

Capitolo 1

Estremi e punti stazionari

1.1 Massimi e minimi su insiemi

Esercizio 1.1 Trovare i punti di massimo e minimo e i valori massimo e minimo della funzione $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ dove $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} \leq 1\}$ e $f(x, y) = x^3 - y^2$.

Esercizio 1.2 Calcolare massimi e minimi della funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$$

sull'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \leq 0, x + y \geq -3\}$.

Esercizio 1.3 Calcolare massimi e minimi della funzione

$$f(x, y) = x^2 + 3y^2 - xy - y$$

sull'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

Esercizio 1.4 Calcolare massimi e minimi della funzione

$$f(x, y) = 3x + y - 2$$

sull'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 3, y \leq 2, y \geq 1 - x\}$.

Esercizio 1.5 Calcolare massimi e minimi della funzione

$$f(x, y) = x^3 + y^2$$

sull'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Esercizio 1.6 Calcolare massimi e minimi della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x}{2} - y^2$$

sull'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Esercizio 1.7 Calcolare massimi e minimi della funzione

$$f(x, y) = xy$$

sull'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - xy + y^2 \leq 1\}$.

Esercizio 1.8 Calcolare massimi e minimi della funzione

$$f(x, y) = 6 - 4x - 3y$$

sull'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Esercizio 1.9 Calcolare gli assi dell'ellisse $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9\}$.

Esercizio 1.10 Calcolare massimi e minimi della funzione

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

sugli insiemi

- $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 3y - 2z = 4\}$;
- $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 1, 2x - y - 3z = 4\}$.

Esercizio 1.11 Calcolare massimi e minimi della funzione

$$f(x, y, z) = x + 3y - z$$

sull'insieme $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z = 0, z = 4x + 4y\}$.

Esercizio 1.12 Trovare massimo e minimo di

$$f(x, y, z) = x + y - z^2$$

nell'insieme $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 \leq 0, 0 \leq z \leq 2\}$.

Esercizio 1.13 Trovare la massima e la minima distanza dall'origine dell'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 \leq 3, z - y = 1\}.$$

Esercizio 1.14 Si determinino, se esistono, il massimo e il minimo di

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 - y^2}{1 + z^2}$$

nell'insieme (illimitato) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Esercizio 1.15 Calcolare massimi e minimi della funzione

$$f(x, y) = \frac{1}{(x - y)^2}$$

sugli insiemi:

- $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 2)^2 + y^2 \leq 2\}$;

- $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x \neq y\}$;
- $[1, 2] \times [-1, 0]$;
- $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 2, y \geq 0, y \leq x - 1\}$;
- $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \leq \log x\}$.

Esercizio 1.16 Si determinino, se esistono, il massimo e il minimo di

$$f(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z^2} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

nell'insieme $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 + 4z^2 \leq 4, x \geq 0\}$.

Esercizio 1.17 Si determinino, se esistono, il massimo e il minimo di

$$f(x, y, z) = 2x^2 - y^2 - z^2 - x$$

nell'insieme $E_1 \cup E_2$ dove

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \leq 0\},$$

mentre

$$E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - (z - 1)^2 \leq 0, 0 \leq z \leq 1\}.$$

Esercizio 1.18 Si determinino, se esistono, il massimo e il minimo di

$$f(x, y, z) = \frac{1}{1 + x^2 + (y - 1)^2}$$

nell'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \frac{1}{|x|}\}$.

Esercizio 1.19 Sia $A = (a_{ij})_{i,j=1}^N$ una matrice simmetrica a (coefficienti reali). Consideriamo la forma quadratica

$$Ax \cdot y = \sum_{i,j=1}^N a_{ij} x_j y_i.$$

Massimizzare e minimizzare la funzione

$$f(x) = \frac{Ax \cdot x}{|x|^2} = \frac{\sum_{i,j=1}^N a_{ij} x_j x_i}{|x|^2}$$

definita per $|x| \neq 0$.

Esercizio 1.20 Trovare massimo e minimo della funzione $f(x, y) = (y - x^2)^3$ nell'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$ utilizzando le curve di livello di f .

Esercizio 1.21 Trovare massimo e minimo della funzione $f(x, y) = (x + y)^2$ nell'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ tramite le curve di livello di f .

Esercizio 1.22 Trovare massimo e minimo della funzione $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ nell'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ mediante le curve di livello di f .

Esercizio 1.23 Minimizzare la funzione

$$f(x_1, \dots, x_N) = x_1 + \dots + x_N$$

tra tutti i numeri positivi $x_j > 0$ il cui prodotto è uno, cioè sotto la condizione

$$\prod_{i=1}^N x_i = x_1 \cdot \dots \cdot x_N = 1.$$

Esercizio 1.24 Massimizzare fra tutti i parallelepipedi di superficie assegnata S il volume.

Esercizio 1.25 Trovare massimo e minimo di $f(x, y) = xy$ nell'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x + 2/\sqrt[3]{5}, 3x^5 + 5y^3 \leq 8\}.$$

Esercizio 1.26 Trovare massimo e minimo, se esistono, di $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2$ nell'insieme $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 y z = 1\}$.

Esercizio 1.27 Trovare massimo e minimo di $f(x, y, z) = x + 3y - z$ nell'insieme $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z = 0, z = 2x + 4y\}$.

Esercizio 1.28 Trovare, se esistono, i punti di massimo e minimo di

$$f(x, y) = \frac{2x - 2y + 1}{x^2 + y^2 + 1}$$

su $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq y \leq 1 + |x|\}$.

Esercizio 1.29 Cercare i punti di massimo e minimo di $f(x, y) = xe^{-xy}$ nell'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 2x\},$$

Esercizio 1.30 Trovare, se esistono, i punti di massimo e minimo di

$$f(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2$$

nell'insieme $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 4y - 6z + 5 = 0\}$.

1.2 Punti stazionari e loro classificazione

Esercizio 1.31 Determinare i punti stazionari, nel dominio di definizione, delle seguenti funzioni:

1. $f(x, y) = x^3 + 4y^2 + 4xy$;
2. $f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$;
3. $f(x, y) = \frac{x + y - 1}{x^2 + y^2}$;
4. $f(x, y) = (2x + y)e^{-x^2 - y^2}$;
5. $f(x, y) = xy \ln(xy^2) + x^2 y$;

6. $f(x, y) = \sin(x + y) \cos(x - y)$.

Esercizio 1.32 Determinare i punti critici della funzione $f(x, y) = \sinh(x^4 + y^3 - 4x^2 - 3y^2)$ all'interno dell'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|(1 + (y - 2)^2) - 2 < 0\}$, studiarne la natura e stabilire se f ammette massimo e minimo.

Esercizio 1.33 Determinare i punti critici della funzione $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$ in \mathbb{R}^2 , studiarne la natura e stabilire se f ammette massimo e minimo in \mathbb{R}^2 .

Esercizio 1.34 Studiare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2 + 2.$$

Esercizio 1.35 Si consideri la funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^4 + y^2 + z^3 - 2xz$. Studiarne i punti stazionari liberi in \mathbb{R}^3 .

Esercizio 1.36 Studiare i punti stazionari liberi in \mathbb{R}^2 della funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + y^3 - 8x^3 - 6xy^2 + 12yx^2.$$

Esercizio 1.37 Studiare i punti stazionari liberi in \mathbb{R}^3 della funzione $f(x, y, z) = \frac{3}{4}x^2 + 8y^2 + 7xy + z^4$.

1.3 Soluzioni

Soluzione 1.1 Per il teorema di Weierstrass f ammette sia massimo che minimo. All'interno si ha

$$\nabla f(x, y) = (3x^2, -2y) = 0$$

che ha soluzione solo per $(x, y) = (0, 0)$ che è all'interno di E . Vediamo il bordo. Prendiamo

Figura 1.1:

in considerazione il lato l_1 : parametrizziamo con la seguente funzione

$$\varphi : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = (1, t)$$

e consideriamo $f \circ \varphi : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$. Si ha

$$\frac{d}{dt}(f \circ \varphi)(t) = \frac{d}{dt}f(\varphi(t)) = \frac{d}{dt}f(1, t) = \frac{d}{dt}(1 - t^2) = -2t = 0$$

per $t = 0$ che corrisponde al punto $(1, \varphi(0)) = (1, 0)$. Chiaramente in casi semplici come questo si può considerare direttamente la funzione f ristretta all'insieme l_1 e derivare rispetto a y la funzione $f(1, y) = 1 - y^2$, ma in tal caso si presti molta attenzione. Bisogna sempre ricordare che alla base c'è una parametrizzazione. Analogamente si parametrizzano gli altri lati e derivando si ottengono i punti $(0, 1)$ sul lato l_2 , $(-1, 0)$ sul lato l_3 , $(0, -1)$ sul lato l_4 . Abbiamo quindi i seguenti candidati: $(0, 0)$ punto stazionario interno, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ e $(0, -1)$ punti stazionari vincolati, $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$ vertici. A questo punto valutando la funzione f su tutti e nove i punti si trova che il punto di massimo è $(1, 0)$ e il valore massimo di f è $f(1, 0) = 1$, i punti di minimo sono $(-1, 1)$ e $(-1, -1)$ e il valore minimo di f è $f(-1, 1) = f(-1, -1) = -2$.

