

Esercizi IX settimana

30 novembre 2011

1. Dato il numero complesso

$$z = \frac{1}{(1+i)(2-i)},$$

si determinino la sua parte reale e parte immaginaria; si calcolino quindi \bar{z} , $|z|$ e z^{-1} .

2. Dato il polinomio

$$p(z) = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2,$$

calcolare $p(1+i)$ e determinare quindi tutte le radici di p .

3. Studiare convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{x^2}{n}};$$

calcolare quindi

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx$$

e commentare il risultato.

4. Data $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ funzione continua, dimostrare che la successione di funzioni

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) \chi_{[i/n, (i+1)/n)}(x)$$

converge uniformemente a f .

Soluzioni

1. Possiamo scrivere

$$z = \frac{1}{(1+i)(2-i)} = \frac{(1-i)(2+i)}{(1+i)(2-i)(1-i)(2+i)} = \frac{1}{10}(3-i),$$

da cui

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{3}{10}, \quad \operatorname{Im}(z) = -\frac{1}{10}, \quad \bar{z} = \frac{1}{10}(3+i);$$

Infine

$$|z| = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(3+i).$$

2. Notiamo che

$$p(1+i) = (1+i)^4 - 2(1+i)^3 + 3(1+i)^2 - 2(1+i) + 2 = 0$$

e quindi, dato che p ha coefficienti reali, anche $1-i$ è radice di p . Quindi p è divisibile per $(z-i-1)(z-i+i) = (z^2-2z+2)$. Dato che

$$p(z) = (z^2-2z+2)(z^2+1).$$

se ne deduce che anche i e $-i$ sono radici di p .

3. Per la successione di funzioni data, abbiamo che $f_n(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$, mentre per $x \neq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0.$$

Quindi la successione converge puntualmente solo per $x \neq 0$ con limite uguale a $f(x) = 0$. La convergenza non può essere uniforme su tutto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ in quanto altrimenti si avrebbe convergenza uniforme su tutto \mathbb{R} , cosa che non può essere in quanto in 0 non si ha neanche convergenza puntuale. Si avrà però convergenza uniforme sugli intervalli chiusi che non contengono 0; sfruttando la parità delle f_n , possiamo restringerci agli intervalli $[a, +\infty)$, $a > 0$; la f_n è monotona decrescente su tale intervallo e quindi

$$\sup_{x \in [a, +\infty)} |f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-a^2/n} \rightarrow 0$$

per $n \rightarrow +\infty$, da cui la convergenza uniforme. Notiamo infine che

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Quindi in questo caso non è vero che l'integrale del limite coincide con il limite degli integrali; d'altronde, non essendoci convergenza uniforme, niente garantisce questo fatto.

4. La funzione f è continua su $[0, 1]$ chiuso e limitato, quindi è uniformemente continua; quindi, fissato $\varepsilon > 0$, per $n \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande, se $|x - y| < 1/n$, allora $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. La successione data non è definita per $x = 1$; potremmo definirla in tal punto $f_n(1) = f(1)$ oppure studiare solo convergenza puntuale e uniforme in $[0, 1)$; in ogni caso, se vogliamo stimare $|f(x) - f_n(x)|$, o $x = 1$ da cui $|f(x) - f_n(x)| = 0$, oppure esiste i tale che $x \in [i/n, (i+1)/n)$ da cui

$$|f(x) - f_n(x)| = |f(x) - f(i/n)| < \varepsilon$$

in quanto $|x - i/n| < 1/n$. Questo dimostra che

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon,$$

e cioè la successione converge uniformemente in $[0, 1]$ ad f .