

# Esercizi X settimana

7 dicembre 2011

1. Studiare le convergenze della seguente serie di funzioni;

$$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n(x^2+x+1)}.$$

2. Studiare le convergenze della seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{2 + n^2 + \sin n}.$$

3. Scrivere la serie di Taylor associata alla funzione

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

e calcolare l'integrale

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx.$$

4. Scrivere la serie di Fourier della funzione definita in  $[0, 1]$  da  $f(x) = x^2$ ; calcolare quindi tale serie nei punti  $x = 0$  e  $x = 1$  ed utilizzare la formula di Parseval per calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

## Soluzioni

1. Notiamo che, posto

$$u_n(x) = n e^{-n(x^2+x+1)},$$

dato che  $x^2 + x + 1 \geq 3/4$ , allora

$$\sup_{\mathbb{R}} |u_n(x)| \leq n e^{-3n/4} = M_n;$$

inoltre, dato che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{M_n} = e^{-3/4} < 1,$$

la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty$$

è convergente, e quindi la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

è totalmente convergente, quindi puntualmente, puntualmente assolutamente, uniformemente e uniformemente assolutamente convergente su tutto  $\mathbb{R}$ .

2. Notiamo che, posto

$$c_n = \frac{n}{2 + n^2 + \sin n}.$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{c_n} = 1,$$

quindi il raggio di convergenza della serie di potenze è  $\varrho = 1$ . Per  $x = 1$ , dato che  $c_n \sim 1/n$ , la serie non converge; per  $x = -1$ , la serie converge grazie al criterio di Leibniz. Infatti  $c_n$  è infinitesima, positiva e  $c_{n+1} \leq c_n$  dato che

$$\frac{n+1}{2 + (n+1)^2 + \sin(n+1)} \leq \frac{n}{2 + n^2 + \sin n},$$

che è equivalente all'espressione

$$\sin n - \sin(n+1) + \frac{\sin n}{n} + \frac{2}{n} \leq n+1,$$

sicuramente verificata per  $n \geq 3$ . Quindi l'insieme di convergenza puntuale è dato da  $[-1, 1)$ , mentre la convergenza assoluta si ha in  $(-1, 1)$ . La convergenza totale e la convergenza uniforme assoluta si avrà negli intervalli  $[-a, a]$  per ogni  $0 < a < 1$ , mentre la convergenza uniforme si ha in  $[-1, a]$ , per ogni  $a < 1$ .

3. Possiamo sfruttare lo sviluppo di Taylor del logaritmo

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}, \quad x \in (-1, 1]$$

da cui

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n, \quad x \in (-1, 1].$$

Dato che la convergenza è uniforme in  $[0, 1]$ , otteniamo che

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \int_0^1 x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{12};$$

l'ultima uguaglianza si deduce dal seguente esercizio.

4. Non venendo specificato il periodo della funzione, possiamo svolgere l'esercizio in vari modi; o consideriamo la funzione 1 periodica, cioè  $T = 1$  e  $\omega = 2\pi$ , oppure la estendiamo pari o dispari in  $[-1, 0]$  e consideriamo  $T = 2$  e  $\omega = \pi$ . Procediamo con l'estensione pari della funzioni, in modo da ottenere una funzione continua su tutto  $\mathbb{R}$ ; in questo modo, la convergenza della serie di Fourier è uniforme su tutto  $\mathbb{R}$  (avremo infatti convergenza totale). Dobbiamo calcolare solo i coefficienti  $a_k$ ,  $k \geq 0$ , della serie; avremo

$$a_0 = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$$

mentre per  $k \geq 1$

$$a_k = 2 \int_0^1 x^2 \cos(k\pi x) dx = \frac{4(-1)^k}{\pi^2 k^2}.$$

Lo sviluppo in serie di Fourier sarà quindi dato da

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(k\pi x).$$

Valutando questa espressione per  $x = 0$  otteniamo che

$$0 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2},$$

cioè

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Inoltre, per  $x = 1$  troviamo che

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

cioè

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Infine, utilizzando la formula di Parseval, otteniamo che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{72}.$$