Soluzione 1.2 La funzione data è continua e l'insieme è compatto, quindi il massimo e il minimo esistono di sicuro. Nella parte interna il gradiente si annulla in $(-1, -1)$ mentre la matrice Hessiana è data da

$$Hf(-1, -1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tale matrice ha autovalori pari a 1 e 3, quindi il punto $(-1, -1)$ è un punto di minimo con valore $f(-1, -1) = -1$. Sul bordo si trova che per $y = 0$ e $-3 < x < 0$, si ha un minimo per $x = -1/2$ con $f(-1/2, 0) = -1/4$, mentre per $x = 0$ e $-3 < y < 0$ analogamente esiste un minimo per $y = -1/2$ con $f(0, -1/2) = -1/4$ e per $y = -x - 3$ con $-3 < x < 0$ non si hanno punti critici, infine $f(-3, 0) = 6$, $f(0, 0) = 0$ e $f(0, -3) = 6$. In definitiva il massimo è assunto in $(-3, 0)$ e $(0, -3)$ e il minimo in $(-1, -1)$ con valore -1 .

Soluzione 1.3 Per quanto riguarda i punti interni, troviamo il punto $(1/11, 2/11)$ che è un punto di minimo con $f(1/11, 2/11) = -1/11$. Per quanto riguarda i bordi, per $y = 0$ e $0 < x < 1$ non si hanno punti critici, mentre per $x = 1$ e $0 < y < 1$ si ha un punto critico in $y = 1/3$ e $f(1, 1/3) = 2/3$; per $x = 0$ e $0 < y < 1$ si ha un punto critico in $y = 1/6$ con $f(0, 1/6) = -1/12$, mentre per $y = 1$ con $0 < x < 1$ si ha un minimo relativo in $x = 1/2$ con $f(1/2, 1) = 7/4$. Infine si ha che $f(0, 0) = 0$, $f(1, 0) = 1$, $f(1, 1) = 2$ e $f(0, 1) = 2$. Quindi la funzione ammette massimo in $(1, 1)$ e minimo in $(1/11, 2/11)$.

Soluzione 1.4 Il gradiente della funzione data non si annulla mai, quindi in particolare non si annullerà sulla parte interna di E . È facile inoltre convincersi che sui bordi unidimensionali non ci sono massimi o minimi (eventualmente fare i calcoli), mentre nei vertici si ha $f(3, -2) = 5$, $f(3, 2) = 9$ e $f(-1, 2) = -3$; quindi il massimo è assunto in $(3, 2)$ e il minimo in $(-1, 2)$.

Soluzione 1.5 Il gradiente della funzione si annulla in $(0, 0)$, che è interno ad E ma è un punto di sella (si può già dedurre questo dal fatto che la funzione è positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$, $y^2 < -\sqrt{x^3}$ e $f(0, 0) = 0$). Per verificare rigorosamente che $(0, 0)$ è un punto di sella, si calcoli la matrice Hessiana e una volta notato che un autovalore è nullo mentre il secondo è positivo, provare a fare le sezioni lungo gli autovettori, che in questo caso altro non sono che le sezioni fatte lungo gli assi coordinati. Quindi il massimo e il minimo della funzione vanno ricercati sul bordo di E .

Proviamo ad applicare vari metodi per trovare il massimo e il minimo sul bordo; si può ad esempio parametrizzare il bordo tramite la trasformazione

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$$

con $\theta \in [0, 2\pi)$. Otteniamo quindi la funzione di una variabile

$$g(\theta) = \frac{\cos^3 \theta}{8} + \sin^2 \theta,$$

che ha derivata nulla per $\theta = 0 + k\pi/2$, $k = 0, 1, 2, 3$. con $g(0) = 1/8$, $g(\pi/2) = 1$, $g(\pi) = -1/8$ e $g(3\pi/2) = 1$. Quindi il massimo vale 1 ed è assunto nei punti $(0, 1)$ e $(0, -1)$, mentre il minimo è $-1/8$ assunto in $(-1, 0)$.

Applicando la teoria dei moltiplicatori di Lagrange, otteniamo la funzione

$$\phi(x, y, \lambda) = x^3 + y^2 - \lambda(4x^2 + y^2 - 1)$$

da cui il sistema

$$\begin{cases} 3x^2 - 8\lambda x = 0 \\ 2y - 2\lambda y = 0 \\ 4x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono date da

$$\begin{aligned} \lambda = 1 \quad x = 0 \quad y = \pm 1 \\ \lambda = \mp \frac{3}{16} \quad x = \pm \frac{1}{2} \quad y = 0, \end{aligned}$$

che sono gli stessi punti trovati precedentemente.

C'è un altro metodo per trovare tali punti; si potrebbe notare che la funzione nella variabile y dipende solo da y^2 e che il vincolo è dato da $y^2 = 1 - 4x^2$. Se si ragiona in questo modo e si sostituisce $y^2 = 1 - 4x^2$, si trova la funzione di una sola variabile

$$g(x) = x^3 - 4x^2 + 1$$

con la condizione $-1/2 < x < 1/2$. Tale funzione ha solo il punto $x = 0$ come punto stazionario, in corrispondenza di $y = \pm 1$. Ci si potrebbe chiedere come mai troviamo solo due punti in questo modo, mentre prima ne trovavamo quattro. Il problema è che porre $y^2 = 1 - 4x^2$ significa in realtà fare le parametrizzazioni $y = \pm\sqrt{1 - 4x^2}$; queste sono due parametrizzazioni che sono definite e derivabili per $-1/2 < x < 1/2$, mentre il punto $x = -1/2$ e il punto $x = 1/2$ non vengono considerati (non sono punti di derivabilità per la parametrizzazione). Di conseguenza, quando si cerca di sostituire l'equazione del vincolo all'interno della funzione, bisogna fare molta attenzione.

Soluzione 1.6 Il gradiente della funzione si annulla all'interno di E nei punti $(1/4, \pm\sqrt{3}/4)$; dallo studio della matrice Hessiana si trova che tali punti sono punti di sella. Quindi i massimi e minimi vanno cercati sul bordo. Utilizzando la parametrizzazione

$$\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$$

si trova la funzione

$$g(\theta) = 1 - \frac{\cos \theta}{2} - \sin^2 \theta,$$

i cui punti stazionari sono dati da $\theta = 0, \arccos(1/4), \pi, 2\pi - \arccos(1/4)$, che corrispondono ai punti $(1, 0), (1/4, \sqrt{15}/4), (-1, 0)$ e $(1/4, -\sqrt{15}/4)$ in cui la funzione vale rispettivamente $1/2, -1/16, 3/2$ e $-1/16$. Quindi il massimo è assunto in $(-1, 0)$ e il minimo in $(1/4, \sqrt{15}/4)$ e $(1/4, -\sqrt{15}/4)$.

Soluzione 1.7 Per quanto riguarda i punti interni, il gradiente si annulla in $(0, 0)$ che è un punto di sella in quanto la funzione è nulla in $(0, 0)$, positiva per $x, y > 0$ e $x, y < 0$ e negativa per $x > 0, y < 0$ e $x < 0, y > 0$. Per quanto riguarda i punti al bordo, utilizzando i moltiplicatori di Lagrange, otteniamo la funzione

$$\phi(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x^2 - xy + y^2 - 1)$$

che conduce al sistema

$$\begin{cases} y = \lambda(2x - y) \\ x = \lambda(2y - x) \\ x^2 - xy + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Tale sistema ha le soluzioni

$$\begin{aligned} \lambda = 1 \quad x = \pm 1 \quad y = \pm 1 \\ \lambda = -\frac{1}{3} \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad y = \mp \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Se ne ricava che si ha massimo per $(1, 1)$ e $(-1, -1)$ con valore 1 e minimo per $(1/3, -1/3)$ e $(-1/3, 1/3)$ con valore $-1/9$.

Soluzione 1.8 Il gradiente della funzione non si annulla mai, quindi i massimi e minimi vanno cercati sul bordo. Parametrizzando in coordinate polari, si trovano i punti stazionari $(4/5, 3/5)$ e $(-4/5, -3/5)$ che sono rispettivamente di minimo e di massimo.

Soluzione 1.9 L'ellisse data è centrata nell'origine; per trovare i semiassi, basta trovare dei punti molto particolari dell'ellisse, quello di minor distanza dall'origine e quello di maggior distanza (il semiasse minore e il semiasse maggiore). Si tratta quindi di trovare massimo e minimo della funzione distanza (o equivalentemente del quadrato della funzione distanza) sotto il vincolo di appartenere all'insieme E . Abbiamo quindi la funzione

$$\phi(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(5x^2 + 8xy + 5y^2 - 9),$$

che ha punti di massimo e minimo rispettivamente in $(\pm\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}/2)$, in cui il semiasse è pari a 1 e $(\pm 3\sqrt{2}/2, \mp 3\sqrt{2}/2)$, in cui il semiasse è pari a 3 (la funzione quadrato della distanza è pari a 9).

