} = \frac{14+49i}{1272}.\end{aligned}$$

mentre

$$\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7} = \frac{\sqrt{2}^9 e^{i\frac{9\pi}{4}}}{\sqrt{2}^7 e^{-i\frac{7\pi}{4}}} = 2e^{i4\pi} = 2.$$

**Soluzione 1.6** Dalla definizione di esponenziale immaginario, si ricava che

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i\sin \pi = -1,$$

da cui segue l'identità.

**Soluzione 1.7** In questo esercizio utilizzeremo la formula

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2};$$

quindi, nel primo caso avremo

$$\frac{1}{z} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$$

che ha senso per  $z \neq 0$ ; quindi

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{b}{a^2+b^2}.$$

Per quanto riguarda il secondo caso, avremo  $z-1 = (a-1)+ib$  e  $z+1 = (a+1)+ib$ , da cui

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{(z-1)\overline{(z+1)}}{|z+1|^2} = \frac{a^2+b^2-1}{a^2+b^2+2a+1} + i\frac{2b}{a^2+b^2+2a+1}$$

che ha senso per  $z \neq -1$ ; quindi

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{a^2+b^2-1}{a^2+b^2+2a+1}, \quad \operatorname{Im}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{2b}{a^2+b^2+2a+1}.$$

Infine

$$\frac{1}{z^2} = \frac{\bar{z}^2}{|z|^4} = \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2} - i \frac{2ab}{(a^2 + b^2)^2},$$

e quindi

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z^2}\right) = \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2}, \quad \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z^2}\right) = -\frac{2ab}{(a^2 + b^2)^2}.$$

**Soluzione 1.8** Le radici di un polinomio complesso di secondo grado si trovano nello stesso modo in cui si trovano quelle di un polinomio reale, cioè tramite la formula risolutiva. Quindi

$$p(z) = z^2 - 5z + 7 = 0$$

se e solo se

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 28}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{-3}}{2};$$

l'unica cosa da osservare è che la radice quadrata da calcolare in questo caso va fatta in campo complesso; tenendo presente che in campo complesso la radice quadrata ha due soluzioni, il  $\pm$  può essere omesso (deriverà dal fatto che le due soluzioni complesse differiscono per un angolo di  $\pi$ , e quindi sono una l'opposta dell'altra. Avremo quindi che le soluzioni sono date da

$$z = \frac{5}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Si noti infine che le due soluzioni sono una coniugata dell'altra; questo dovevamo aspettarcelo in quanto il polinomio considerato era a coefficienti reali.

**Soluzione 1.9** Anche in questo caso applichiamo la formula risolutiva per i polinomi di secondo grado e troviamo che le soluzioni dell'equazione

$$z^2 + (1 - i)z - 2 - 2i = 0$$

sono date da

$$z = \frac{-1 + i \pm \sqrt{(1 - i)^2 + 4(2 + 2i)}}{2}.$$

Per calcolare la radice in questa espressione, conviene scrivere in forma esponenziale il numero

$$(1 - i)^2 + 4(2 + 2i) = 8 + 6i;$$

Ma  $|8 + 6i| = 10$ , e quindi

$$8 + 6i = 10 \left( \frac{4}{5} + i \frac{3}{5} \right);$$

indichiamo con  $\phi$  l'angolo il cui coseno vale  $4/5$  e il cui seno vale  $3/5$  (non essendo un angolo noto, conviene individuarlo in questo modo), e quindi le soluzioni della nostra equazione saranno date da

$$z = \frac{i - 1}{2} \pm \frac{\sqrt{10}}{2} e^{i \frac{\phi}{2}} = \left( -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{10}}{2} \cos \frac{\phi}{2} \right) + i \left( \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{10}}{2} \sin \frac{\phi}{2} \right).$$

Questa espressione può essere semplificata utilizzando le formule di bisezione per seno e coseno, tenendo presente che l'angolo  $\phi$  che stiamo considerando verifica  $0 < \phi < \pi/2$  dato che sia seno che coseno sono positivi;

$$\cos \frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \phi}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \sin \frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \phi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

