

Capitolo 1

Campi; lavori e flussi

Esercizio 1.1 Si calcolino divergenza e rotore per i seguenti campi vettoriali:

$$F(x, y, z) = (y, x, 0), \quad F(x, y, z) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3}(x, y, z),$$

Esercizio 1.2 Calcolare l'integrale della funzione

$$f(x, y) = xy$$

lungo la curva $\gamma(t) = (t, t^2)$, $t \in [0, 1]$.

Esercizio 1.3 Calcolare l'integrale della funzione

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2$$

lungo la curva $\varrho = e^{2\theta}$ con $\theta \in (-\infty, 0]$.

Esercizio 1.4 Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{\varphi} f ds$$

per le seguenti funzioni e curve:

1. $f(x, y) = e^{x+y}$, $\varphi(t) = (t, t-1)$, $t \in [1, 2]$;
2. $f(x, y) = xy$, $\varphi(t) = (t, t^2)$, $t \in [0, 1]$;
3. $f(x, y) = \frac{x}{1+y^2}$, $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi/2]$;
4. $f(x, y) = \sqrt{1+4x^2} + 3y$, $y = x^2$, $x \in [0, 1]$;
5. $f(x, y) = x^2$, $y = x^2 + \ln x$, $x \in [1, 2]$;
6. $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2$, $\varrho = e^{2\theta}$ con $\theta \in (-\infty, 0]$;
7. $f(x, y, z) = e^{2z}$, $\varphi(t) = (\cos \ln t, \sin \ln t, \ln t)$, $t \in [1, e^2]$;

8. $f(x, y, z) = \sqrt{z}$, $\varphi(t) = (\cos t, \sin t, t^2)$, $t \in [0, \pi]$.

Esercizio 1.5 Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{\varphi} F \cdot d\vec{s}$$

dove:

1. $F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$ e $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$;
2. $F(x, y, z) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{2y}{x^2+y^2+z^2} + 1, \frac{2z}{x^2+y^2+z^2} + 3 \right)$, $\varphi(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$;
3. il campo del punto precedente ma con $\varphi(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Esercizio 1.6 Calcolare il flusso del campo

$$F(x, y, z) = (x, y, z)$$

uscite dalla superficie della sfera $\Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$.

Esercizio 1.7 Si determini il flusso del campo

$$F(x, y, z) = \frac{kq}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} (x, y, z), \quad k, q > 0$$

uscite dalla superficie $\Sigma = \{y = a, x^2 + z^2 \leq R^2\}$, $a > 0$.

Esercizio 1.8 Si determini il flusso del campo

$$F(x, y, z) = (y, z, -x)$$

uscite dalla superficie $\Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$.

Esercizio 1.9 Si determini il flusso del campo

$$F(x, y, z) = (x, -y, z)$$

uscite dalla superficie del cilindro $\Sigma = \partial E$ con $E = \{x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h\}$.

Esercizio 1.10 Dire se il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

è conservativo o meno e, in caso affermativo, calcolarne il potenziale.

Esercizio 1.11 Dire se il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{2x + y}{(x^2 + xy)^{2/3}}, \frac{x}{(x^2 + xy)^{2/3}} + 2y \right)$$

è conservativo o meno e, in caso affermativo, calcolarne il potenziale.

Esercizio 1.12 Dimostrare che il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\frac{2xz - y}{x^2 + y^2}, \frac{x + 2yz}{x^2 + y^2}, \log(x^2 + y^2) \right)$$

non è conservativo ma è dotato di potenziali locali.

Esercizio 1.13 Verificare che il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2} + 1, \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2} + 3 \right)$$

è conservativo e determinarne i potenziali.

Esercizio 1.14 Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int_{\Sigma} \frac{z + y^2}{\sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}} d\sigma$$

dove

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2, x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + 4y^2 \leq 4\}.$$

Esercizio 1.15 Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int_{\Sigma} \frac{x}{\sqrt{4z + 1}} d\sigma$$

dove Σ è la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 - y \leq 0, y \geq 1/2, x \geq 0\}.$$

Esercizio 1.16 Calcolare il flusso del campo

$$F(x, y, z) = (x^3 e^{-z}, 3xz, 3x^2 e^{-z})$$

uscendo dall'emisfero superiore della sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$.