Soluzione 1.10 Il gradiente della funzione data si annulla in $(0, 0, 0)$, che non è interno a nessuno dei due insiemi in esame (il primo è un piano e il secondo una retta; entrambi hanno parte interna vuota). Nel primo caso, usando i moltiplicatori di Lagrange, si ottiene il punto $(2/7, 6/7, -4/7)$ in cui la funzione vale $8/7$. Per capire se si tratta di massimo o minimo o sella, dobbiamo notare che la funzione data è sempre positiva e che l'insieme E è illimitato; inoltre

$$\lim_{E \ni (x, y, z) \rightarrow \infty} (x^2 + y^2 + z^2) = +\infty.$$

Quindi la funzione non ammette massimo, mentre il punto trovato è un punto di minimo. Per quanto riguarda la seconda parte dell'esercizio, di nuovo la funzione non è limitata sull'insieme in considerazione, e col metodo dei moltiplicatori si trova il punto $(16/15, 1/3, -11/15)$ che è un punto di minimo.

Soluzione 1.11 Nel caso in cui, come nell'esercizio in questione, i vincoli siano due, si può a volte procedere come segue; si può fare una sostituzione, ad esempio $z = 4x + 4y$ (operazione lecita; perchè?), e poi minimizzare la funzione di due variabili

$$f(x, y) = x + 3y - 4x - 4y$$

con vincolo l'intersezione dei due vincoli, cioè l'insieme

$$E' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8\}.$$

Otteniamo quindi la funzione ausiliaria

$$\phi(x, y, \lambda) = -3x - y - \lambda((x - 2)^2 + (y - 2)^2 - 8),$$

che ha come punti stazionari i punti $(2 \pm 6\sqrt{5}, 2 \pm 2\sqrt{5})$. Il massimo è assunto per $(2 - 6\sqrt{5}, 2 - 2\sqrt{5})$ con valore $-8 + 20\sqrt{5}$, mentre il valore minimo è assunto per $(2 + 6\sqrt{5}, 2 + 2\sqrt{5})$ con valore $-8 - 20\sqrt{5}$.

Soluzione 1.12 L'insieme E è quello rappresentato nella Figura 1.2. All'interno il gradiente non si annulla mai (non si annulla mai da nessuna parte). Vediamo sul bordo. Iniziamo col parametrizzare la parte di cono descritta dall'equazione $z^2 = x^2 + y^2$. Si può considerare una funzione

$$\phi : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \phi(s, t) = (s, t, \sqrt{s^2 + t^2})$$

dove $\Omega_1 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : s^2 + t^2 \leq 4, (s, t) \neq (0, 0)\}$. Il punto $(0, 0)$ non viene considerato perché non è possibile trovare una funzione differenziabile da un aperto di \mathbb{R}^2 alla porzione di cono in considerazione, che includa il vertice, come nel nostro caso. Allora la funzione

Figura 1.2:

$g(s, t) = f(\phi(s, t)) = s + t - s^2 - t^2$ ha derivate parziali

$$\nabla g(s, t) = (1 - 2s, 1 - 2t)$$

che si annullano per $(s, t) = (1/2, 1/2)$; per questi valori di s e t

$$\phi(1/2, 1/2) = (1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}).$$

Ora parametrizziamo il cerchio: considero la funzione $\psi : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\psi(s, t) = (s, t, 2)$, dove $\Omega_2 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : s^2 + t^2 \leq 4\}$. La funzione $f \circ \psi(s, t) = s + t - 4$ non ha mai gradiente nullo. Ora passiamo alla circonferenza rappresentata dall'intersezione di $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ con il piano orizzontale $z = 2$. La parametrizzo con la funzione

$$\varphi(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 2)$$

e ottengo:

$$\frac{d}{dt}(f \circ \varphi)(t) = -2 \sin t + 2 \cos t,$$

che si annulla quando $\sin t = \cos t$, cioè per $t = \pi/4$ e $t = 5\pi/4$, valori corrispondenti ai due punti $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$ e $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2)$. Conclusione: valuto la funzione nei punti $(1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2)$ e $(0, 0, 0)$ che è un vertice. Il valore massimo è $1/2$ assunto nel punto $(1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$, il valore minimo $-2\sqrt{2} - 4$ assunto nel punto $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2)$.

Soluzione 1.13 Risolviamo l'esercizio in diversi modi. Prima di tutto trasformiamo il problema: la distanza di un generico punto in \mathbb{R}^3 dall'origine è data da

$$d((x, y, z), (0, 0, 0)) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Chiaramente minimizzare e massimizzare su un compatto questa funzione oppure il suo quadrato, cioè $x^2 + y^2 + z^2$, è equivalente (per convincersi della cosa si cominci a pensare in dimensione 1 alla funzione $f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ e $g(x) = x^2$). È quindi più conveniente utilizzare la funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ che è più semplice da derivare e regolare in ogni punto (mentre la funzione distanza non è differenziabile nell'origine). L'insieme E è dato dall'intersezione di un cilindro lungo l'asse z , a base ellittica, e il piano di equazione $z - x = 1$. Studiamo quindi la funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ su E : f è continua e E è compatto per cui esistono sia massimo che minimo. Il piano $z - x = 1$ può essere visto come un grafico ($z = x + 1$) e quindi la parametrizzazione più semplice risulta

$$\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \phi(u, v) = (u, v, v + 1),$$

dove $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + 2v^2 \leq 3\}$. Definiamo la funzione

$$\tilde{f}(u, v) = f(\phi(u, v)) = u^2 + v^2 + (v + 1)^2 = u^2 + 2v^2 + 2v + 1.$$

Annullando le derivate parziali si ottiene

$$\nabla \tilde{f}(u, v) = (2u, 4v + 2) = 0$$

da cui l'unico punto stazionario è $(0, -1/2)$, che appartiene a D e corrisponde al punto $(0, -1/2, 1/2)$ dell'insieme E . Sul bordo parametrizzato con $\vartheta \mapsto (\sqrt{3} \cos \vartheta, \sqrt{3/2} \sin \vartheta)$ la funzione diventa

$$3 \cos^2 \vartheta + 3 \sin^2 \vartheta + 2\sqrt{\frac{3}{2}} \sin \vartheta + 1.$$

La sua derivata si annulla per $\cos \vartheta = 0$, cioè per $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ e $\vartheta = \frac{3\pi}{2}$, che corrispondono ai punti

$$(0, \sqrt{3/2}) \quad \text{e} \quad (0, -\sqrt{3/2})$$

dell'insieme D e ai punti

$$\left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} + 1\right), \quad \left(0, -\sqrt{\frac{3}{2}}, 1 - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

dell'insieme E . Valutando la funzione nei tre punti ottenuti si ha

$$\tilde{f}(0, -1/2) = \frac{1}{2}, \quad \tilde{f}(0, \sqrt{3/2}) = 4 + 2\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \tilde{f}(0, -\sqrt{3/2}) = 4 - \sqrt{6} > \frac{1}{2},$$

per cui il punto $(0, -1/2, 1/2)$ di E , che corrisponde a $(0, -1/2)$ di D , è il punto di minima distanza dall'origine, il punto $(0, \sqrt{3/2}, \sqrt{3/2} + 1)$ di E , che corrisponde a $(0, \sqrt{3/2})$ di D , è il punto di massima distanza dall'origine. Avremmo potuto studiare la natura del punto stazionario interno valutando la matrice hessiana:

$$H_{\tilde{f}}(u, v) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

che è definita positiva, per cui $(0, -1/2)$ è di minimo (locale, ma a posteriori anche assoluto). Studiando le curve di livello di \tilde{f} , vediamo come si può risolvere il problema. La quantità $u^2 + 2v^2 + 2v + 1$ può essere riscritta

$$u^2 + 2\left(v + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

per cui risolvere $\tilde{f}(u, v) = c$ con $c \in \mathbb{R}$ (cioè trovare l'insieme di livello c della funzione \tilde{f}) è equivalente a risolvere l'equazione

$$u^2 + 2\left(v + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = c, \quad \text{con } c \geq \frac{1}{2}.$$

Queste curve sono ellissi, come le curve tratteggiate in Figura 1.3 (l'ellisse in neretto rappresenta il bordo di D). Per $c < 1/2$ l'insieme di livello c è l'insieme vuoto.

