

Esercizi XI settimana

15 dicembre 2011

1. Si prenda in considerazione il seguente Problema di Cauchy;

$$\begin{cases} y''(t) = -y(t) \\ y(0) = 0, y'(0) = 1; \end{cases}$$

si riscriva. ponendo $v(t) = (y'(t), y(t))$, il sistema nella forma

$$\begin{cases} v'(t) = f(t, v(t)) \\ v(0) = v_0, \end{cases}$$

determinando la forma di $f(t, v(t))$. Si applichi quindi il metodo delle iterate successive ponendo $v_0(t) = v_0 = (1, 0)$ e

$$v_{n+1}(t) = v_0 + \int_0^t f(s, v_n(s)) ds;$$

si scrivano i primi termini della successione $v_n(t)$ e si dimostri quindi che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(t) = (\cos t, \sin t).$$

2. Scrivere le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali;

$$y'(t) = \frac{3 + 2t + y(t)}{6 + 4t + 2y(t)}, \quad y'(t) = \frac{3 + 2t + y(t)}{3 + 4t + 2y(t)}, \quad y'(t) = \frac{3 + 2t + y(t)}{3 + t + 2y(t)}.$$

3. Scrivere, al variare del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integrale generale dell'equazione

$$y''(t) - 2\alpha y'(t) + y(t) = te^t.$$

Soluzioni

1. Ponendo $v(t) = (y'(t), y(t))$, troviamo anzitutto che $v_0 = v(0) = (y'(0), y(0)) = (1, 0)$, mentre

$$v'(t) = (y''(t), y'(t)) = (-y(t), y'(t)).$$

Abbiamo quindi che la funzione $f(t, v)$ è definita da $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f(t, v) = (-v_2, v_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Quindi il metodo delle iterate successive diventa $u_0(t) = v_0 = (1, 0)$, mentre

$$\begin{aligned} u_{n+1}(t) &= v_0 + \int_0^t f(s, u_n(s)) ds = (1, 0) + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u_n(s) ds \\ &= (1, 0) + \int_0^t (-u_{n,2}(s), u_{n,1}(s)) ds. \end{aligned}$$

Troviamo quindi che

$$u_1(t) = (1, 0) + \int_0^t (0, 1) ds = (1, t). \quad u_2(t) = (1 - t^2/2, t), \quad u_3(t) = (1 - t^2/2, t - t^3/6)$$

mentre

$$u_4(t) = (1 - t^2/2 + t^4/24, t - t^3/6).$$

Si può quindi dimostrare che, ponendo $n = 2h$ nel caso in cui n sia pari e $n = 2h + 1$ nel caso in cui n sia dispari, si trova in ogni caso la successione

$$u_n(t) = \left(\sum_{k=0}^h (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!}, \sum_{k=0}^h (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \right),$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(t) = (\cos t, \sin t).$$

2. Si nota che nella prima equazione differenziale, il denominatore è un multiplo del numeratore, cioè

$$y'(t) = \frac{1}{2};$$

in questo primo caso quindi la soluzione è data da

$$y(t) = \frac{t}{2} + c.$$

Nel secondo caso, sia a numeratore che a denominatore compare la quantità

$$z(t) = 2t + y(t);$$

effettuando questo cambio di variabile otteniamo l'equazione

$$z'(t) - 2 = \frac{3 + z}{3 + 2z},$$

che è equivalente a

$$\frac{3 + 2z}{z} z' = -1.$$

Integrando, troviamo la soluzione in forma implicita

$$2z(t) + \ln |z(t)^3| = -t + c,$$

che, scritta rispetto ad $y(t)$, diventa

$$(2t + y(t))^{3/2} e^{y(t)} = ce^{-5t/2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

L'ultima equazione è di tipo omogeneo; siccome il sistema

$$\begin{cases} 3 + 2t + y = 0 \\ 3 + t + 2y = 0 \end{cases}$$

ha come unica soluzione il punto $(-1, -1)$, effettuiamo i seguenti cambi di variabili

$$\begin{cases} \tau = t + 1 \\ z(\tau) = y(t) + 1. \end{cases}$$

Otteniamo quindi l'equazione differenziale

$$z'(\tau) = \frac{2\tau + z(\tau)}{\tau + 2z(\tau)}.$$

Ponendo $z(\tau) = \tau v(\tau)$, troviamo l'equazione

$$v'(\tau) = \frac{1}{\tau} \frac{2(1 - v^2(\tau))}{1 + 2v(\tau)}$$

la cui soluzione in forma implicita è data da

$$(1 - v^2(\tau))(1 - v(\tau))^2 = \frac{c}{\tau^4}.$$

Tornando a $v(\tau) = z(\tau)/\tau$, $\tau = t + 1$ e $z(\tau) = y(t) + 1$, troviamo la soluzione in forma implicita

$$(t^2 + 2t - y^2(t) - 2y(t))(t - y(t))^2 = c.$$

3. Il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata è dato da

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + 1.$$

Distinguiamo quindi tre casi, a seconda del discriminante $\Delta = \alpha^2 - 1$.

$\Delta > 0$: In tal caso abbiamo $|\alpha| > 1$ e quindi due radici reali distinte date da

$$r_1 = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}, \quad r_2 = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1};$$

la soluzione particolare in questo caso va cercata nella forma

$$y_p(t) = e^t(at + b).$$

Imponendo la condizione $y_p''(t) - 2\alpha y_p'(t) + y_p(t) = te^t$, troviamo che

$$a = \frac{1}{2(1 - \alpha)}, \quad b = \frac{1}{2(\alpha - 1)}.$$

In definitiva troviamo che l'integrale generale dell'equazione differenziale è dato da

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \frac{t - 1}{2(1 - \alpha)} e^t.$$

$\Delta = 0$: Vanno distinti qui due casi, $\alpha = 1$ e $\alpha = -1$. Nel primo caso, $\lambda = 1$ è radice del polinomio caratteristico con molteplicità due; la soluzione particolare va cercata quindi nella forma

$$y_p(t) = e^t(at^3 + bt^2).$$

Imponendo la condizione $y_p''(t) - 2y_p'(t) + y_p(t) = te^t$, troviamo che

$$a = \frac{1}{6}, \quad b = 0.$$

In definitiva troviamo che l'integrale generale dell'equazione differenziale è dato da

$$y(t) = \left(c_1 + c_2t + \frac{t^3}{6}\right)e^t.$$

Nel caso $\alpha = -1$, $\lambda = -1$ è radice del polinomi caratteristico con molteplicità due, quindi la soluzione particolare va cercata nella forma

$$y_p(t) = e^t(at + b).$$

Imponendo la condizione $y_p''(t) + 2y_p'(t) + y_p(t) = te^t$, troviamo che

$$a = \frac{1}{4}, \quad b = -\frac{1}{4}.$$

In definitiva troviamo che l'integrale generale dell'equazione differenziale è dato da

$$y(t) = (c_1 + c_2t)e^{-t} + \frac{t-1}{4}e^t.$$

$\Delta < 0$: Poniamo in tal caso $\omega^2 = 1 - \alpha^2 > 0$. La soluzione particolare va cercata nella forma

$$y_p(t) = e^t(at + b).$$

Imponendo la condizione $y_p''(t) - 2\alpha y_p'(t) + y_p(t) = te^t$, troviamo che

$$a = \frac{1}{2(1-\alpha)}, \quad b = \frac{1}{2(\alpha-1)}.$$

In definitiva troviamo che l'integrale generale dell'equazione differenziale è dato da

$$y(t) = e^{\alpha t} \left(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) \right) + \frac{t-1}{2(1-\alpha)} e^t.$$