Esercizio 1.17 Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (x^2, y, z)$$

uscendo dal tetraedro $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$.

Esercizio 1.18 Calcolare il flusso del campo

$$F(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} (x, y, z)$$

uscendo da una qualsiasi superficie chiusa contenente all'interno l'origine (Legge di Gauss).

Esercizio 1.19 Calcolare il flusso del campo

$$F(x, y, z) = (x + y, z - y, x^3 y)$$

sulla superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 4\}$.

1.1 Soluzioni

Soluzione 1.1 Il primo campo è definito ed è regolare in tutto \mathbb{R}^3 ; per quanto riguarda la divergenza abbiamo

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} y + \frac{\partial}{\partial y} x + \frac{\partial}{\partial z} 0 = 0,$$

mentre per quanto riguarda il rotore abbiamo

$$\operatorname{rot} F(x, y, z) = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y & x & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, 1 - 1) = 0.$$

Quindi il campo ha sia divergenza che rotore nullo. Quest'ultimo fatto, unito al fatto che il dominio di F è semplicemente connesso, implica che il campo è conservativo; per cercare il potenziale di F , bisogna risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} = F_1(x, y, z) = y \\ \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y} = F_2(x, y, z) = x \\ \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z} = F_3(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Integrando la prima equazione si ottiene che

$$U(x, y, z) = yx + c,$$

dove c è una costante per x (cioè la derivata parziale rispetto ad x è nulla), ma in generale non per y e z ; scriveremo quindi $c = c(y, z)$. Sostituendo l'espressione di U appena trovata nella seconda equazione, si trova

$$x + \frac{\partial c(y, z)}{\partial y} = x,$$

da cui $c(y, z) = c(z)$ in quanto la sua derivata parziale rispetto ad y si annulla. Infine, sostituendo nella terza equazione troveremo che $c(z) = c$, cioè c è una costante pura. Abbiamo quindi che il potenziale è dato da

$$U(x, y, z) = xy + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Per quanto riguarda il secondo campo, il suo dominio è $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$; la sua divergenza è data da

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = -\frac{3}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} + \frac{3x^2 + 3y^2 + 3z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^5} = 0,$$

mentre il rotore è dato da

$$\operatorname{rot} F(x, y, z) = \left(\frac{3yz - 3zy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^5}, \frac{3xz - 3zx}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^5}, \frac{3yx - 3xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^5} \right) = 0,$$

quindi anche questo campo ha sia divergenza che rotore nullo. In particolare, siccome anche in questo caso il dominio del campo è semplicemente connesso, avremo che il campo è conservativo e il suo potenziale, come mostra un conto diretto, è dato da

$$U(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Soluzione 1.2 La curva è data da $\gamma(t) = (t, t^2)$, quindi $\gamma'(t) = (1, 2t)$, da cui

$$\int_{\gamma} f = \int_0^1 f(t, t^2) |\gamma'(t)| dt = \int_0^1 t^3 \sqrt{1 + 4t^2} dt = \frac{5\sqrt{5}}{24} + \frac{1}{120}.$$

Soluzione 1.3 La curva in questione è data da $\gamma(\theta) = (e^{2\theta} \cos \theta, e^{2\theta} \sin \theta)$, e quindi l'integrale diventa

$$\int_{\gamma} f = \int_{-\infty}^0 e^{10\theta} \sqrt{5} d\theta = \frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

Soluzione 1.4

1. Si tratta semplicemente di usare la formula

$$\int_{\varphi} f ds = \int_1^2 f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| dt = \int_1^2 f(t, t-1) \|(1, 1)\| dt = \sqrt{2} \int_1^2 e^{2t-1} dt = \frac{e(e^2 - 1)}{\sqrt{2}}.$$

2. La curva è data da $\varphi(t) = (t, t^2)$, quindi $\varphi'(t) = (1, 2t)$, da cui

$$\int_{\varphi} f = \int_0^1 f(t, t^2) \|\varphi'(t)\| dt = \int_0^1 t^3 \sqrt{1 + 4t^2} dt = \frac{5\sqrt{5}}{24} + \frac{1}{120}.$$

