

Capitolo 1

Funzioni continue in più variabili

Esercizio 1.1 Studiare la continuità della funzione $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \neq |y|\} \cup \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 - y^2} & |x| \neq |y| \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Esercizio 1.2 Studiare la continuità della funzione $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \neq |y|\} \cup \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 - y^2} & |x| \neq |y| \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Esercizio 1.3 Studiare la continuità della funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Esercizio 1.4 Studiare la continuità della funzione definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} (xy) \log(xy) & x, y > 0 \\ 0 & x, y = 0. \end{cases}$$

Esercizio 1.5 Studiare la continuità della funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Esercizio 1.6 Studiare la continuità della funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \right)^2 & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Esercizio 1.7 Studiare la continuità della funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}.$$

Esercizio 1.8 Studiare la continuità della funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \arctan \frac{x}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}.$$

Esercizio 1.9 Si determini il dominio delle seguenti funzioni:

1. $f(x, y) = \sqrt{xy + \ln x}$;
2. $f(x, y) = \frac{xy^2}{x - \ln y}$;
3. $f(x, y) = \sqrt{x - 1} + \ln(y - 1)$;
4. $f(x, y) = -\sqrt{xe^y - ye^x}$.

Si dica inoltre se tali funzioni sono continue sul loro dominio.

Esercizio 1.10 Determinare gli insiemi $\{f = c\}$ per le seguenti funzioni di due variabili:

1. $f(x, y) = x - y$;
2. $f(x, y) = x^2 + 2y^2$;
3. $f(x, y) = xy$;
4. $f(x, y) = \frac{x^2}{y}$;
5. $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$;
6. $f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$;
7. $f(x, y) = xe^{-y}$;
8. $f(x, y) = \sqrt{\frac{1}{y} - x^2}$;

$$9. f(x, y) = \sqrt{xy(xy - 1)}.$$

Esercizio 1.11 Determinare gli insiemi $\{f = c\}$ per le seguenti funzioni di tre variabili:

$$1. f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2;$$

$$2. f(x, y, z) = x + 2y + 3z;$$

$$3. f(x, y, z) = x^2 + y^2;$$

$$4. f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{z^2};$$

$$5. f(x, y, z) = |x| + |y| + |z|.$$

1.1 Soluzioni

Soluzione 1.1 La restrizione della funzione alle rette $y = mx$ con $m \neq \pm 1$ è data da

$$f(x, mx) = \frac{m}{1 - m^2},$$

da cui

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \frac{m}{1 - m^2},$$

cioè esistono successioni diverse di punti del piano che convergono a $(0, 0)$ e su cui la funzione ha valori limite differenti, quindi f non può essere continua.

Soluzione 1.2 La restrizione di f alle rette $y = mx$, $m \neq \pm 1$ è data da

$$f(x, mx) = \frac{m^2 x}{1 - m^2}$$

ed il limite di tali restrizioni per $x \rightarrow 0$ è zero. Però se si considera la restrizione di f sulle parabole $y = x - x^2$, si ottiene

$$f(x, x - x^2) = \frac{x^3 - x^3}{2x^3 - x^4},$$

da cui

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x - x^2) = \frac{1}{2}.$$

Quindi, le due successioni $(1/h, m/h)_{h \in \mathbb{N}}$ e $(1/h, 1/h - 1/h^2)_{h \in \mathbb{N}}$ tendono entrambe a $(0, 0)$ ma i valori di f su di esse tendono rispettivamente a 0 e $1/2$, da cui la non continuità di f .

Soluzione 1.3 Nel caso in considerazione, la funzione non presenta alcun problema di continuità al di fuori del punto $(0, 0)$; inoltre, calcolando il limite lungo gli assi cartesiani e lungo una qualsiasi direzione $y = mx$, esso è sempre 0. Quindi, o riusciamo a trovare un cammino particolare che porti verso lo zero e lungo il quale la funzione non tende a 0, oppure riusciamo a dimostrare veramente che il limite è 0. Un metodo che può essere utile

per dimostrare la continuità in un dato punto è utilizzare le coordinate polari; o meglio, le coordinate polari centrate nel punto limite. In dettaglio, se dobbiamo verificare che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L, \quad (1.1)$$

