

## Esercizi VIII settimana

24 novembre 2011

1. Trovare e classificare i punti stazionari delle seguenti funzioni:

$$f(x, y) = x^2 - xy^5, \quad g(x, y, z) = y^2 + z^2 - 2x^2 + 2xy - 2xz - 4x.$$

2. Determinare i punti di massima e minima distanza dall'origine dell'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^{\frac{3}{2}} + |y|^{\frac{3}{2}} = 1\}.$$

3. Sia  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matrice simmetrica definita positiva; si determinino quindi i semiassi dell'ellissoide

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \cdot x = 1\}.$$

4. Determinare massimo e minimo della funzione

$$\frac{z - y}{x^2 + x + 1}$$

sull'insieme

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq \frac{1}{x^2 + x + 1} \right\}.$$

## Soluzioni

1. Il gradiente di  $f$  è dato da

$$\nabla f(x, y) = (2x - y^5, -5xy^4)$$

che si annulla esclusivamente in  $(0, 0)$ . In tale punto la matrice Hessiana è data da

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che è quindi semi-definita positiva. Non possiamo quindi capire da questo la natura di  $(0, 0)$  come punto stazionario. Siccome  $f(0, 0) = 0$ , studiamo il segno di  $f$ ; vediamo subito che  $f(x, y) \geq 0$  in due regioni,  $x \geq 0$  e  $x \geq y^5$  e in  $x \leq 0$ ,  $x \leq y^5$ . Quindi, vicino al punto  $(0, 0)$ , ci sono sia punti in cui la funzione è positiva, sia punti in cui la funzione è negativa. Se ne deduce che  $(0, 0)$  è un punto di sella.

Per quanto riguarda la funzione  $g$ , abbiamo che

$$\nabla g(x, y, z) = (-4x + 2y - 2z - 4, 2y + 2x, 2z - 2x)$$

che si annulla esclusivamente in  $(-1/2, 1/2, -1/2)$ . La matrice Hessiana di  $g$  è data da

$$Hg(x, y, z) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

quindi la matrice Hessiana è costante e la successione dei determinanti dei minori principali è  $-4$ ,  $-12$  e  $-32$ , da cui si deduce che la matrice Hessiana è indefinita. Quindi il punto  $(-1/2, 1/2, -1/2)$  è un punto di sella.

2. L'insieme  $E$  è l'asteroide incontrato quando abbiamo studiato le curve; tale insieme è simmetrico sia rispetto all'asse  $x$  che rispetto all'asse  $y$ . Possiamo quindi restringere il nostro studio al caso  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ . In tal caso, la funzione da massimizzare e minimizzare è la funzione distanza, o equivalentemente la funzione  $f(x, y) = x^2 + y^2$  quadrato della distanza. Utilizziamo i moltiplicatori di Lagrange;

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(x^{3/2} + y^{3/2} - 1)$$

Imponendo il sistema  $\nabla_{(x,y,\lambda)} \mathcal{L}(x, y, \lambda) = 0$  troviamo

$$\begin{cases} 2x = \frac{3}{2}\lambda\sqrt{x} \\ 2y = \frac{3}{2}\lambda\sqrt{y} \\ x^{3/2} + y^{3/2} = 1. \end{cases}$$

Tale sistema ha le soluzioni  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  con  $\lambda = 4/3$  e  $(1/\sqrt[3]{4}, 1/\sqrt[3]{4})$  con  $\lambda = 2\sqrt[3]{4}/3$ . Nei primi due punti avremo la massima distanza che è quindi data da 1, mentre nell'ultimo punto avremo la minima distanza che quindi è data da  $1/\sqrt[6]{2}$ .

3. I semiassi di  $E$  sono determinati come i punti di massima e minima di stanza di  $E$  dall'origine; introduciamo quindi la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = \|x\|^2 - \lambda(Ax \cdot x - 1)$$

con  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Se calcoliamo il gradiente di  $\mathcal{L}$ , troviamo il sistema

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda Ax = 0 \\ Ax \cdot x = 1. \end{cases}$$

I semiassi si troveranno quindi in corrispondenza degli autovettori di  $A$  e il reciproco degli autovalori di  $A$  rappresentano i valori dei semiassi. In particolare, il semiasse maggiore sarà dato da  $1/\lambda_{min}$ ,  $\lambda_{min}$  il più piccolo autovalore di  $A$ , mentre il semiasse minore sarà dato da  $1/\lambda_{max}$ ,  $\lambda_{max}$  il più piccolo autovalore di  $A$ .

4. Si nota che l'insieme  $E$  è illimitato nella variabile  $x$  mentre è limitato nella coppia  $(y, z)$ ; inoltre, la funzione  $f$  ha la proprietà che

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x, y, z) = 0,$$

$f$  è positiva per  $z > y$  e negativa per  $z < y$ . L'insieme  $E$  interseca sia l'insieme  $\{z > y\}$  che  $\{z < y\}$ , quindi per la versione modificata del Teorema di Weierstrass, se

ne deduce che  $f$  ammette sia massimo che minimo su  $E$ . Per determinarli, iniziamo con i punti stazionari liberi;

$$\nabla f(x, y, z) = \left( -\frac{(z-y)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}, -\frac{1}{x^2+x+1}, \frac{1}{x^2+x+1} \right).$$

Tale gradiente non si annulla mai, quindi non ci sono punti stazionari liberi; resta da studiare il bordo di  $E$  che è la superficie

$$\Sigma = \left\{ x \in \mathbb{R}, y^2 + z^2 = \frac{1}{x^2 + x + 1} \right\};$$

dato che  $\Sigma$  è una superficie ruotata attorno all'asse  $x$ , possiamo usare la parametrizzazione

$$r(t, s) = \left( t, \frac{\cos s}{t^2 + t + 1}, \frac{\sin s}{t^2 + t + 1} \right)$$

in modo da ottenere la funzione

$$g(t, s) = f(r(t, s)) = \frac{\sin s - \cos s}{(t^2 + t + 1)^2}.$$

Il gradiente di tale funzione è dato da

$$\nabla g(t, s) = \left( \frac{2(2t+1)(\sin s - \cos s)}{(t^2 + t + 1)^3}, \frac{\cos s + \sin s}{(t^2 + t + 1)^2} \right);$$

tale gradiente si annulla nei punti  $(t, s) = (-1/2, 3\pi/4)$  e  $(t, s) = (-1/2, 7\pi/4)$ , che corrispondono ai punti  $(-1/2, -2\sqrt{2}/3, 2\sqrt{2}/3)$  e  $(-1/2, 2\sqrt{2}/3, -2\sqrt{2}/3)$  che saranno i punti di massimo e minimo; il primo è un punto di massimo dove la funzione vale  $16\sqrt{2}/9$  e il secondo è un punto di minimo dove la funzione vale  $-16\sqrt{2}/9$ .