3. Si ha che

$$\int_{\varphi} f ds = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{1 + \sin^2 t} dt = [\arctan \operatorname{sen} t]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

4. Si ha che

$$\int_{\varphi} f ds = \int_0^1 (\sqrt{1 + 4x^2} + 3x^2) \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{7}{3} + \frac{27\sqrt{5}}{32} - \frac{3 \operatorname{arcsenh} 2}{64}.$$

5. Si ottiene che

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} f ds &= \int_1^2 x^2 \|(1, 2x + 1/x)\| dx = \int_1^2 x \sqrt{4x^4 + 5x^2 + 1} dx = \\ &= \frac{1}{128} \left(-52\sqrt{10} + 148\sqrt{85} + 9 \ln(13 + 4\sqrt{10}) - 9 \ln(37 + 4\sqrt{85}) \right) \end{aligned}$$

6. La curva in questione è data da $\varphi(\vartheta) = (e^{2\vartheta} \cos \vartheta, e^{2\vartheta} \sin \vartheta)$, e quindi l'integrale diventa

$$\int_{\varphi} f ds = \int_{-\infty}^0 e^{10\vartheta} \sqrt{5} d\vartheta = \frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

7. Si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} f ds &= \int_1^{e^2} e^{2 \ln t} \left\| \left(-\frac{\operatorname{sen} \ln t}{t}, \frac{\cos \ln t}{t}, \frac{1}{t} \right) \right\| dt \\ &= \int_1^{e^2} \sqrt{2} t dt = \frac{e^4 - 1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

8. Si ottiene

$$\int_{\varphi} f ds = \int_0^{\pi} t \sqrt{1+4t^2} dt = \int_0^{\pi} t \sqrt{1+4t^2} dt = \frac{(1+4\pi^2)^{3/2} - 1}{12}.$$

Soluzione 1.5

1. Dalla definizione di integrale curvilineo per campi vettoriali, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} F \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi. \end{aligned}$$

2. Si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} F \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (2 \cos t, 2 \sin t + 1, 3) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt = 0. \end{aligned}$$

3. Si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} F \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t, t) \cdot (-\sin t, \cos t, 1) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{2 \cos t}{1+t^2}, \frac{2 \sin t}{1+t^2} + 1, \frac{2t}{1+t^2} + 3 \right) \cdot (-\sin t, \cos t, 1) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(3 + \cos t + \frac{2t}{1+t^2} \right) dt = 6\pi + \ln(1+4\pi^2). \end{aligned}$$

Soluzione 1.6 Il flusso può essere calcolato in due modi; il primo è mediante la definizione

$$\Phi(F, \Sigma) = \int_{\Sigma} F \cdot \hat{n}_{\Sigma} d\Sigma = \int_{\Sigma} (x, y, z) \cdot \frac{1}{R} (x, y, z) d\Sigma = R \text{Area}(\Sigma) = 4\pi R^3,$$

dove si è tenuto conto che il vettore

$$\hat{n}_{\Sigma}(x, y, z) = \frac{1}{R} (x, y, z)$$

descrive il versore normale a Σ nel punto $(x, y, z) \in \Sigma$ in quanto $\|(x, y, z)\| = R$. Il secondo metodo è utilizzare il Teorema della divergenza e scrivere

$$\Phi(F, \Sigma) = \int_{B_R(0)} \text{div} F(x, y, z) dx dy dz = 3 \text{Vol}(B_R(0)) = 4\pi R^3$$

in quanto $\text{div} F(x, y, z) = 3$.

Soluzione 1.7 Calcoliamo il flusso usando la definizione (in questo caso, la superficie Σ non è un bordo di un insieme, quindi non possiamo usare il Teorema della divergenza);

$$\Phi(F, \Sigma) = \int_{\Sigma} F \cdot \hat{n}_{\Sigma} d\Sigma.$$

Come normale alla superficie Σ , in quanto quest'ultima è contenuta nel piano $y = a$, possiamo prendere $\hat{n}_{\Sigma}(x, y, z) = (0, 1, 0)$; in questo modo stiamo considerando la parametrizzazione

$$r(x, z) = (x, a, z), \quad x^2 + z^2 \leq R^2.$$

L'integrale di superficie diventa quindi

$$\begin{aligned} \Phi(F, \Sigma) &= \int_{\{x^2+z^2 \leq R^2\}} \frac{kqa}{\sqrt{x^2+z^2+a^2}^3} dx dz = kqa \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^R \frac{\varrho}{\sqrt{a^2+\varrho^2}^3} d\varrho \\ &= 2\pi kq \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}} \right). \end{aligned}$$