quello che si richiede nel limite è di verificare che il valore di f tenda al numero (o al vettore nel caso vettoriale) L quando la distanza di (x,y) da (x_0,y_0) tende a zero. Quindi possiamo scrivere le coordinate polari centrate in (x_0,y_0) valide per ogni punto (x,y) in un intorno di (x_0,y_0) , come segue:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \varrho \cos \theta \\ y &= y_0 + \varrho \sin \theta \end{aligned}$$

con $\theta \in [0, 2\pi)$ e $\varrho > 0$. Dunque, quando si fa il limite per $(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)$, si sta richiedendo che $\varrho \rightarrow 0$. In definitiva, se riusciamo a trovare una funzione $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua in 0 tale che $g(\varrho) \rightarrow 0$ per $\varrho \rightarrow 0$ e

$$|f(x,y) - L| \leq g(\varrho)$$

per ϱ sufficientemente piccolo, allora siamo riusciti a dimostrare che il limite in (1.1) è verificato. Nel nostro caso $(x_0,y_0) = (0,0)$; inoltre se (x,y) si trova in un intorno di $(0,0)$, allora il valore di xy è prossimo allo zero e possiamo usare quindi lo sviluppo di Taylor per la funzione coseno e ottenere che

$$\frac{1 - \cos(xy)}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 y^2 + o(x^2 y^2)}{2(x^2 + y^2)}.$$

Quindi, passando alle coordinate polari otteniamo la quantità

$$\frac{\varrho^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + o(\varrho^4)}{2\varrho^2}$$

che si può stimare con

$$\left| \frac{\varrho^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + o(\varrho^4)}{2\varrho^2} \right| \leq \frac{\varrho^2}{2} + o(\varrho^2) = g(\varrho).$$

Quindi il limite (1.1) risulta verificato e la funzione è continua.

Soluzione 1.4 Nel presente esercizio, la continuità della funzione va verificata non solo nel punto $(0,0)$, ma anche in tutti i punti della forma $(x_0,0)$ con $x_0 > 0$ e $(0,y_0)$ con $y_0 > 0$. In questo caso conviene cercare di sfruttare la forma della funzione data; la funzione è infatti di due variabili ma dipende solo dal prodotto $t = xy$; in tutti i casi in cui va verificata la continuità, si ha che $t \rightarrow 0$. Ricadiamo quindi sempre nel limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} t \ln t = 0.$$

Più rigorosamente, se passiamo alle coordinate polari $x = \varrho \cos \theta, y = \varrho \sin \theta$, abbiamo che

$$|xy \ln xy| \leq -\varrho^2 \ln \varrho^2$$

(per $\varrho \rightarrow 0$ si ha che $\ln \varrho < 0$) da cui l'esistenza del limite pari a 0.

Soluzione 1.5 Notiamo anzitutto che la funzione data è a simmetria radiale, cioè essa dipende solo dalla distanza del punto (x, y) dall'origine. Questo vuol dire che se riscriviamo la funzione in coordinate polari $x = \varrho \cos \theta$, $y = \varrho \sin \theta$, otteniamo che

$$f(x, y) = \tilde{f}(\varrho, \theta) = \varrho^2 \sin \frac{1}{\varrho}.$$

Da questo segue immediatamente la continuità della funzione data nell'origine.

Soluzione 1.6 Si nota che la restrizione di f alle parabole $y = mx^2$ è data da

$$f(x, mx^2) = \frac{m^2}{(1+m)^2}$$

da cui la non continuità di f .

Soluzione 1.7 Le restrizioni di f alle rette $x = 0$ e $y = 0$ è data da

$$f(0, y) = 0, \quad f(x, 0) = \frac{2}{x}$$

da cui si deduce la non continuità di f .

Soluzione 1.8 Si nota che prendendo la sezione di f lungo l'asse x si ottiene la funzione $\arctan 1/x$ e

$$-\frac{\pi}{2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan \frac{1}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Quindi la funzione non può essere continua.

