

Esercizi V settimana

3 novembre 2011

1. Calcolare massa e baricentro della curva parametrizzata da $\varrho = A\vartheta$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$, la cui densità di massa è descritta dalla funzione $f(\varrho, \vartheta) = B\vartheta$.
2. Calcolare il lavoro del campo $F(x, y, z) = (y - z, z + x, x + y)$ lungo la curva parametrizzata da

$$r(t) = (2 \cos t, \sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

3. Determinare massa, baricentro e momenti d'inerzia per rotazioni attorno ai tre assi coordinati dell'insieme omogeneo $E = \{(x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}$.
4. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int_E x^2 |y| dx dy,$$

con $E = \{|x| + |y| \leq 1\}$.

Soluzioni

1. Per il calcolo della massa, possiamo utilizzare la formula

$$\begin{aligned} m &= \int_r f = \int_0^{2\pi} B\vartheta \sqrt{A^2\vartheta^2 + A^2} d\vartheta = AB \int_0^{2\pi} \vartheta \sqrt{1 + \vartheta^2} d\vartheta \\ &= \frac{AB}{3} \left((1 + 4\pi^2)^{3/2} - 1 \right). \end{aligned}$$

Per il calcolo del baricentro, il problema diventa il calcolo dei seguenti integrali

$$\bar{x} = \frac{1}{m} A^2 B \int_0^{2\pi} \vartheta^2 \cos \vartheta \sqrt{1 + \vartheta^2} d\vartheta,$$

e

$$\bar{y} = \frac{1}{m} A^2 B \int_0^{2\pi} \vartheta^2 \sin \vartheta \sqrt{1 + \vartheta^2} d\vartheta;$$

questi però sono integrali che non si calcolano, se non numericamente.

2. La curva r è una curva chiusa, quindi l'esercizio chiede di calcolare la circuitazione di F lungo la curva, che è data da

$$\begin{aligned} \int_r F \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} F(r(t)) \cdot r'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (0, \sqrt{2} \sin t + 2 \cos t, 2 \cos t + \sqrt{2} \sin t) \cdot (-2 \sin t, \sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \cos t) dt \\ &= 4\pi\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Se ne deduce quindi che il campo F non è conservativo in quanto la circuitazione non è nulla.

3. L'insieme E è omogeneo, quindi la massa sarà data dall'area di E , $m = |E| = \pi$. Per quanto riguarda il baricentro, avremo che

$$\bar{x} = \frac{1}{\pi} \int_E x dx dy = 1, \quad \bar{y} = \frac{1}{\pi} \int_E y dx dy = 0.$$

Si poteva arrivare a questa conclusione anche senza fare conti, in quanto E è dato dalla palla B_1 spostata a destra secondo il vettore $(1, 0)$, quindi il baricentro di E sarà dato dal baricentro della palla B_1 , cioè $(0, 0)$, traslato di $(1, 0)$. Per quanto riguarda i momenti di inerzia, abbiamo che

$$I_x = \int_E y^2 dx dy = \frac{\pi}{4},$$

mentre

$$I_y = \int_E x^2 dx dy = \frac{5\pi}{4};$$

infine avremo che

$$I_z = I_x + I_y = \frac{3\pi}{2}.$$

4. L'insieme E è dato da un quadrato nel piano di lato $\sqrt{2}$ e ruotato di $\pi/4$: sfruttando quindi le parità della funzione integranda e le simmetrie di E , possiamo concludere che, se denotiamo con $E_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$, allora

$$\int_E x^2 |y| dx dy = 4 \int_{E_1} x^2 y dx dy = \frac{1}{15}.$$