

## Esercizi XII settimana

22 dicembre 2010

1. Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale;

$$y''(t) = (y'(t))^2 + 1.$$

2. Risolvere il seguente Problema di Cauchy;

$$\begin{cases} y''(t) = y'(t)(1 + y(t)) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

3. Risolvere il seguente Problema di Cauchy;

$$\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = (1 + t)e^t \cos(2t) \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

4. Trovare l'integrale generale della seguente equazione differenziale;

$$y''(t) - y(t) = \frac{1}{1 + e^t}.$$

### Soluzioni

1. L'equazione data non dipende esplicitamente da  $y$  (in realtà neanche da  $t$ ); possiamo quindi ridurre la complessità ponendo  $v(t) = y'(t)$  in modo da ottenere l'equazione del primo ordine

$$v'(t) = v(t)^2 + 1,$$

la cui soluzione generale, in forma implicita, è data da

$$\arctan v(t) = t + c_1.$$

Tale soluzione è definita fin tanto che  $t + c_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$  ed è data, esplicitamente, da

$$v(t) = \tan(t + c_1).$$

Ricordando che  $v(t) = y'(t)$ , integrando la soluzione trovata, ricaviamo che

$$y(t) = -\log |\cos(t + c_1)| + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. L'equazione data è di tipo autonomo in quanto non compare la variabile indipendente  $t$ ; possiamo quindi porre

$$z(y) := y'(t),$$

da cui, dato che  $y''(t) = \frac{d}{dt}z(y(t)) = \frac{d}{dy}z(y)y'(t) = \frac{d}{dy}z(y)z(y)$ , si giunge all'equazione del primo ordine

$$\begin{cases} z(y) \frac{d}{dy}z(y) = z(y)(1+y) \\ z(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

dove il dato iniziale è stato ricavato ponendo  $\frac{1}{2} = y'(0) = z(y(0)) = z(0)$ . Siccome  $z \equiv 0$  non è soluzione del problema ai valori iniziali, possiamo dividere per  $z$  ed integrare per ottenere che

$$z(y) = \frac{y^2 + 2y + 1}{2} = \frac{(y+1)^2}{2}.$$

Risolviamo ora il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{(y(t)+1)^2}{2} \\ y(0) = 0; \end{cases}$$

tale problema ha per soluzione la funzione

$$y(t) = \frac{t}{2-t}$$

che sarà quindi la soluzione cercata.

3. Per risolvere il problema dato, risolviamo prima l'equazione omogenea considerando il polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5;$$

tale polinomio ha due radici complesse coniugate  $1 \pm 2i$ , da cui la soluzione generale dell'omogenea che è data da

$$y_H(t) = e^t (c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)).$$

Per la ricerca della soluzione particolare, notiamo anzitutto che possiamo scrivere il termine forzante come

$$(1+t)e^t \cos(2t) = e^{1 \cdot t} \left( (1+t) \cos(2 \cdot t) + 0 \cdot \sin(2 \cdot t) \right)$$

in cui riconosciamo la possibilità di poter applicare il metodo per somiglianza. Abbiamo  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$ ,  $p_1(t) = 1+t$  polinomio di grado 1 e  $q_1(t) = 0$  polinomio di grado 0. Siccome  $\lambda = \alpha + i\beta = 1 + 2i$  è radice, con molteplicità 1, del polinomio caratteristico, la soluzione particolare va cercata nella forma

$$y_P(t) = te^t \left( (at+b) \cos(2t) + (ct+d) \sin(2t) \right) = e^t \left( (at^2+bt) \cos(2t) + (ct^2+dt) \sin(2t) \right);$$

siccome

$$y'_P(t) = e^t \left[ \cos(2t) \left( (a+2c)t^2 + (2a+b+2d)t + b \right) + \sin(2t) \left( (c-2a)t^2 + (2c-2b+d)t + d \right) \right],$$

mentre

$$y''_P(t) = e^t \left[ \cos(2t) \left( (4c-3a)t^2 + (4a-3b+8c+4d)t + 2a+2b+4d \right) + \sin(2t) \left( -(4a+3c)t^2 - (8a+4b-4c+3d)t - 4b+2c+2d \right) \right]$$