Soluzione 1.9

1. Siccome nella definizione di f compare $\ln x$, si deve anzitutto avere $x > 0$; poi, la radice è definita per $xy + \ln x \geq 0$, quindi il dominio è dato da

$$D(f) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \geq -\frac{\ln x}{x} \right\}$$

(si veda la Figura 1.1). Su tale dominio f è continua in quanto xy continua, $\ln x$ continua per $x > 0$, $xy + \ln x$ continua perché somma di funzioni continue e la composizione con la radice è una funzione continua quando l'argomento della radice è contenuto nel dominio della radice, cioè quando l'argomento è positivo.

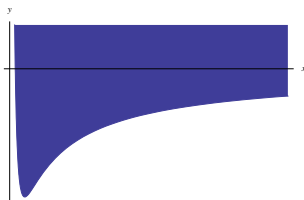


Figura 1.1:

2. Il dominio di f è determinato dall'esistenza del logaritmo e dal non annullamento del denominatore $x - \ln y$, cioè

$$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0, y \neq e^x\}$$

che è la regione del semipiano superiore a cui è stato tolto il grafico della funzione esponenziale. Su tale dominio f è continua in quanto $x^2 y$ continua, $x - \ln y$ continua e il rapporto tra funzioni continue, quando il denominatore è non nullo, è continuo.

3. Si avrà che

$$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, y > 1\}$$

e su tale dominio f è continua.

4. La funzione data è definita per $xe^y - ye^x \geq 0$, cioè

$$\frac{x}{e^x} \geq \frac{y}{e^y}. \quad (1.2)$$

Studiamo quindi la funzione $g(t) = te^{-t}$; tale funzione è monotona crescente per $t \leq 1$, decrescente per $t \geq 1$ (si veda il grafico 1.2). In particolare, la restrizione di g a $[0, 1]$ è invertibile con inversa g^{-1} ; abbiamo rappresentato in figura anche il grafico di $h(t) = g^{-1}(g|_{[1, +\infty)})$. Dividiamo quindi la determinazione del dominio di f in vari

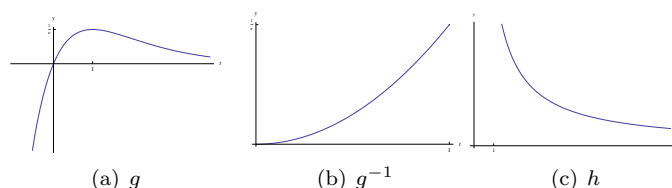


Figura 1.2: Grafici delle funzioni g , g^{-1} ed h .

punti;

- i) per $x \leq 1$ e $y \leq 1$, siccome g è monotona crescente, la condizione (1.2) è verificata per $y \leq x$;
- ii) per $x \geq 1$, $y \geq 1$, g è monotona decrescente, quindi (1.2) è verificata per $y \geq x$;
- iii) se $x \geq 1$ e $y \leq 0$ oppure $x \leq 0$, $y \geq 1$, (1.2) è sempre verificata;
- iv) se $x \geq 1$ e $0 \leq y \leq 1$, (1.2) è verificata per $y \leq h(x)$;
- v) infine se $0 \leq x \leq 1$, $y \geq 1$, (1.2) è verificata per $x \geq h(y)$.

In definitiva, il dominio di f è individuato dalla regione in Figura 1.3.

Soluzione 1.10

1. L'insieme cercato è determinato dalle soluzioni dell'equazione $x - y = c$, cioè dalle rette $y = x - c$. Se ne deduce che f è costante lungo tali rette, parallele tra loro, con valore tanto maggiore quanto più tali rette si spostano verso il basso. Si noti poi che per ogni $c \in \mathbb{R}$ tali insiemi sono non vuoti.

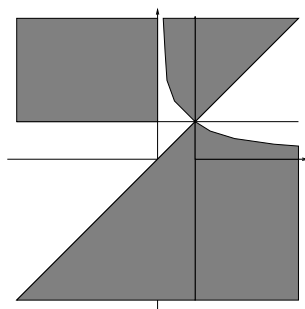


Figura 1.3:

2. Si tratta di risolvere l'equazione $x^2 + 2y^2 = c$; quindi si deve avere $c \geq 0$. Per $c = 0$ l'unica soluzione è data da $(0, 0)$, mentre per $c > 0$ si ottiene

$$\frac{x^2}{c} + \frac{2y^2}{c} = 1$$

che è l'equazione di un'ellisse di semiassi \sqrt{c} e $\sqrt{c/2}$; tali ellissi sono concentriche e tanto più grandi quanto più è elevato il valore di c .