In definitiva le soluzioni sono date da

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = -2.$$

**Soluzione 1.10** Notando che  $|z|^2 = z\bar{z}$ , l'equazione data può essere riscritta come

$$\bar{z}(z^2 - 4i);$$

avremo quindi che  $z_0 = 0$  è una soluzione. Altre soluzioni vengono dall'equazione

$$z^2 - 4i = 0,$$

cioè dalle due radici quadrate del numero  $4i = 4e^{i\pi/2}$ ; tali soluzioni saranno date da

$$z_{1,2} = \pm 2e^{i\frac{\pi}{4}} = \pm \sqrt{2}(1 + i).$$

**Soluzione 1.11** Dobbiamo risolvere l'equazione

$$(z + i)^2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}};$$

troviamo quindi le radici quadrate del membro di destra e poi sottraiamo  $i$ , cioè le soluzioni sono date da

$$z_{1,2} = -i + \sqrt{2}e^{i\vartheta_{1,2}}$$

con

$$\vartheta_1 = \frac{\pi}{6}, \quad \vartheta_2 = \frac{7\pi}{6}.$$

**Soluzione 1.12** Passando alla forma esponenziale  $z = \varrho e^{i\vartheta}$ , l'equazione diventa

$$\varrho^3 e^{i3\vartheta} = \varrho^2,$$

da cui  $\varrho^3 = \varrho^2$ , cioè  $\varrho = 0$  o  $\varrho = 1$ , mentre  $3\vartheta = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , cioè  $\vartheta = \frac{2k\pi}{3}$  (valori di  $\vartheta$  compresi in  $[0, 2\pi)$  sono dati da  $0, 2\pi/3, 4\pi/3$ ).

**Soluzione 1.13** Scriviamo  $z = a + ib$  e si ottiene l'equazione

$$a^2 - b^2 + 2iab + i(a - ib) = 1$$

cioè

$$a^2 - b^2 + b + i(2ab + a) = 1$$

che si riduce al sistema

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + b = 1 \\ a(2b + 1) = 0. \end{cases}$$

La seconda equazione ha soluzione per  $a = 0$  o per  $b = -1/2$ ; nel primo caso la prima equazione diventa

$$b^2 - b + 1 = 0$$

che non ha soluzioni reali, mentre nel secondo caso si ottiene

$$a^2 = \frac{7}{4},$$

cioè  $a = \pm\sqrt{7}/2$ ; l'equazione data ha quindi le due soluzioni

$$z = \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{i}{2}, \quad z = -\frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{i}{2}.$$

**Soluzione 1.14** Ponendo  $z = a + ib$ , si trova

$$a^2 - b^2 + 2iab + i\sqrt{5(a^2 + b^2)} + 6 = 0$$

che si riduce al sistema

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + 6 = 0 \\ 2ab + \sqrt{5a^2 + 5b^2} = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ottiene che

$$-2ab = \sqrt{5}\sqrt{a^2 + b^2}$$

da cui  $ab \leq 0$ , cioè  $a$  e  $b$  hanno segni discordi. Elevando al quadrato si ottiene

$$4a^2b^2 = 5a^2 + 5b^2$$

cioè

$$b^2(4a^2 - 5) = 5a^2.$$

Siccome non si può essere  $a^2 = 5/4$ , dividendo si ricava

$$b^2 = \frac{5a^2}{4a^2 - 5}.$$

Sostituendo questo nella prima equazione si ottiene

$$a^2 - \frac{5a^2}{4a^2 - 5} + 6 = 0,$$

o equivalentemente

$$\frac{4a^4 + 14a^2 - 30}{4a^2 - 5} = 0,$$

cioè  $a^2 = 6$ , da cui  $a = \pm\sqrt{6}$ . In definitiva le soluzioni dell'equazione data sono

$$z_1 = \sqrt{6} - i\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{19}}, \quad z_2 = -\sqrt{6} + i\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{19}}.$$



