

Esercizi III settimana

20 ottobre 2011

1. Si studino le proprietà di continuità, derivabilità e differenziabilità della funzione;

$$f(x, y) = \sqrt{xy + \ln y}.$$

Si scrivano quindi le equazioni piano tangente e della retta normale al grafico della funzione nel punto $(2, 1)$.

2. Date le funzioni $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, si definisca $G(x, y) = (x, y, g(x, y))$; si determini il gradiente della funzione $h = f \circ G$ utilizzando la formula per la derivata della funzione composta e si deduca, nel caso in cui $\partial f / \partial z \neq 0$, la seguente formula per la funzione implicita, cioè sotto la condizione che $f(x, y, g(x, y)) = 0$;

$$\nabla g(x, y) = -\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, g(x, y))} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, g(x, y)), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, g(x, y)) \right).$$

3. Si considerino le coordinate sferiche nello spazio determinate dalla funzione

$$G : [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ G(\varrho, \vartheta, \varphi) = (\varrho \cos \vartheta \sin \varphi, \varrho \sin \vartheta \sin \varphi, \varrho \cos \varphi),$$

cioè

$$\begin{cases} x = \varrho \cos \vartheta \sin \varphi \\ y = \varrho \sin \vartheta \sin \varphi \\ z = \varrho \cos \varphi. \end{cases}$$

Si scriva la matrice Jacobiana di G e si deduca da essa la formula per le derivate espresse in coordinate sferiche.

4. Si determini il Laplaciano della funzione

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

sia utilizzando direttamente la definizione di Δf sia sfruttando il fatto che f è radiale (scrivendo quindi il Laplaciano in coordinate sferiche).

Soluzioni

1. Il dominio della funzione è determinato dalle condizioni

$$\begin{cases} y > 0 \\ x \geq -\frac{\ln y}{y}; \end{cases}$$

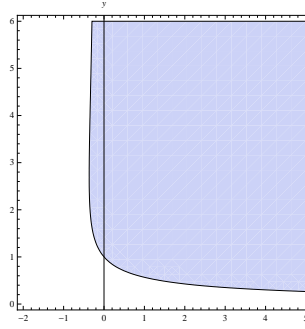


Figura 1: Dominio della figura data.

Tale dominio è raffigurato in Figura 1. La funzione è di classe C^1 per $x > -\frac{\ln y}{y}$; in tali punti la funzione è quindi differenziabile. Vediamo se possiamo ricavare la differenziabilità per i punti di $x = -\frac{\ln y}{y}$; sia quindi (x_0, y_0) tale che $x_0 y_0 + \ln y_0 = 0$ e calcoliamo

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x_0 y_0 + h y_0 + \ln y_0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h y_0}}{h}$$

e tale limite non esiste. Quindi non possiamo scrivere il gradiente in (x_0, y_0) , cioè f non sarà differenziabile in tali punti.

Nei punti $xy + \ln y > 0$ abbiamo che

$$\nabla f(xy) = \frac{1}{2\sqrt{xy + \ln y}} \left(y, x + \frac{1}{y} \right),$$

da cui $\nabla f(2, 1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1, 3)$; l'equazione del piano tangente è quindi dato da $z = f(2, 1) + \nabla f(2, 1) \cdot (x - 2, y - 1)$, cioè

$$x + y - 2z\sqrt{2} = 1.$$

La retta normale è invece parametrizzata da $r(t) = (2, 1, f(2, 1)) + t(-\nabla f(2, 1), 1)$, cioè la retta

$$r(t) = \left(2 - \frac{t}{2\sqrt{2}}, 1 - \frac{3t}{2\sqrt{2}}, \sqrt{2} + t \right),$$

che in forma cartesiana diventa

$$\begin{cases} 2x\sqrt{2} + z = 5\sqrt{2} \\ 2y\sqrt{2} + 3z = 5\sqrt{2}. \end{cases}$$

2. Iniziamo col notare che

$$DG(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix},$$

quindi

$$\begin{aligned}\nabla h(x, y) &= \nabla f(x, y, g(x, y)) \cdot DG(x, y) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, g(x, y)), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, g(x, y)), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, g(x, y)) \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, g(x, y)) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, g(x, y)) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \right).\end{aligned}$$

In particolare, se ne deduce che se g è la funzione implicita, allora

$$h(x, y) = f(x, y, g(x, y)) = 0,$$

da cui

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, g(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, g(x, y))} \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, g(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, g(x, y))}.\end{aligned}$$

3. La matrice Jacobiana di G è data da

$$DG(\varrho, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \sin \varphi & -\varrho \sin \vartheta \sin \varphi & \varrho \cos \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & \varrho \cos \vartheta \sin \varphi & \varrho \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \varphi & 0 & -\varrho \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Quindi, se g è la rappresentazione di una funzione in coordinate sferiche e h la rappresentazione della stessa funzione in coordinate cartesiane, denotando con $F = G^{-1}$ la mappa inversa delle coordinate sferiche, cioè la trasformazione dalle coordinate cartesiane a quelle sferiche, le funzioni h e g sono legate da $h(x, y, z) = g \circ F(x, y, z)$. Otterremo quindi che

$$\nabla h(x, y, z) = \nabla g(F(x, y, z)) \cdot DF(x, y, z).$$

In definitiva si trova che valgono le seguenti formule per le derivate;

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \cos \vartheta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varrho} - \frac{1}{\varrho} \frac{\sin \vartheta}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\varrho} \cos \vartheta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \sin \vartheta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho} \frac{\cos \vartheta}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\varrho} \sin \vartheta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varrho} - \frac{1}{\varrho} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}. \end{cases}$$

4. Iniziamo col calcolare

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x, y, z).$$

Quindi,

$$\begin{aligned}\Delta f(x, y, z) &= \operatorname{div} \nabla f(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.\end{aligned}$$

Possiamo anche passare alle coordinate sferiche; utilizzando l'esercizio precedente, si vede che il Laplaciano per una funzione espressa in coordinate sferiche è dato da

$$\begin{aligned}\Delta g(\varrho, \vartheta, \varphi) &= \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \varrho^2}(\varrho, \vartheta, \varphi) + \frac{2}{\varrho} \frac{\partial g}{\partial \varrho}(\varrho, \vartheta, \varphi) + \frac{\cos \vartheta}{\varrho^2 \operatorname{sen} \vartheta} \frac{\partial g}{\partial \vartheta}(\varrho, \vartheta, \varphi) + \\ &+ \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \vartheta^2}(\varrho, \vartheta, \varphi) + \frac{1}{\varrho^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta} \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2}(\varrho, \vartheta, \varphi).\end{aligned}$$

Se la funzione è radiale, cioè se $g(\varrho, \vartheta, \varphi) = h(\varrho)$, la precedente espressione si riduce a

$$\Delta h(\varrho) = \frac{1}{\varrho^2} h''(\varrho) + \frac{2}{\varrho} h'(\varrho).$$

Nel nostro caso $h(\varrho) = \varrho$ e quindi $h'(\varrho) = 1$ e $h''(\varrho) = 0$, da cui ritroviamo ancora che

$$\Delta h(\varrho) = \frac{2}{\varrho}.$$