3. Dobbiamo risolvere l'equazione $xy = c$; avremo quindi due rami di iperbole, quelli in Figura 1.4 (a) per $c > 0$, e quelli in Figura 1.4 (b) per $c < 0$. Per $c = 0$ si ottengono invece gli assi $x = 0$ e $y = 0$.

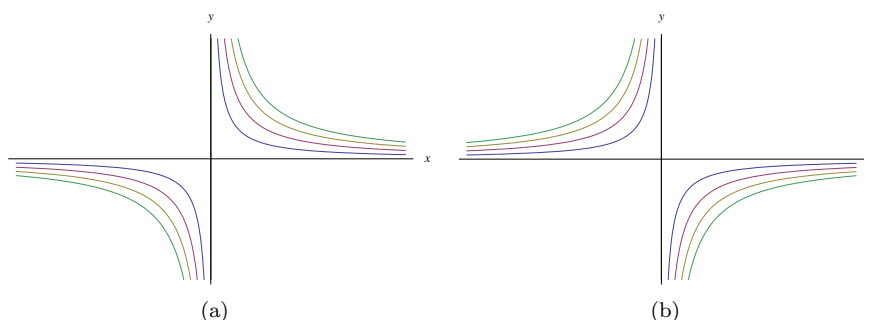


Figura 1.4: Insiemi di livello per (a) $c > 0$ e (b) $c < 0$.

4. Si tratta di risolvere $x^2/y = c$; per $c = 0$ si ottiene l'asse $x = 0$, mentre per $c \neq 0$ otteniamo

$$y = \frac{x^2}{c}$$

che sono parabole con concavità verso l'alto se $c > 0$, verso il basso altrimenti. Tali parabole sono tanto più larghe quanto più c è grande. Si nota altresì che la funzione, che non è definita per $y = 0$, non può essere estesa con continuità in $(0, 0)$.

5. Dobbiamo risolvere l'equazione

$$\frac{x - y}{x + y} = c,$$

cioè $x(1-c) = y(1+c)$. Per $c = -1$ si ottiene l'asse $x = 0$, mentre per $c \neq -1$ le rette

$$y = \frac{1-c}{1+c}x,$$

tutte passanti per l'origine (quindi f non può essere estesa con continuità in $(0,0)$).

6. Dobbiamo risolvere l'equazione

$$\frac{y}{x^2 + y^2} = c$$

cioè $c(x^2 + y^2) - y = 0$. Per $c = 0$ si ottiene l'asse $y = 0$, altrimenti possiamo riscrivere l'equazione nella forma

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2c}\right)^2 = \frac{1}{4c^2}$$

che rappresenta una circonferenza centrata in $(0, 1/2c)$ e di raggio $1/2c$.

7. Dobbiamo risolvere l'equazione $xe^{-y} = c$, cioè $x = ce^y$. Per $c = 0$ si ottiene l'asse $x = 0$, altrimenti i grafici, nella variabile y , della funzione esponenziale (si veda Figura 1.5).

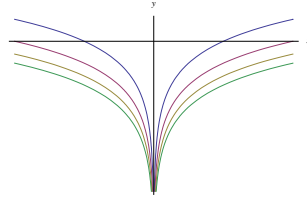


Figura 1.5: Livelli della funzione xe^{-y}

8. Dobbiamo risolvere l'equazione

$$\sqrt{\frac{1}{y} - x^2} = c \tag{1.3}$$

e quindi si deve avere $c \geq 0$; si noti poi che la radice è definita per $0 \leq y \leq \frac{1}{x^2}$. Elevando al quadrato in (1.3), si ottiene

$$y = \frac{1}{x^2 + c^2},$$

che sono gli insiemi rappresentati in Figura 1.6.