**Soluzione 1.15** Ponendo  $z = a + ib$  si ottiene l'equazione

$$a^2 + b^2 + 5a + 5ib + 10i = 0,$$

cioè  $b = -2$  e  $a^2 + 5a + 4 = 0$ , che significa  $a = -1$  o  $a = -4$ . Quindi l'equazione data ha due soluzioni

$$z = -1 - 2i, \quad z = -4 - 2i.$$

**Soluzione 1.16** Si tratta di risolvere l'equazione

$$z^6 = w;$$

per fare questo, scriviamo il numero  $w$  in coordinate polari; partiamo quindi dal numero complesso

$$w_0 = \sqrt{3} + i.$$

Calcolando modulo e argomento si trova

$$w_0 = 2(\cos \pi/6 + i \sin \pi/6).$$

Dalle formule di De Moivre otterremo quindi che

$$w = 2^9 e^{i3\pi/2}.$$

Le radici saranno quindi date dalla formula

$$z_k = 2\sqrt{2}(\cos \theta_k + i \sin \theta_k),$$

con

$$\theta_k = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

**Soluzione 1.17** Scriviamo il numero dato in forma esponenziale;

$$2 - i\sqrt{12} = 2 - 2i\sqrt{3} = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = 4e^{i\frac{5\pi}{3}},$$

e quindi le radici quarte sono date da

$$z_k = \sqrt{2}e^{i\vartheta_k}, \quad \vartheta_k = \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

**Soluzione 1.18** Facendo la sostituzione  $w = z - 2$ , si tratta di risolvere l'equazione

$$w^3 = -i;$$

dobbiamo quindi trovare le tre radici cubiche del numero complesso  $-i$ , che ha modulo 1 e argomento pari a  $3\pi/2$ . Quindi le soluzioni saranno

$$w_k = (\cos \theta_k + i \sin \theta_k), \quad \theta_k = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3}, \quad k = 0, 1, 2.$$

In definitiva, la soluzione dell'esercizio sarà data dai tre numeri complessi

$$z_k = (2 + \cos \theta_k + i \sin \theta_k), \quad \theta_k = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3}, \quad k = 0, 1, 2.$$

**Soluzione 1.19** Le radici  $n$ -esime dell'unità sono date dalla forma

$$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1;$$

scrivendo  $\varepsilon_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ , si nota che  $z_k = \varepsilon_n^k$ , e quindi

$$\begin{aligned} z_0 + z_1 + \dots + z_{n-1} &= 1 + \varepsilon_n + \dots + \varepsilon_n^{n-1} \frac{(1 + \varepsilon_n + \dots + \varepsilon_n^{n-1})(1 - \varepsilon_n)}{(1 - \varepsilon_n)} \\ &= \frac{1 - \varepsilon_n^n}{1 - \varepsilon_n} = 0 \end{aligned}$$

in quanto  $\varepsilon_n^n = 1$ .

**Soluzione 1.20** L'esercizio segue semplicemente notando che le radici  $n$ -esima di  $w = re^{i\varphi}$  sono date da

$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi}{n}} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = z_0 \varepsilon_n^k$$

con  $z_0 = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi}{n}}$  che definisce una radice  $n$ -esima di  $w$  e  $\varepsilon_n$  radice  $n$ -esima dell'unità.

**Soluzione 1.21** Non trattandosi di un polinomio, scriviamo il numero complesso  $z = a + ib$ , in modo da trovare il sistema

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - 6a + 1 = 0 \\ -6b = 0, \end{cases}$$

che ha come soluzioni i numeri complessi (in realtà reali)  $z_1 = 3 + 2\sqrt{2}$ ,  $z_2 = 3 - 2\sqrt{2}$ .