Imponendo l'equazione

$$y''_P(t) - 2y'_P(t) + 5y_P(t) = (1+t)e^t \cos(2t),$$

arriviamo all'equazione

$$e^t \left[ \cos(2t) (8ct + 2a + 4d) + \sin(2t) (-8at - 4b + 2c) \right] = e^t (1+t) \cos(2t)$$

da cui il sistema

$$\begin{cases} 8c = 1 \\ 2a + 4d = 1 \\ -8a = 0 \\ -4b + 2c = 0 \end{cases}$$

Otteniamo quindi che una soluzione particolare è data da

$$y_P(t) = e^t \left[ \frac{t}{16} \cos(2t) + \left( \frac{t^2}{8} + \frac{t}{4} \right) \sin(2t) \right]$$

Quindi la soluzioni generale dell'equazione omogenea è data da

$$y(t) = e^t \left( c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) \right) + e^t \left[ \frac{t}{16} \cos(2t) + \left( \frac{t^2}{8} + \frac{t}{4} \right) \sin(2t) \right].$$

Infine, imponendo le condizioni iniziali, si ottengono i valori  $c_1 = 1$  e  $c_2 = -\frac{1}{32}$ ; in definitiva la soluzione del Problema di Cauchy è data da

$$y(t) = e^t \left[ \left( 1 + \frac{t}{16} \right) \cos(2t) + \left( -\frac{1}{32} + \frac{t^2}{8} + \frac{t}{4} \right) \sin(2t) \right].$$

4. Il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata è dato da  $\lambda^2 - 1$ , quindi la soluzione generale dell'omogenea è data da

$$y_H(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}.$$

Per trovare la soluzione particolare, applichiamo il metodo della variazione delle costanti; supponiamo quindi che

$$y(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)e^{-t};$$

derivando otteniamo che

$$y'(t) = c_1'(t)e^t + c_2'(t)e^{-t} + c_1(t)e^t - c_2(t)e^{-t}.$$

Poniamo quindi la condizione

$$c_1'(t)e^t + c_2'(t)e^{-t} = 0$$

e deriviamo una seconda volta, ottenendo

$$y''(t) = c_1'(t)e^t - c_2'(t)e^{-t} + c_1(t)e^t + c_2(t)e^{-t}.$$

Imponi quindi la condizione

$$y''(t) - y(t) = \frac{1}{1 + e^t}$$

si arriva all'equazione

$$c_1'(t)e^t - c_2'(t)e^{-t} = \frac{1}{1 + e^t}.$$

Dobbiamo quindi risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} c_1'(t)e^t + c_2'(t)e^{-t} = 0 \\ c_1'(t)e^t - c_2'(t)e^{-t} = \frac{1}{1 + e^t} \end{cases}$$

che ha come soluzioni

$$\begin{cases} c_1'(t) = \frac{1}{2e^t(1 + e^t)} \\ c_2'(t) = -\frac{e^t}{2(1 + e^t)}. \end{cases}$$

Integrando otteniamo

$$\begin{cases} c_1(t) = c_1 - \frac{t}{2} - \frac{e^{-t}}{2} + \frac{1}{2} \log(1 + e^t) \\ c_2(t) = c_2 - \frac{1}{2} \log(1 + e^t). \end{cases}$$

da cui la soluzione generale dell'equazione data

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 e^t + c_2 e^{-t} - \frac{1}{2} - \frac{te^t}{2} + \left( \frac{e^t - e^{-t}}{2} \right) \log(1 + e^t) \\ &= c_1 e^t + c_2 e^{-t} - \frac{1}{2} - \frac{te^t}{2} + \sinh(t) \log(1 + e^t). \end{aligned}$$