Figura 1.3:

Soluzione 1.14 L'insieme E è un cilindro infinito, in particolare non è compatto, quindi è possibile che massimo e minimo non esistano. Le tre derivate parziali poste uguali a zero

$$\nabla f(x, y, z) \left(\frac{2x}{1+z^2}, \frac{2y}{1+z^2}, (x^2 - y^2) \frac{2z}{(1+z^2)^2} \right) = 0$$

forniscono solo il punto $(0,0,0)$ interno ad E . All'infinito (per $|z| \rightarrow +\infty$) la funzione tende a 0, ma è facile vedere che assume sia valori positivi che negativi. Esaminiamo il comportamento sul bordo: dobbiamo parametrizzare la superficie $\partial E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$. Si può essere tentati dall'inserire nell'espressione di f la quantità $1 - x^2$ al posto di y^2 e considerare così

$$\tilde{f}(x,z) = \frac{2x^2 - 1}{1 + z^2}.$$

Questo corrisponde a considerare le due parametrizzazioni

$$\psi_1 : [-1, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \psi_1(x, z) = (x, \sqrt{1 - x^2}, z)$$

e

$$\psi_2 : [-1, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \psi_2(x, z) = (x, -\sqrt{1 - x^2}, z).$$

Annullando le derivate di \tilde{f} si ottengono le soluzioni $x = 0$ e $z = 0$ che corrispondono ai due punti $(0, 1, 0)$ e $(0, -1, 0)$ (che risultano essere i punti di massimo per la funzione f). A questo punto però vanno anche considerati gli estremi -1 e 1 del dominio di ψ_1 e ψ_2 che corrispondono ai punti $(1, 0, 0)$, e $(-1, 0, 0)$ nei quali va valutata poi f . Se si considera la quantità $1 - y^2$ al posto di x^2 le due parametrizzazioni diventano

$$\eta_1 : [-1, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \eta_1(y, z) = (\sqrt{1 - y^2}, y, z),$$

e

$$\eta_2 : [-1, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \eta_2(y, z) = (-\sqrt{1 - y^2}, y, z);$$

si considera $\hat{f}(y, z) = \frac{1-2y^2}{1+z^2}$ e annullando le derivate si trovano i due punti $(1, 0, 0)$ e $(-1, 0, 0)$ ai quali vanno aggiunti i punti corrispondenti agli estremi $\eta_1(-1) = \eta_2(-1) = (0, -1, 0)$ e $\eta_1(1) = \eta_2(1) = (0, 1, 0)$. Se parametrizziamo la superficie con

$$\varphi(\vartheta, z) = (\cos \vartheta, \sin \vartheta, z)$$

e consideriamo

$$h(\vartheta, z) = f(\varphi(\vartheta, z)) = \frac{\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta}{1 + z^2};$$

derivando si ottiene

$$\nabla h(\vartheta, z) = \left(\frac{4 \cos \vartheta \sin \vartheta}{1 + z^2}, \frac{(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) 2z}{1 + z^2} \right) = 0$$

per cui si hanno le soluzioni $\sin \vartheta = 0$ o $\cos \vartheta = 0$ e $z = 0$, che corrispondono ai punti quattro $(0, 1, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(1, 0, 0)$ e $(-1, 0, 0)$, due di massimo, due di minimo. Perché in questo modo abbiamo trovato quattro punti, mentre per \tilde{f} e \hat{f} solamente due?

Soluzione 1.15 Per calcolare i massimi e minimi della funzione si può utilizzare il metodo delle curve di livello; per funzione in considerazione, le curve di livello sono le rette

$$y = x \pm \frac{1}{\sqrt{c}}$$

con $c > 0$ il valore della funzione su tali curve (la funzione è sempre positiva). Nel primo insieme in esame, la circonferenza centrata in $(2, 0)$ e raggio $\sqrt{2}$, notiamo che la retta $y = x$

(che è in qualche modo la curva il cui livello è $+\infty$) è tangente alla circonferenza, come pure la retta $y = x - 4$ (cioè la curva associata al livello $c = 1/16$) è tangente alla circonferenza; se ne deduce che la funzione non ammette massimo in quanto l'estremo superiore è $+\infty$, mentre assume minimo pari a $1/16$ nel punto $(3, -1)$.

Nel secondo insieme, ancora il sup della funzione sarà $+\infty$, in quanto la retta $y = x$ attraversa per l'insieme E e quindi non c'è massimo, mentre, per quanto riguarda il minimo, le rette $y = x \pm \sqrt{2}$ (associate al livello $c = 1/2$) sono tangenti all'insieme dato, e quindi il minimo è $1/2$ assunto nei punti $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

Nel terzo insieme, le rette che intersecano E sono le rette $y = x + b$ con $b \in [-3, -1]$; agli estremi, cioè con $b = -1$ e $b = -3$, avremo i livelli associati ai valori $c = 1$ e $c = 1/9$, da cui il massimo della funzione è 1 assunto nel punto $(1, 0)$ e il minimo è $1/9$ assunto in $(2, -1)$.

Nel quarto insieme, E è il triangolo di vertici $(1, 0)$, $(2, 1)$ e $(2, 0)$. Il valore massimo è 1 assunto su tutto il lato congiungente i vertici $(1, 0)$ con $(2, 1)$, mentre il minimo è $1/4$ assunto nel vertice $(2, 0)$.

Nell'ultimo insieme notiamo che E non è limitato e che le rette $y = x + b$ incontrano l'insieme se $b \leq -1$. Troviamo quindi che la funzione ha massimo pari a 1 assunto nel punto $(1, 0)$ (punto di tangenza tra la retta $y = x - 1$ con E), mentre non ha minimo, essendo

$$\inf_E f = 0$$

in quanto per $b \rightarrow -\infty$ il livello associato ha valore che tende a 0 .

Soluzione 1.16 L'insieme E è metà di un'ellisse di semi-assi 2 , 1 e 1 ; è un insieme compatto, quindi massimo e minimo esistono. Si noti che la funzione f dipende solamente da $t = x^2 + y^2 + z^2$, con $f(x, y, z) = g(t)$, $g(t) = e^t - t/2$. La funzione g è, per t , monotona crescente, quindi ha minimo per $t = 0$. La funzione f ha quindi minimo in $(0, 0, 0)$ con valore minimo $1/2$. Il massimo invece si ottiene quando $(x, y, z) \in E$ è il più distante possibile dall'origine; siccome E è una semi-ellisse allungata lungo l'asse x , il punto di massima distanza su E dall'origine è dato da $(2, 0, 0)$, che sarà quindi punto di massimo con valore massimo $e^4 - 2$.

Soluzione 1.17 L'insieme E è disegnato in Figura 1.4; la funzione f ha un unico punto stazionario dato da $(1/4, 0, 0)$ che è interno ad E . In corrispondenza di tale punto la funzione vale $-1/8$. Il bordo di E è costituito dalle due superfici calotta inferiore della sfera e

Figura 1.4: Calotta inferiore di una sfera con tronco di cono

superficie laterale del cono, dalla curva intersezione delle due superfici e dal vertice del cono

$(0, 0, 1)$ dove la funzione vale -1 . Sulla superficie laterale della sfera possiamo usare la parametrizzazione $(x, y, -\sqrt{1-x^2-y^2})$, $x^2 + y^2 < 1$, in modo da ottenere la funzione di due variabili

$$g(x, y) = 3x^2 - x - 1$$

che ha punti stazionari della forma $(1/6, y)$. In corrispondenza di tali punti la funzione vale $-13/12$. Sulla superficie laterale del cono abbiamo la parametrizzazione $(x, y, 1 - \sqrt{x^2 + y^2})$, $0 < x^2 + y^2 < 1$, in modo da ottenere

$$h(x, y) = x^2 + 2\sqrt{x^2 + y^2} - x - 1$$

che non ha punti stazionari. Resta infine da considerare il bordo uni-dimensionale; utilizziamo la parametrizzazione $(\cos t, \sin t, 0)$ per ottenere la funzione

$$r(t) = 2\cos^2 t - \sin^2 t - \cos t$$

che ha punti stazionari per $t = 0$, $t = \pi$ e per $\cos t = 1/6$. In corrispondenza di tali punti la funzione vale 1 , 3 e $-13/12$ rispettivamente. Si conclude quindi che il massimo della funzione è 3 assunto in $(-1, 0, 0)$, mentre il minimo è $-13/12$ assunto in tutti i punti $(1/6, y, -\sqrt{35/36 - y^2})$, $y \in [-\sqrt{35}/6, \sqrt{35}/6]$.

Soluzione 1.18 L'insieme E , in Figura 1.5, non è compatto, quindi l'esistenza del massimo e del minimo non è garantita. Annullando le derivate si ottiene il punto critico $(0, 1)$. Si vede facilmente che

$$f(x, y) \leq f(0, 1) \quad \text{per ogni } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (1.1)$$

(studiare l'hessiana per esercizio). All'infinito: poiché $y \leq 1/|x|$ si ha che

Figura 1.5:

$$(y - 1)^2 \leq (1/|x| - 1)^2$$

quindi

$$\frac{1}{1 + x^2 + (\frac{1}{|x|} - 1)^2} \leq \frac{1}{1 + x^2 + (y - 1)^2} \leq \frac{1}{1 + x^2}.$$

Se si considera quindi il limite per $|(x, y)| \rightarrow +\infty$ in E si hanno due possibilità: o $|x| \rightarrow +\infty$ (e $y \rightarrow 0$) oppure $y \rightarrow +\infty$ (e in questo caso $|x| \rightarrow 0$). Nel primo dei due casi, dalla stima

precedente si ottiene che $f(x, y) \rightarrow 0$. Nel secondo caso possiamo stimare la f come segue, visto che $|x| \leq 1/y$:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{y^2} + (\frac{1}{|x|} - 1)^2} \leq \frac{1}{1 + x^2 + (y - 1)^2} \leq \frac{1}{1 + (y - 1)^2}.$$

Conclusione: prendendo il limite per punti $(x, y) \in E$

$$\lim_{|(x, y)| \rightarrow +\infty} f(x, y) = 0$$

(in realtà si può dimostrare che $\lim_{|(x, y)| \rightarrow +\infty} f(x, y) = 0$). Poiché f è sempre positiva, il limite all'infinito è zero e inoltre dalla stima (1.1) si conclude che la funzione ha un punto di massimo assoluto in $(0, 1)$ e non ha minimo.