**Soluzione 1.22** Trattandosi di un polinomio (biquadrato), usando la formula risolutiva, si ha, ponendo  $w = z^2$ ,

$$w_1 = -3 + \sqrt{14}, \quad w_2 = -3 - \sqrt{14}.$$

Le quattro soluzioni dell'equazione data saranno quindi le radici quadrate delle due soluzioni date, cioè

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{\sqrt{14} - 3}, & z_2 &= -\sqrt{\sqrt{14} - 3}, \\ z_3 &= i\sqrt{\sqrt{14} + 3}, & z_4 &= -i\sqrt{\sqrt{14} + 3}. \end{aligned}$$

**Soluzione 1.23** Le soluzioni saranno date dalle quattro radici quarte del numero complesso  $w = -4$ , e cioè

$$z_k = \sqrt[4]{2}(\cos \theta_k + i \sin \theta_k), \quad \theta_k = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k = 0, 1, 2, 3.$$

**Soluzione 1.24** Notiamo che  $p(i) = 0$ , quindi, dato che il polinomio ha coefficienti reali, si dovrà avere che anche  $-i$  è una radice del polinomio. Avremo quindi che

$$p(z) = (z^2 + 1)q(z),$$

dove  $q(z) = z^2 - 4z + 3 = (z - 3)(z - 1)$  e quindi le radici del polinomio  $p$  sono date da  $i$ ,  $-i$ ,  $1$  e  $3$ .

**Soluzione 1.25** Possiamo riscrivere l'equazione nella forma

$$(z + 1)^3 = 8i.$$

Si tratta quindi, posto  $w = z + 1$ , di trovare le tre radici cubiche del numero complesso  $8i$ , di modulo 8 e argomento  $\pi/2$ ; avremo quindi che le sue tre radici cubiche sono date da

$$w_k = 2(\cos \theta_k + i \sin \theta_k), \quad \theta_k = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2,$$

da cui

$$z_k = (-1 + 2 \cos \theta_k + 2i \sin \theta_k), \quad \theta_k = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2.$$

**Soluzione 1.26** L'equazione può essere riscritta come

$$\left(z + \frac{i}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{4},$$

da cui

$$z_k = -\frac{i}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \theta_k + i \sin \theta_k), \quad \theta_k = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k = 0, 1.$$

**Soluzione 1.27** Notiamo anzitutto che  $z = 0$  è soluzione dell'equazione data. Cerchiamo quindi le soluzioni non nulle; moltiplicando l'equazione per  $z$  otteniamo

$$z^2|z|^2 - (1 + 4\sqrt{3})i|z|^2 = 0,$$

o equivalentemente, dato che  $z \neq 0$ ,

$$z^2 - (1 + 4\sqrt{3})i = 0.$$

Quindi avremo due soluzioni non nulle, che altro non sono che le due radici del numero complesso  $(1 + 4\sqrt{3})i$ , e cioè

$$z_1 = \sqrt{1 + 4\sqrt{3}}(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4) = \sqrt{\frac{1 + 4\sqrt{3}}{2}}(1 + i),$$

$$z_2 = \sqrt{1 + 4\sqrt{3}}(\cos 5\pi/4 + i \sin 5\pi/4) = \sqrt{\frac{1 + 4\sqrt{3}}{2}}(-1 - i).$$

**Soluzione 1.28** Scrivendo  $w = a + ib$  e  $z = x + iy$ , l'equazione è equivalente all'equazione nelle due incognite reali  $x, y \in \mathbb{R}$  (essendo una equazione in due incognite in generale non ci possiamo aspettare una sola soluzione)

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = (x + a)^2 + (y + b)^2$$

che ha per soluzione il luogo di punti descritto dall'equazione

$$by = -ax$$

che descrive una retta nel piano  $Oxy$ . Si poteva arrivare a tale risultato interpretando geometricamente l'equazione data; la quantità  $|z - w|$  indica la distanza di  $z$  da  $w$ , mentre

$|z + w|$  rappresenta la distanza di  $z$  da  $-w$ . Quindi le soluzioni dell'equazione saranno esattamente i punti equidistanti da  $w$  e  $-w$ , cioè l'asse del segmento che congiunge  $w$  con  $-w$ . Infatti, indicando sempre con  $w = a + ib$ , la retta del piano cartesiano passante per  $w$  e  $-w$  è descritta dall'equazione

$$ay - bx = 0.$$

Tale retta passa per l'origine e ha come retta ortogonale passante per l'origine la retta di equazione

$$by + ax = 0;$$

questa retta descrive esattamente il luogo dei punti equidistanti da  $w$  e  $-w$ , e quindi è l'insieme delle soluzioni dell'equazione data.