

Esercizi I settimana

29 settembre 2011

1. Studiare il carattere della seguente successione in \mathbb{R}^3 , determinandone, in caso, il punto limite;

$$x_h = \left((-1)^h \frac{h^{5/2} - 3h + 7}{h^3 + \sqrt{h} - 3h^2}, \frac{2^h + h}{2^{h+1}}, \left(\frac{h^2 + 1}{h^2} \right)^h \right).$$

2. Si determini la curvatura della curva $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$r(t) = (\arctan t, t).$$

3. Si studino le principali proprietà della curva parametrizzata in coordinate polari da

$$\begin{cases} \varrho = 2t \\ \vartheta = t^2 \end{cases}, \quad t \in [0, 2\sqrt{\pi}].$$

Se ne determini in particolare la lunghezza.

4. Si consideri la curva parametrizzata $r : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$r(t) = \frac{1}{t^2}(\sin t, \cos t, 1);$$

studiarne le proprietà, calcolarne lunghezza e curvatura e determinare raggio e centro del cerchio osculatore per $t = 2$.

Soluzioni

1. Si nota che per le tre successioni che definiscono le componenti di x_h si ha

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow +\infty} (-1)^h \frac{h^{5/2} - 3h + 7}{h^3 + \sqrt{h} - 3h^2} &= 0, & \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{2^h + h}{2^{h+1}} &= \frac{1}{2}, \\ \lim_{h \rightarrow +\infty} \left(\frac{h^2 + 1}{h^2} \right)^h &= \lim_{h \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{h^2} \right)^{h^2} = 1. \end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} x_h = \left(0, \frac{1}{2}, 1 \right).$$

2. La curva data è una curva cartesiana rispetto alla x , nel senso che possiamo scrivere $x = f(y)$, con

$$f(t) = \arctan t.$$

Possiamo quindi utilizzare la seguente formula per la curvatura delle curve cartesiane;

$$k(t) = \frac{|f''(t)|}{(1 + f'(t)^2)^{3/2}} = \frac{2t(1 + t^2)}{(2 + 2t^2 + t^4)^{3/2}}.$$

3. La curva in coordinate cartesiane diventa

$$r(t) = (2t \cos(t^2), 2t \sin(t^2)), \quad t \in [0, 2\sqrt{\pi}].$$

Tale curva è semplice, non chiusa; per la regolarità, calcoliamo la derivata

$$r'(t) = 2(\cos(t^2), \sin(t^2)) + 4t^2(-\sin(t^2), \cos(t^2)),$$

da cui

$$\|r'(t)\| = 2\sqrt{1 + 4t^4}.$$

Quindi la curva è pure regolare. Per calcolarne la lunghezza, dobbiamo calcolare il seguente integrale

$$l(r, [0, 2\sqrt{\pi}]) = 2 \int_0^{2\sqrt{\pi}} \sqrt{1 + 4t^4} dt.$$

Questo purtroppo è un integrale che non si riesce a calcolare con calcoli diretti; può essere calcolato in termini di funzioni ipergeometriche o in modo approssimato con programmi numerici. Rimandiamo a tal proposito al seguente sito

<http://www.wolframalpha.com/>

4. La curva è una curva semplice, non chiusa con

$$r'(t) = -\frac{2}{t^3}(\sin t, \cos t, 1) + \frac{1}{t^2}(\cos t, -\sin t, 0),$$

e quindi

$$v(t) = \|r'(t)\| = \frac{\sqrt{8 + t^2}}{t^3}.$$

Quindi la curva è regolare e per calcolare la sua lunghezza dobbiamo calcolare

$$l(r, [1, +\infty)) = \int_1^\infty \frac{\sqrt{8 + t^2}}{t^3} dt = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2} \ln(2\sqrt{2} + 3)}{8}.$$

Per il calcolo della curvatura, possiamo utilizzare la seguente formula;

$$k(t) = \frac{\|r''(t) \times r'(t)\|}{\|r'(t)\|^3}.$$

Siccome

$$r''(t) = \frac{6}{t^4}(\sin t, \cos t, 1) - \frac{4}{t^3}(\cos t, -\sin t, 0) + \frac{1}{t^2}(-\sin t, -\cos t, 0),$$

si trova che

$$r''(t) \times r'(t) = \frac{2}{t^6}(-\sin t, -\cos t, 1) + \frac{2}{t^5}(\cos t, -\sin t, 0) + \frac{1}{t^4}(0, 0, 1),$$

da cui

$$k(t) = \frac{t^3}{t^2 + 8} \sqrt{\frac{t^4 + 8t^2 + 8}{t^2 + 8}}. \quad (1)$$

Per $t = 2$ troviamo che

$$k(2) = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{7}}{3\sqrt{3}},$$

da cui il raggio del cerchio osculatore che è dato da

$$\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\sqrt{7}}.$$

Per calcolare il centro del cerchio osculatore ci serve determinare il versore normale $\hat{n}_r(2)$. Dalla formula

$$k(t)v^2(t)\hat{n}_r(t) = r''(t) - \frac{a(t)}{v(t)}r'(t)$$

si ricava ancora la formula (1) per la curvatura e

$$\hat{n}_r(t) = \frac{(t^3 + 6t)}{\sqrt{(t^2 + 8)(t^4 + 8t^2 + 8)}} \left(-\sin t - \frac{2t^2 + 8}{t^3 + 6t} \cos t, -\cos t + \frac{2t^2 + 8}{t^3 + 6t} \sin t, \frac{2t}{t^3 + 6t} \right),$$

da cui

$$\hat{n}_r(2) = \frac{5}{\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{7}} \left(-\sin 2 - \frac{4}{5} \cos 2, -\cos 2 + \frac{4}{5} \sin 2, \frac{1}{5} \right).$$

Per la coordinata del centro del cerchio osculatore usiamo la formula

$$(x_0, y_0, z_0) = r(2) + \varrho_r(2)\hat{n}_r(2) = \frac{1}{14} \left(-4 \sin 2 - 6 \cos 2, -4 \cos 2 + 6 \sin 2, 5 \right).$$