Soluzione 1.19 Derivando la funzione f rispetto a x_k si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} x_j x_i &= 2 \sum_{j=1}^N a_{kj} x_j \\ \frac{\partial}{\partial x_k} (x_1^2 + \dots + x_N^2) &= 2x_k \end{aligned}$$

quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{2|x|^2 \sum_{j=1}^N a_{kj} x_j - 2x_k Ax \cdot x}{|x|^4} = \frac{2 \sum_{j=1}^N a_{kj} x_j - 2x_k f(x)}{|x|^2}$$

per ogni $k = 1, \dots, N$. Di conseguenza, annullando le derivate, si ha

$$\sum_{j=1}^N a_{kj} x_j - x_k f(x) = 0, \quad \text{per ogni } k = 1, \dots, N$$

e ciò equivale a dire che

$$Ax = f(x)x$$

cioè x è un autovettore e $f(x)$ è un autovalore. Senza bisogno di trovare le soluzioni x , sicuramente $f(x)$ è un autovalore, quindi il minimo valore assunto da f è il minimo autovalore di A e il massimo valore assunto da f è il massimo autovalore di A .

Volendo risolvere il problema con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si osservi innanzitutto che la funzione f può essere ridefinita sulla sfera di \mathbb{R}^N

$$\mathbb{S}^{N-1} = \partial B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| = 1\}$$

dato che

$$f(x) = \frac{Ax \cdot x}{|x|^2} = A \frac{x}{|x|} \cdot \frac{x}{|x|}$$

e quindi

$$f(\alpha x) = f(x), \quad \text{per ogni } \alpha \neq 0.$$

Ci possiamo così limitare a considerare

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^N a_{ij} x_j x_i$$

definita in \mathbb{S}^{N-1} . Si consideri la funzione

$$H(x, \lambda) = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}x_jx_i + \lambda(x_1^2 + \dots + x_N^2 - 1),$$

visto che cerchiamo i punti stazionari in \mathbb{S}^{N-1} e $\|x\| = 1$ se e solo se $\|x\|^2 = 1$. Le derivate risultano essere (la matrice è simmetrica)

$$\frac{\partial H}{\partial x_k} = 2 \sum_{j=1}^N a_{kj}x_j + 2\lambda x_k = 0$$

per $k = 1, \dots, N$,

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = x_1^2 + \dots + x_N^2 - 1 = 0.$$

Dalle prime N equazioni si ricava che

$$A \cdot x + \lambda x = 0$$

il che significa che x deve essere un autovettore (e λ un autovalore). I punti stazionari di H in \mathbb{R}^{N+1} sono quindi tutte le $(N+1)$ -uple (x, λ) con x autovettore di norma 1 e λ autovalore di A . Si osservi come dalle equazioni precedenti si ricava

$$x_k(a_{kk} + \lambda) + \sum_{j=1}^N a_{kj}x_j = 0$$

dove la sommatoria viene effettuata per $j \neq k$; nel caso in cui A sia una matrice diagonale si può dedurre che gli autovalori sono gli elementi della diagonale e gli autovettori sono del tipo $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$.

Soluzione 1.20 L'insieme E è quello in Figura 1.6, le parabole tratteggiate sono curve di livello. Risolveremo il problema senza fare calcoli, ma osservando gli insiemi di livello della

Figura 1.6:

funzione (si consiglia di svolgere per esercizio i calcoli, anche per confronto, studiando il

gradiente, la matrice Hessiana e studiando il comportamento della funzione sul bordo come al solito). Fissiamo $c \in \mathbb{R}$ e determiniamo l'insieme $\Gamma_c = \{f(x, y) = c\}$: tale insieme è rappresentato dall'intersezione di E con la parabola di equazione (si veda anche la Figura 1.6)

$$y = x^2 + \sqrt[3]{c}$$

Chiaramente il valore massimo (rispettivamente il minimo) che assume f è il massimo c (rispettivamente il minimo c) per cui Γ_c non è vuoto (cioè il massimo c per cui la parabola $y = x^2 + \sqrt[3]{c}$ interseca l'insieme E). Concludendo: il minimo è assunto nel punto $(-2, 0)$ e il massimo nel punto $(0, 2)$. Per calcolare i valori basta valutare la funzione in questi due punti o trovare i valori di c per cui le parabole passano per questi punti (farlo per esercizio). I valori minimo e massimo sono rispettivamente -64 e 8 .

Soluzione 1.21 La funzione è continua su un compatto, quindi sicuramente ammette massimo e minimo. L'insieme su cui è definita f e tre suoi insiemi di livello sono disegnati in Figura 1.7 (le linee tratteggiate allo stesso modo fanno parte dello stesso insieme di livello). Si fissi $c \in \mathbb{R}$ e si denoti con $\Gamma_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}$. Chiaramente per $c < 0$

Figura 1.7:

l'insieme Γ_c è vuoto, per $c = 0$ si ha che $\Gamma_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x\}$, per $c > 0$

$$\Gamma_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x + \sqrt{c}\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x - \sqrt{c}\}.$$

Il minimo di f è 0 assunto in tutto l'insieme

$$\Gamma_0 \cap E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x, x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]\},$$

il massimo è assunto dove l'insieme di livello interseca E sul bordo e precisamente nei punti $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ (trovare le equazioni delle rette). Il valore massimo è

$$f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 8.$$

Soluzione 1.22 L'insieme E è una corona circolare e gli insiemi di livello sono delle ellissi (si veda Figura 1.8), come si può facilmente ricavare ponendo

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 = c, \quad c \geq 0.$$

Minore è il valore di c e minori sono i semiassi dell'ellisse, l'insieme sul quale la funzione assume il valore costante c . I punti di minimo sono $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ dove l'ellisse descritta da $x^2 + 2y^2 = 1$ interseca la parte di bordo di E data dal cerchio di raggio 1 (quindi il valore minimo è 1); i punti di massimo sono $(0, 2)$ e $(0, -2)$ dove l'ellisse descritta da $x^2 + 2y^2 = 8$ interseca la parte di bordo di E data dal cerchio di raggio 2 (quindi il valore massimo è 8).

Figura 1.8:

Soluzione 1.23 Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange consideriamo la funzione

$$H(x_1, \dots, x_N, \lambda) = x_1 + \dots + x_N - \lambda(x_1 \cdot \dots \cdot x_N - 1).$$

La derivata parziale rispetto a x_j di H è

$$1 - \lambda x_1 \dots x_{j-1} \cdot x_{j+1} \dots x_N = 1 - \lambda \frac{x_1 \dots x_{j-1} x_{j+1} \dots x_N}{x_j};$$

quindi, se si impone

$$\frac{\partial H}{\partial x_j} = 1 - \lambda \frac{x_1 \dots x_{j-1} x_{j+1} \dots x_N}{x_j} = 1 - \frac{\lambda}{x_j} = 0$$

per $j = 1, \dots, N$, $x_1 \cdot \dots \cdot x_N = 1$ da cui si deduce che $\lambda = x_j$ per $j = 1, \dots, N$. Si determini per esercizio il valore di λ ; il suo valore qui non ci interessa, quindi tralasciamo questo calcolo. Si deduce che la soluzione (l'unica) del sistema è tale che $x_1 = x_2 = \dots = x_N$. Se tutti i valori devono essere uguali e il loro prodotto è 1 si ha necessariamente

$$x_j = 1, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}.$$

Per verificare che questo è un punto di minimo per la somma usiamo l'induzione: mostriamo che $x_1 + \dots + x_N \geq N$ ogni volta che

$$\prod_{i=1}^N x_i = 1.$$

Se $N = 2$: dobbiamo vedere che $x_1 + x_2 \geq 2$ sapendo che $x_1 x_2 = 1$. Per esercizio mostrare (derivando) che la funzione, definita per $x_1 > 0$, soddisfa

$$f(x_1) = x_1 + \frac{1}{x_1} \geq 2.$$

Supponiamo quindi che l'affermazione sia vera per N e mostriamola per $N + 1$. Siano quindi x_j , $j = 1, \dots, N + 1$, $N + 1$ numeri tali che $x_1 \cdot \dots \cdot x_{N+1} = 1$. È chiaro che se questi numeri non sono tutti uguali a 1 (e avremmo concluso) ne esiste uno minore di uno e uno maggiore. Diciamo che siano $x_N < 1$, $x_{N+1} > 1$. Chiamando $y = x_N x_{N+1}$ si hanno N numeri x_1, \dots, x_{N-1}, y il cui prodotto è 1 e quindi, per l'ipotesi induttiva, sappiamo che

$$x_1 + \dots + x_{N-1} + y = x_1 + \dots + x_{N-1} + x_N \cdot x_{N+1} \geq N.$$