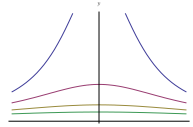


Figura 1.6: Livelli della funzione $\sqrt{\frac{1}{y} - x^2}$

9. Dobbiamo risolvere l'equazione

$$\sqrt{xy(xy-1)} = c$$

e quindi $c \geq 0$. Elevando al quadrato e ricavando xy , si ottiene

$$xy = \frac{1 \pm \sqrt{1+4c^2}}{2}$$

che sono per ogni c quattro rami di iperboli (in Figura 1.7 è rappresentato il caso $c = 2$).

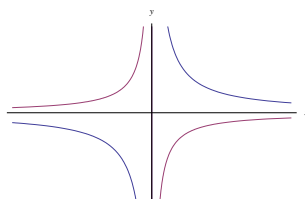


Figura 1.7: Livello $c = 2$ della funzione $\sqrt{xy(xy-1)}$

Soluzione 1.11

1. Bisogna risolvere l'equazione $x^2 + y^2 + z^2 = c$, quindi si hanno soluzioni per $c \geq 0$. Per $c = 0$ la soluzione è data dal solo punto $(0, 0, 0)$, mentre per $c > 0$ le soluzioni sono le sfere centrate nell'origine e di raggio \sqrt{c} ; quindi gli insiemi di livello si allargano quando c cresce.
2. Bisogna risolvere l'equazione $x + 2y + 3z = c$, da cui si deduce che i livelli sono piani paralleli ortogonali al vettore $(1, 2, 3)$ e passanti per i punti $(c, 0, 0)$.
3. Bisogna risolvere l'equazione $x^2 + y^2 = c$, da cui $c \geq 0$. Per $c = 0$, si trova $x = y = 0$, quindi il livello 0 è l'insieme dei punti di coordinate $(0, 0, z)$ cioè l'asse verticale z . Per $c > 0$, (x, y) deve appartenere alla circonferenza centrata in $(0, 0)$ di raggio \sqrt{c} , quindi il livello c è la superficie laterale del cilindro verticale basato su tale circonferenza.
4. Bisogna risolvere l'equazione

$$\frac{x^2 + y^2}{z^2} = c$$

da cui $c \geq 0$. Per $c = 0$ il livello è dato da $x = y = 0$, cioè l'asse verticale $(0, 0, z)$, $z \neq 0$ in quanto per $z = 0$ la f non è definita. Per $c > 0$ si ottiene l'equazione $cz^2 = x^2 + y^2$, che definisce la superficie laterale del cono la cui intersezione con il piano $z = \text{costante}$ è la circonferenza di raggio $|z|\sqrt{c}$. Tali coni sono tanto più aperti quanto più grande è c e se ne deduce che f non può essere estesa con continuità in $(0, 0, 0)$.

5. Bisogna risolvere l'equazione $|x| + |y| + |z| = c$, da cui $c \geq 0$. Per $c = 0$ si ottiene $x = y = z = 0$, mentre per $c > 0$ si hanno le seguenti otto possibilità:
 - per $x, y, z \geq 0$ il piano di equazione $x + y + z = c$;
 - per $x, y \geq 0$ e $z \leq 0$ il piano di equazione $x + y - z = c$;

- per $x \geq 0$ e $y, z \leq 0$ il piano di equazione $x - y - z = c$;
- per $x, z \geq 0$ e $y \leq 0$ il piano di equazione $x - y + z = c$;
- per $x, y, z \leq 0$ il piano di equazione $-x - y - z = c$;
- per $x, y \leq 0$ e $z \geq 0$ il piano di equazione $-x - y + z = c$;
- per $x, z \leq 0$ e $y \geq 0$ il piano di equazione $-x + y - z = c$;
- per $x \leq 0$ e $y, z \geq 0$ il piano di equazione $x + y + z = c$.

In Figura 1.8 è riportato il livello con $c = 2$.

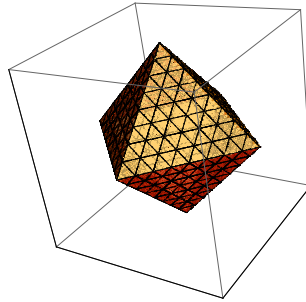


Figura 1.8: Livello $c = 2$ della funzione $|x| + |y| + |z|$