Soluzione 1.8 Anche in questo caso, la superficie non è il bordo di un insieme e quindi utilizziamo direttamente la definizione di flusso:

$$\Phi(F, \Sigma) = \int_{\Sigma} (y, z, -x) \cdot \frac{1}{R}(x, y, z) d\Sigma = \frac{1}{R} \int_{\Sigma} (yx + yz - xz) d\Sigma.$$

Per il calcolo di quest'ultimo integrale, possiamo passare alle coordinate sferiche oppure vedere Σ come il grafico della funzione $z = g(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$; utilizzeremo questo secondo approccio.

$$\begin{aligned} \Phi(F, \Sigma) &= \frac{1}{R} \int_{\{x^2+y^2 \leq R^2\}} \left(yx + (y-x)\sqrt{R^2-x^2-y^2} \right) \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dx dy \\ &= \int_{\{x^2+y^2 \leq R^2\}} \left(\frac{xy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} + y-x \right) dx dy = 0 \end{aligned}$$

in quanto le funzioni da integrare sono dispari sia rispetto ad x che rispetto a y .

Il conto precedente poteva essere semplificato come segue; se è vero che Σ non è il bordo di un insieme, è però vero che è parte del bordo dell'insieme $E = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$; l'altra parte del bordo di E è costituito dalla superficie $S = \{x^2 + y^2 \leq R^2, z = 0\}$, e quindi dal teorema della divergenza

$$\int_{\Sigma \cup S} F \cdot \hat{n} d\Sigma = \int_E \operatorname{div} F(x, y, z) dx dy dz = 0$$

in quanto $\operatorname{div} F = 0$, e quindi, tenendo presente che S è contenuta nel piano $z = 0$ e che $(0, 0, 1)$ è un vettore normale ad S ma entrante in E (e non uscente), se ne deduce che

$$\Phi(F, \Sigma) = \int_S F \cdot (0, 0, 1) dx dy = - \int_S x dx dy = 0.$$

Soluzione 1.9 Possiamo calcolare l'integrale più semplicemente utilizzando il Teorema della divergenza, in quanto

$$\Phi(F, \Sigma) = \int_E \operatorname{div} F(x, y, z) dx dy dz = \operatorname{Vol}(E) = \pi h R^2$$

in quanto $\operatorname{div} F = 1$. Verifichiamo tale identità calcolando l'integrale di superficie dividendo $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$ con

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \{x^2 + y^2 = R^2, 0 \leq z \leq h\}, & \Sigma_2 &= \{x^2 + y^2 \leq R^2, z = 0\}, \\ \Sigma_3 &= \{x^2 + y^2 \leq R^2, z = h\}.\end{aligned}$$

Su Σ_1 utilizzeremo il campo $\hat{n}_\Sigma = \frac{1}{R}(x, y, 0)$, mentre su Σ_2 il campo $\hat{n}_\Sigma = (0, 0, -1)$ e infine su Σ_3 il campo $\hat{n}_\Sigma = (0, 0, 1)$. Otteniamo quindi che

$$\begin{aligned}\Phi(F, \Sigma) &= \int_{\Sigma_1} F \cdot \frac{1}{R}(x, y, 0) d\Sigma + \int_{\Sigma_2} F \cdot (0, 0, -1) d\Sigma + \int_{\Sigma_3} F \cdot (0, 0, 1) d\Sigma \\ &= \frac{1}{R} \int_{\Sigma_1} (x^2 - y^2) d\Sigma - \int_{\Sigma_2} z d\Sigma + \int_{\Sigma_3} z d\Sigma \\ &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^h (R^2 \cos^2 \vartheta - R^2 \sin^2 \vartheta) dt + \pi h R^2 = \pi h R^2.\end{aligned}$$

Per il calcolo dell'integrale su Σ_1 abbiamo utilizzato la parametrizzazione

$$r(\vartheta, t) = (R \cos \vartheta, R \sin \vartheta, t), \quad \vartheta \in [0, 2\pi), t \in [0, h],$$

per la quale si ha che $\|r_\vartheta \times r_t\| = R$.