Vogliamo però mostrare che questa somma è maggiore o uguale a $N + 1$:

$$\begin{aligned}
 x_1 + \dots + x_{N+1} &= (x_1 + \dots + x_{N-1} + x_N x_{N+1}) + x_N + x_{N+1} - x_N x_{N+1} \\
 &\geq N + x_N + x_{N+1} - x_N x_{N+1} \\
 &= N + x_{N+1}(1 - x_N) + x_N \\
 &= N + 1 + x_{N+1}(1 - x_N) + x_N - 1 \\
 &= N + 1 + (x_{N+1} - 1)(1 - x_N) \geq N + 1
 \end{aligned}$$

perché stiamo assumendo $x_{N+1} - 1 > 0$ e $1 - x_N > 0$. Come conseguenza interessante, si può mostrare che la media geometrica è minore o uguale della media aritmetica ($a_j > 0$)

$${}^N\sqrt{a_1 \dots a_N} \leq \frac{a_1 + \dots + a_N}{N} \quad (1.2)$$

Infatti è sufficiente considerare le quantità

$$x_j = \frac{a_j}{{}^N\sqrt{a_1 \dots a_N}}$$

il cui prodotto è 1; per quanto appena dimostrato si ha $\sum_{j=1}^N x_j \geq N$, cioè

$$\frac{a_1 + \dots + a_N}{{}^N\sqrt{a_1 \dots a_N}} \geq N.$$

Soluzione 1.24 Il volume è dato dal prodotto delle lunghezze dei tre lati. Indicando con x, y, z le tre lunghezze la funzione da massimizzare è allora $f(x, y, z) = xyz$. La superficie di ogni singola faccia è il prodotto delle lunghezze dei due lati che la determinano, per cui il vincolo è $2(xy + xz + yz) = S$. Uso il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: si consideri la funzione

$$H(x, y, z, \lambda) = xyz + 2\lambda(xy + xz + yz) - \lambda S$$

e le sue derivate parziali

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H}{\partial x}(x, y, z, \lambda) &= yz + 2\lambda(y + z) = 0 \\
 \frac{\partial H}{\partial y}(x, y, z, \lambda) &= xz + 2\lambda(x + z) = 0 \\
 \frac{\partial H}{\partial z}(x, y, z, \lambda) &= xy + 2\lambda(x + y) = 0 \\
 \frac{\partial H}{\partial \lambda}(x, y, z, \lambda) &= 2(xy + xz + yz) - S = 0.
 \end{aligned}$$

Dalla prima e dalla seconda equazione si ricava che

$$2\lambda = -\frac{yz}{y+z} = -\frac{xz}{x+z}$$

da cui (si ricordi che $x, y, z > 0$) $x = y$. Analogamente dalla prima e dalla terza si ricava $x = z$, per cui si conclude che $x = y = z$. Questa è la soluzione, che corrisponde a dire che se c'è un parallelepipedo di volume massimo questo deve essere un cubo. Vediamo si stabilire quanti punti verificano questa condizione: sappiamo che $2(xy + xz + yz) = S$ e d'altra parte

che $x = y = z$. Quindi esiste solo un punto sul vincolo dato da $2(x^2 + x^2 + x^2) = S$, quindi $x = \sqrt{\frac{S}{6}}$. Il volume corrispondente a questo valore è

$$\left[\sqrt{\frac{S}{6}}\right]^3 = \left(\frac{S}{6}\right)^{3/2}.$$

Vediamo in due modi che $(\sqrt{S/6})^3$ è il massimo valore possibile per il volume. Si può utilizzare la formula (1.2). Infatti posti $a_1 = xy, a_2 = yz, a_3 = xz$ si ha da (1.2)

$$\sqrt[3]{xy \cdot yz \cdot xz} = (xyz)^{2/3} \leq \frac{xy + xz + yz}{3} = \frac{S}{6},$$

da cui

$$f(x, y, z) = xyz \leq \left[\frac{S}{6}\right]^{3/2}$$

ogniqualevolta la somma $2(xy + xz + yz) = S$. Un altro modo è il seguente: la funzione volume $f(x, y, z) = xyz$ è sempre positiva e ha un unico punto critico. Vediamo che all'infinito la funzione tende a zero (o equivalentemente che $1/f(x, y, z)$ tende a $+\infty$) quando $|(x, y, z)| \rightarrow +\infty$ sul vincolo:

$$\frac{S}{2} \frac{1}{xyz} = \frac{xy + yz + xz}{xyz} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

È chiaro che quando $|(x, y, z)| \rightarrow +\infty$ sul vincolo $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2(xy + yz + xz) = S\}$ non tutte le variabili possono andare a $+\infty$, e almeno una delle tre deve quindi convergere a 0. Calcolando il limite per punti $(x, y, z) \in M$,

$$\lim_{|(x, y, z)| \rightarrow +\infty} f(x, y, z) = +\infty.$$

Soluzione 1.25 L'insieme E è quello delimitato dalle curve in Figura 1.9 e dall'asse $y = 0$. Infatti abbiamo le seguenti limitazioni: $y \geq 0$ e $y \leq x + 2/\sqrt[3]{5}$ che definiscono due semipiani.

Figura 1.9:

La terza $3x^5 + 5y^3 \leq 8$ può essere vista come

$$y \leq \left(\frac{8 - 3x^5}{5}\right)^{1/3}.$$

Le derivate parziali di f si annullano solo nell'origine, che non appartiene all'interno di E , quindi va scartato. Vediamo il bordo. Prima la parte in cui $y = 0$: chiaramente $f(x, 0) = 0$ (provare ad usare i moltiplicatori). La parte di bordo che appartiene alla retta si può parametrizzare con $\varphi(t) = (t, t + 2/\sqrt[3]{5})$ con $t \in (-2/\sqrt[3]{5}, 0)$. Si ottiene $f(\varphi(t)) = t^2 + t2/5^{1/3}$ la cui derivata è

$$2t + \frac{2}{5^{1/3}},$$

che si annulla per $t = -1/5^{1/3}$. Quindi il punto $\varphi(-1/5^{1/3}) = (-1/5^{1/3}, 1/5^{1/3})$ è un punto candidato. Sull'ultimo tratto di bordo usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: cerchiamo i punti stazionari (in \mathbb{R}^3) della funzione

$$H(x, y, \lambda) = xy + \lambda(3x^5 + 5y^3 - 8).$$

Derivando si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial x}(x, y, \lambda) &= y + 15\lambda x^4 = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial y}(x, y, \lambda) &= x + 15\lambda y^2 = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) &= 3x^5 + 5y^3 - 8 = 0\end{aligned}$$

Dalla prima e dalla seconda si ha che $15\lambda = -y/x^4 = -x/y^2$ da cui $y^3 = x^5$. Inserendo quest'informazione nella terza equazione si ricava $x = 1$ e $y = 1$. Valutando f nei punti $(-1/5^{1/3}, 1/5^{1/3})$, $(1, 1)$, $(x, 0) \in E$, e il vertice $(0, 2/5^{1/3})$ si ottiene

$$\begin{aligned}f(-1/5^{1/3}, 1/5^{1/3}) &= -\frac{1}{3\sqrt[3]{25}} && \text{minimo} \\ f(1, 1) &= 1 && \text{massimo} \\ f(x, 0) &= 0 \\ f(0, 2/5^{1/3}) &= 0.\end{aligned}$$

Soluzione 1.26 Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si consideri la funzione

$$H(x, y, z, \lambda) = 2x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2yz - 1)$$

e annullando le sue derivate si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial x}(x, y, z, \lambda) &= 4x + 2\lambda xyz = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial y}(x, y, z, \lambda) &= 2y + \lambda x^2 z = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial z}(x, y, z, \lambda) &= 2z + \lambda x^2 y = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda}(x, y, z, \lambda) &= x^2 y z - 1 = 0.\end{aligned}$$

Dalla seconda e dalla terza si ottiene

$$\lambda = -\frac{2y}{x^2 z} = -\frac{2z}{x^2 y},$$

e quindi $z^2 = y^2$. Dalla quarta equazione si ricava che $x^2 = 1/yz$ per cui yz è positivo (o sia y che z sono positivi, o entrambi sono negativi, quindi la possibilità $z = -y$ va scartata). Dalla prima equazione, sfruttando $y = z$ e $x^2 = 1/yz$, si ha

$$4x + 2\left(-\frac{2y}{x^2z}\right)xyz = 4\left(x - \frac{1}{x^3}\right) = 0$$

da cui si ricava che $x = 1$ oppure $x = -1$. Per cui i punti trovati sono

$$P_1 = (1, 1, 1), P_2 = (1, -1, -1), P_3 = (-1, 1, 1), P_4 = (-1, -1, -1).$$

Si ha che $f(P_i) = 4$ per ogni i . Dalla risoluzione dell'Esercizio 1.23 sappiamo che se $y, z > 0$ e $x^2yz = 1$ allora $x^2 + y + z \geq 3$ da cui $2x^2 + 2y + 2z \geq 6$. Dalla disuguaglianza $a^2 + b^2 \geq 2ab$ segue che:

$$2x^2 + (y^2 + 1) + (z^2 + 1) \geq 2x^2 + 2y + 2z \geq 6$$

da cui

$$2x^2 + y^2 + z^2 \geq 4.$$

Se $y, z < 0$ considero $-y$ e $-z$ che sono positivi e il cui prodotto è sempre yz e ripeto il ragionamento. Conclusione:

$$f(x, y, z) \geq 4 \quad \text{sul vincolo,}$$

per cui P_i , $i = 1, 2, 3, 4$, sono tutti punti di minimo.

Soluzione 1.27 Con due vincoli considero la funzione

$$H(x, y, z, \lambda, \mu) = x + 3y - z - \lambda(x^2 + y^2 - z) - \mu(z - 2x - 4y).$$

Si trovano i punti

$$P_1 = (1 + \sqrt{5/2}, 2 + \sqrt{5/2}, 10 + 6\sqrt{5/2}), \quad P_2 = (1 - \sqrt{5/2}, 2 - \sqrt{5/2}, 10 - 6\sqrt{5/2})$$

che sono rispettivamente di minimo e di massimo.

Soluzione 1.28 L'insieme su cui si stanno cercando gli estremi è la regione illimitata del piano disegnata in Figura 1.10. Notiamo che la regione è illimitata ma se $\|(x, y)\| \rightarrow +\infty$, siccome $|x| \leq y \leq |x| + 1$, allora

$$\frac{2x - 2|x| - 1}{2x^2 + 2|x| + 2} \leq \frac{2x - 2y + 1}{x^2 + y^2 + 1} \leq \frac{2x - 2|x| + 1}{2x^2 + 1}$$

da cui il fatto che $f(x, y) \rightarrow 0$ se $\|(x, y)\| \rightarrow +\infty$. Cerchiamo ora i punti stazionari all'interno. Poniamo quindi $\nabla f(x, y) = 0$ per ottenere che esistono solo due punti stazionari, $(-1, 1)$ e $(1/2, -1/2)$; nessuno di questi due punti è però interno all'insieme E . Studiamo ora il bordo; bisogna anzitutto considerare i due spigoli $(0, 0)$ e $(0, 1)$ dove la funzione vale 0 e $-1/2$ rispettivamente. Sul bordo $y = x$, $x > 0$, la funzione diventa

$$f(x, x) = \frac{1}{2x^2 + 1}$$

che è monotona decrescente. Su $y = x + 1$, $x > 0$, si ha invece

$$f(x, x + 1) = -\frac{1}{2(x^2 + x + 1)}$$

Figura 1.10: Disegno dell'insieme E

che è ancora monotona ma crescente. Per $y = -x$, $x < 0$, si ottiene

$$f(x, -x) = \frac{4x + 1}{2x^2 + 1};$$

tale funzione ha un solo punto stazionario per $x < 0$ dato da $x = -1$ ed in tale punto la funzione vale -1 . Infine, per $y = -x + 1$ si ottiene la funzione

$$f(x, -x + 1) = \frac{4x - 1}{2(x^2 - x + 1)};$$

tale funzione è monotona per $x < 0$. Quindi il massimo della funzione è 1 assunto in $(0, 0)$, mentre il minimo è -1 assunto in $(-1, 1)$.

Soluzione 1.29 L'insieme E è illimitato (quello tratteggiato in Figura 1.11) e le derivate parziali non si annullano mai contemporaneamente su E . Infatti

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= e^{-xy}(1 - xy) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -x^2 e^{-xy}\end{aligned}$$

e la derivata rispetto a y non è mai zero all'interno di E . Vediamo sul bordo: para-

Figura 1.11:

metrizzando il bordo con le curve $t \mapsto (t, t)$ e $t \mapsto (t, 2t)$ con $t \in (0, +\infty)$ si ottiene prima

$$\frac{d}{dt}f(t, t) = \frac{d}{dt}te^{-t^2} = e^{-t^2}(1 - 2t^2)$$

che si annulla per $t = 1/\sqrt{2}$ che corrisponde al punto $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, poi

$$\frac{d}{dt}f(t, 2t) = \frac{d}{dt}te^{-2t^2} = e^{-t^2}(1 - 4t^2)$$

che si annulla per $t = 1/2$, che corrisponde al punto $(1/2, 1)$. Vediamo all'infinito: poiché in E

$$x^2 \leq xy \leq 4x^2 \Rightarrow -4x^2 \leq -xy \leq -x^2$$

si ha che

$$xe^{-4x^2} \leq f(x, y) \leq xe^{-x^2}$$

per cui il seguente limite, calcolato per $(x, y) \in E$,

$$\lim_{|(x, y)| \rightarrow +\infty} f(x, y) = 0.$$

Esaminiamo i candidati, i due punti trovati e il vertice:

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= 0, & \text{minimo} \\ f(1/2, 1) &= \frac{1}{2}e^{-1/2}, \\ f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}. & \text{massimo} \end{aligned}$$

Soluzione 1.30 Presentiamo qui solo una traccia dello svolgimento. Il vincolo può essere visto come grafico per cui una delle parametrizzazioni possibili e più semplici è

$$(u, v) \mapsto \left(u, v, \frac{1}{6}(2u + 4v + 5)\right)$$

(ma anche $(u, v) \mapsto (\frac{1}{2}(6v - 4u - 5), u, v)$ e $(u, v) \mapsto (u, \frac{1}{4}(6v - 2u - 5), v)$ vanno bene). Ci si riduce così ad una funzione di due variabili

$$f\left(u, v, \frac{1}{6}(2u + 4v + 5)\right).$$

Soluzione 1.31 L'esercizio chiede di risolvere l'equazione $\nabla f(x, y) = 0$.

1. L'equazione diventa il seguente sistema:

$$\begin{cases} 3x^2 + 4y = 0 \\ 8y + 4x = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x(3x - 2) = 0 \\ y = -\frac{1}{2}x. \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono $(0, 0)$ e $(2/3, -1/3)$, che sono quindi gli unici due punti stazionari.

2. Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2} = 0 \\ -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x} = 0, \end{cases}$$

cioè l'equazione $x^2 = y^2$ che ha per soluzione tutti i punti (x, x) e $(x, -x)$ con $x \neq 0$. In definitiva, tutti i punti appartenenti alle due rette $y = x$ e $y = -x$ con $x \neq 0$ sono stazionari.

3. Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} y^2 - x^2 - 2xy + 2x = 0 \\ x^2 - y^2 - 2xy + 2y = 0. \end{cases}$$

Sommando e sottraendo le due equazioni si ha:

$$\begin{cases} (x - y)(1 - x - y) = 0 \\ -4xy + 2x + 2y = 0. \end{cases}$$

La prima equazione ha le due soluzioni: $y = x$ e $y = 1 - x$. Si ottengono quindi i due sistemi

$$\begin{cases} y = x \\ x(1 - x) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1 - x \\ 2x^2 - 2x + 1 = 0. \end{cases}$$

Il primo sistema ha soluzione per $(0, 0)$ e $(1, 1)$ (il primo punto va però scartato in quanto la funzione non è ivi definita), mentre il secondo non ha soluzione. Abbiamo in definitiva un solo punto stazionario: $(1, 1)$.

4. Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2 - 4x^2 - 2xy = 0 \\ 1 - y(4x + 2y) = 0, \end{cases}$$

che é equivalente al sistema

$$\begin{cases} y = \frac{1-2x^2}{x} \\ 5x^2 - 2 = 0. \end{cases}$$

Ne segue che $y = \pm \frac{\sqrt{10}}{10}$ e $x = \pm \sqrt{\frac{2}{5}}$.

5. Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} y(\ln(xy^2) + 1 + 2x) = 0 \\ x(\ln(xy^2) + 2 + x) = 0. \end{cases}$$

Possiamo dividere per y la prima equazione e per x la seconda in quanto, grazie alla presenza del logaritmo, x e y devono essere non nulli; il sistema ha quindi per soluzione i punti $(1, e^{-3/2})$ e $(1, -e^{-3/2})$.

6. Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} \cos(2x) = 0 \\ \cos(2y) = 0; \end{cases}$$

si ottengono quindi infiniti punti stazionari, tutti e soli i punti

$$(x, y) = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{h\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right), \quad h, k \in \mathbb{Z}.$$

Soluzione 1.32 La funzione $\sinh t = (e^t - e^{-t})/2$ è strettamente crescente per cui i punti critici, e la loro natura, sono gli stessi per la funzione

$$g(x, y) = x^4 + y^3 - 4x^2 - 3y^2.$$

A questo punto è possibile studiare la funzione g anziché f perché $\sinh t$ è strettamente crescente e quindi la sua derivata è sempre diversa da zero, se fosse solamente crescente

(non decrescente) ciò non sarebbe possibile. Un'altra osservazione: nel caso di una funzione strettamente decrescente il ragionamento può essere applicato comunque, con l'attenzione che la natura dei punti viene mutata, un punto di massimo per g sarebbe un minimo per f e viceversa. Vediamo ora di capire com'è fatto l'insieme E . La disequazione $|x|(1 + (y - 2)^2) - 2 < 0$ è equivalente a

$$|x| < \frac{2}{1 + (y - 2)^2},$$

per cui E è un insieme illimitato come quello in Figura 1.12. Per ricavarlo si noti che la disuguaglianza denota la parte interna alle due curve di equazione $x = \frac{2}{1 + (y - 2)^2}$ e $x = -\frac{2}{1 + (y - 2)^2}$.

Figura 1.12:

Svolgiamo ai calcoli: posto il gradiente di g uguale a $(0, 0)$ si trovano i punti $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(\sqrt{2}, 0)$, $(\sqrt{2}, 2)$, $(-\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 2)$. I punti $(-\sqrt{2}, 0)$ e $(\sqrt{2}, 0)$ non appartengono ad E , per cui non ci interessano. Calcolando le derivate seconde si ottiene che la matrice Hessiana è

$$H_g(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 8 & 0 \\ 0 & 6y - 6 \end{pmatrix}$$

Questo è il caso più fortunato: la matrice è diagonale per cui conosciamo già gli autovalori

il cui segno ci fornisce le informazioni sulla natura dei punti:

$$\begin{aligned} H_g(0,0) &= \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}, & \text{punto di massimo locale} \\ H_g(0,2) &= \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} & \text{punto di sella} \\ H_g(\pm\sqrt{2},0) &= \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} & \text{punti di sella} \\ H_g(\pm\sqrt{2},2) &= \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, & \text{punti di minimo locale} \end{aligned}$$

La funzione f non ammette massimo e minimo assoluto su \mathbb{R}^2 ; infatti

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} g(x,0) = +\infty, \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} g(0,y) = -\infty,$$

per cui poiché il seno iperbolico va a $-\infty$ a $-\infty$ e a $+\infty$ a $+\infty$ anche f risulta illimitata sia dal basso che dall'alto.

Soluzione 1.33 Annullando il gradiente si arriva alle equazioni

$$\begin{cases} x^3 = y \\ y^3 = x \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x^9 = x \\ y^3 = x \end{cases} \implies \begin{cases} x(x^8 - 1) = 0 \\ y^3 = x \end{cases}$$

per cui le soluzioni sono $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$. La matrice Hessiana è

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo il punto $(0,0)$:

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Valutiamo il segno degli autovalori: anche se Δ_1 , il determinante del minore principale 1×1 (di fatto il termine $[H_f(0,0)]_{11}$ della matrice) è nullo, si ha che $\Delta_2 = -16$ è anche il determinante della matrice nonché il prodotto degli autovalori: ne deduciamo che necessariamente uno è positivo e l'altro negativo per cui $(0,0)$ è un punto di sella. Per quanto riguarda il punto $(1,1)$ si ha che

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}.$$

Si può verificare che questa matrice è definita positiva, per cui $(1,1)$ è un punto di minimo locale stretto. Si può calcolare anche il suo determinante, che è positivo; quindi il prodotto dei due autovalori è positivo ($144 - 16$). Si potrebbero avere due autovalori positivi o due autovalori negativi. Un altro invariante è la traccia, la somma degli elementi sulla diagonale, che è anche la somma degli autovalori. La traccia è 24 per cui se la somma degli autovalori

è positiva deduciamo che il segno dei due autovalori non può essere altro che positivo. Lo stesso vale per il punto $(-1, -1)$. Per concludere calcoliamo il limite

$$\lim_{|(x,y)| \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty,$$

per cui la funzione non ammette massimo e ammette due punti di minimo assoluto.

Soluzione 1.34 Annullando il gradiente si ottiene

$$\begin{cases} 4x^3 - 4(x-y) = 0 \\ 4y^3 + 4(x-y) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 4x^3 + 4y^3 = 0 \\ 4y^3 + 4(x-y) = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava che $x = -y$ e quindi dalla seconda $4y(y^2 - 2) = 0$. Per cui le soluzioni sono $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. La matrice Hessiana è

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo

$$H_f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = H_f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}.$$

che è definita positiva, per cui i due punti sono di minimo locale, ma

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

ha determinante 0 e quindi almeno uno dei due autovalori è 0 (la traccia in questo caso non aiuta). Per stabilire la natura del punto $(0, 0)$, si può studiare il segno di f per capire se il punto in questione è di sella: si osservi che

$$f(x, x) = 2x^4 + 2$$

e quindi $(0, 0)$ risulta di minimo per f ristretta alla retta $x = y$, mentre risulta di massimo per f ristretta alla retta $x = -y$. Infatti

$$f(x, -x) = 2x^4 - 8x^2 + 2,$$

che ha un massimo in $x = 0$ ($\frac{d}{dx}(2x^4 - 8x^2 + 2)|_{x=0} = 0$, $\frac{d^2}{dx^2}(2x^4 - 8x^2 + 2)|_{x=0} = -16$). Si conclude che $(0, 0)$ è un punto di sella per f .

Soluzione 1.35 Al solito si devono calcolare le derivate parziali e le si annullano. Si ottiene

$$\begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ 4y^3 + 2y = 0 \\ 3z^2 - 2x = 0 \end{cases}$$

da cui si ottengono i punti $(0, 0, 0)$ e $(2/3, 0, 2/3)$. La matrice hessiana è data da

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 12y^2 + 2 & 0 \\ -2 & 0 & 6z \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$H_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Valutiamo i determinanti dei minori principali: $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 4$, $\Delta_3 = -8$. La matrice non è definita positiva e il prodotto degli autovalori (Δ_3) è negativo: gli autovalori potrebbero essere tutti negativi oppure due positivi e uno negativo. Ma $\Delta_1 > 0$ e $\Delta_2 > 0$, per cui due autovalori sono positivi (un altro invariante è la traccia della matrice, ossia la somma degli elementi sulla diagonale che corrisponde alla somma degli autovalori: poiché la somma è 4 anche da ciò si può dedurre che i tre autovalori non possono essere tutti negativi). Conclusione: $(0,0,0)$ non è né di massimo, né di minimo. I minori principali di

$$H_f(2/3,0,2/3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

hanno determinanti $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 4$, $\Delta_3 = 8$, per cui il punto $(2/3,0,2/3)$ è di minimo locale stretto.

Soluzione 1.36 Le derivate prime di f sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -24x^2 + 24xy + 2x - 2y - 6y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2x + 3y^2 - 12xy + 12x^2.$$

Esse si annullano in $(0,0)$, unico punto critico. Studiamo le derivate seconde. La matrice hessiana in $(0,0)$ è

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$

che ha determinante nullo: almeno uno dei due autovalori è nullo. In realtà solo uno degli autovalori è nullo visto che la traccia è positiva, ma questo non ci aiuta a capire la natura del punto. Gli autovalori dovrebbero essere 0 e 4 dato che il determinante è 0 e la traccia 4, ma in dimensione più alta non è possibile determinare gli autovalori in questo modo (se conosco la somma e il prodotto di n numeri posso determinare gli n numeri solo se $n = 2$). Calcoliamo allora il polinomio caratteristico e le sue radici:

$$P(\lambda) = (2 - \lambda)(2 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 4\lambda.$$

Le radici sono 0 e 4. Gli autospazi: relativamente a $\lambda = 0$ si ha:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

che fornisce la retta $y = x$. Non è importante calcolare l'altro, perché l'autovalore è positivo e la funzione ristretta all'autospazio relativo all'autovalore 4 è convessa. Bisogna capire che cosa succede restringendo la funzione alla retta $y = x$; valutiamo

$$f(x,x) = -x^3$$

funzione non è convessa, per cui il punto $(0,0)$ non è di minimo. Se la funzione fosse più complessa, si dovrebbe eseguire lo studio delle derivate successive di $f(x,x)$ per $x = 0$.

Soluzione 1.37 Derivando f si ottiene che l'unico punto critico è $(0,0,0)$. La matrice Hessiana in quel punto è data da

$$H_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 3/2 & 7 & 0 \\ 7 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che ha determinante nullo, per cui almeno uno degli autovalori è nullo. La traccia positiva, ma non possiamo determinare il segno dei due autovalori (potrebbero essere tutti e due positivi oppure uno positivo e l'altro nullo, non entrambi negativi). Il polinomio caratteristico è:

$$P(\lambda) = \lambda[(3/2 - \lambda)(16 - \lambda) - 49],$$

che si annulla per $\lambda = 0$ e per

$$\lambda = \frac{35 \pm \sqrt{1625}}{4};$$

abbiamo quindi un autovalore positivo e uno negativo. Concludiamo che lungo una direzione la funzione è concava, lungo un'altra è convessa e non c'è bisogno di verificare il comportamento della funzione lungo l'autospazio relativo all'autovalore nullo.