Soluzione 1.10 Se si considera il cammino chiuso $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, si ottiene che

$$\int_\gamma \langle F, ds \rangle = 2\pi,$$

e quindi il campo risulta non essere conservativo. Otteniamo però che $\operatorname{rot} F = 0$, quindi F ammette potenziale locale U ; per calcolare tale potenziale bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

che ha per soluzione, integrando la prima rispetto a x e sostituendo nella seconda, la funzione

$$U(x, y) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + c.$$

Il campo ammette quindi potenziale locale, ma il dominio è dato da $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ che non è semplicemente connesso; per rendere il campo conservativo, dovremmo rendere il dominio semplicemente connesso, cosa che può essere fatta se consideriamo ad esempio il dominio

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\}.$$

Soluzione 1.11 Notare che il dominio del campo è dato da

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x = 0 \text{ o } y = -x\},$$

che è semplicemente connesso anche se non connesso. Quindi per vedere se il campo è conservativo basta e serve che si abbia $\text{rot}F = 0$, cosa facilmente verificata. Per trovare il potenziale U , bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2x+y}{(x^2+xy)^{2/3}} \\ \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x}{(x^2+xy)^{2/3}} + 2y \end{cases}$$

che ammette per soluzione la funzione

$$U(x, y) = 3(x^2 + xy)^{2/3} + y^2 + c$$

con la costante c che può assumere valori diversi su ogni componente connessa.

Soluzione 1.12 Si noti che preso il cammino chiuso $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ si ha

$$\int_{\gamma} \langle F, ds \rangle = 2\pi,$$

e quindi il campo non è conservativo. Però si ha che $\text{rot}F = 0$, e quindi il campo ammette potenziale locale, che si ricava essere

$$U(x, y, z) = z \ln(x^2 + y^2) - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + c.$$

Soluzione 1.13 Il dominio è semplicemente connesso e $\text{rot}F = 0$, quindi il campo è conservativo. Il potenziale infine è dato dalla funzione

$$U(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2) + y + 3z + c.$$

Soluzione 1.14 L'integrale che si vuole calcolare è l'integrale della funzione

$$f(x, y, z) = \frac{z + y^2}{\sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}}$$

sulla superficie, data come grafico della funzione

$$z = g(x, y) = x^2 - y^2$$

sul dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + 4y^2 \leq 4\}.$$

Usando quindi la definizione di integrale superficiale, si ottiene che

$$d\sigma = \sqrt{1 + |\nabla g(x, y)|^2} dx dy = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dx dy,$$

da cui

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \frac{z + y^2}{\sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}} d\sigma &= \int_D \frac{x^2 - y^2 + y^2}{\sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}} \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dx dy \\ &= \int_D x^2 dx dy = \frac{7}{4}\pi. \end{aligned}$$

Soluzione 1.15 La superficie sulla quale si vuole calcolare l'integrale è dato dal grafico della funzione

$$z = g(x, y) = x^2 + y^2$$

con $(x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - y \leq 0, y \geq 1/2, x \geq 0\}$. Quindi otteniamo che

$$d\sigma = \sqrt{1 + |\nabla g(x, y)|^2} dx dy = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dx dy$$

e l'integrale di superficie diventa quindi

$$\int_D \frac{x}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dx dy = \int_D x dx dy = \frac{1}{24}.$$

Soluzione 1.16 Per calcolare il flusso di tale campo si può procedere in due modi, o scrivendo l'integrale di superficie, oppure cercare di applicare il Teorema della divergenza in \mathbb{R}^3 . Lasciamo il primo caso come esercizio e vediamo come procedere nel secondo caso. Per poter applicare il Teorema della divergenza dobbiamo avere a che fare con superfici chiuse, quindi, siccome nel nostro caso abbiamo solo l'emisfero superiore E della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, dobbiamo prima di tutto chiudere tale superficie; il modo più semplice per fare ciò è considerare l'insieme

$$S = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 16\}.$$

A questo punto abbiamo che, se

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 16\},$$

allora $\partial A = E \cup S$ e quindi

$$\int_{E \cup S} F \cdot \nu d\sigma = \int_{\partial A} F \cdot \nu d\sigma = \int_A \operatorname{div} F dx dy dz.$$

Quindi, dato che $\operatorname{div} F = 0$,

$$\int_E F \cdot \nu d\sigma = - \int_S F \cdot \nu d\sigma.$$

Ma su S si ha che $F(x, y, 0) = (x^3, 0, 3x^2)$, $\nu = (0, 0, -1)$ e $d\sigma = dx dy$, quindi

$$\int_S F \cdot \nu d\sigma = - \int_{x^2 + y^2 \leq 16} 3x^2 dx dy = -192\pi;$$

in definitiva abbiamo trovato che

$$\int_E F \cdot \nu d\sigma = -192\pi.$$

Soluzione 1.17 Utilizzando il Teorema della divergenza, tenendo presente che

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = 2x + 2,$$

otteniamo che

$$\begin{aligned} \int_{\partial T} F \cdot \nu d\sigma &= \int_T \operatorname{div} F dx dy dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (2x + 2) dz = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

Per controllare che tale risultato sia giusto, si potrebbe calcolare l'integrale di superficie del campo vettoriale F .

Soluzione 1.18 Notiamo anzitutto che il campo dato ha la proprietà che $\operatorname{div} F(x, y, z) = 0$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Questo vuol dire che se T è un qualsiasi dominio che non contiene l'origine, si ha che

$$\int_{\partial T} F \cdot \nu d\sigma = 0.$$

A questo punto, se $\Sigma = \partial A$ è una qualsiasi superficie chiusa che contiene al suo interno l'origine, non possiamo concludere che il flusso sia nullo in quanto la singolarità del campo F cade proprio nella porzione di spazio racchiusa dalla superficie Σ . Siccome l'origine è un punto interno a Σ , esisterà un raggio R tale che la palla $B_R(0)$ è tutta contenuta all'interno di Σ consideriamo quindi la porzione di spazio $T = A \setminus B_R(0)$, abbiamo che $\partial T = \Sigma \cup \partial B_R(0)$ e a questo punto l'origine non è più all'interno di T , quindi

$$0 = \int_T \operatorname{div} F dx dy dz = \int_{\Sigma} F \cdot \nu d\sigma - \int_{\partial B_R(0)} F \cdot \nu d\sigma$$

dove il segno meno nell'ultimo integrale tiene conto che ν è la normale esterna alla palla $B_R(0)$ che però rappresenta in tali punti la normale entrante nella regione T . Quindi

$$\int_{\Sigma} F \cdot \nu d\sigma = \int_{\partial B_R(0)} F \cdot \nu d\sigma;$$

su $\partial B_R(0)$ abbiamo che il campo si scrive

$$F(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{R^3}$$

mentre la normale uscente da $B_R(0)$ si scrive come

$$\nu(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{R}.$$

Per calcolare l'integrale utilizziamo le coordinate polari e tenendo presente che

$$d\sigma = R^2 \sin \varphi d\varphi d\vartheta,$$

otteniamo che

$$\int_{\partial B_R(0)} F \cdot \nu d\sigma = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2} R^2 \sin \varphi d\vartheta = 4\pi.$$

Soluzione 1.19 Notiamo anzitutto che $\operatorname{div} F = 0$, quindi possiamo provare ad applicare il Teorema della divergenza; per fare questo dobbiamo considerare una superficie chiusa, dobbiamo cioè chiudere la superficie data. Per fare questo possiamo ad esempio considerare la superficie

$$S = \{(x, y, 4) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Se poniamo

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 4, x^2 + y^2 \leq 4\}$$

abbiamo che $\partial A = S \cup \Sigma$, e quindi dalla condizione $\operatorname{div} F = 0$ si ricava che

$$\int_{\Sigma} F \cdot \nu d\sigma = - \int_S F \cdot \nu d\sigma.$$

Ma su S la normale uscente è data dal vettore $(0, 0, 1)$ e $d\sigma = dx dy$, quindi

$$\int_{\Sigma} F \cdot \nu d\sigma = \int_{x^2 + y^2 \leq 4} x^3 y dx dy = 0.$$