Esercizi II settimana

6 ottobre 2011

1. Determinare il dominio e il codomio delle seguenti funzioni;
$$\frac{1}{\sqrt{2x-x^2-y^2}}+\sqrt{x-y^2}, \qquad \operatorname{arcsen}(y^2-x^2+1),$$
$$\ln\Big((x^2-1-y)(x^2-1+y)\Big)+\ln(4-x^2).$$
2. Descrivere le proprietà topologiche degli insiemi del punto precedente; dire in particolare se i domini trovati sono aperti, chiusi, limitati, compatti e connessi per archi.
3. Determinare il dominio della funzione
$$f(x,y)=\sqrt{x-\sqrt{1-x^2-y^2}};$$
descrivere le proprietà topologiche di tale dominio e dire la funzione è continua o meno.
4. Determinare gli insiemi di livello della funzione del punto precedente; dire inoltre se si può applicare il Teorema di Weierstrass e determinare massimo e minimo mediante lo studio degli insiemi di livello.

Soluzioni

1. Il dominio della prima funzione è determinato dalle due condizioni
$$\begin{cases} 2x-x^2-y^2>0 \\ x-y^2\geq 0 \end{cases}$$
cioè dalle condizioni
$$\begin{cases} (x-1)^2+y^2<1 \\ x\geq y^2. \end{cases}$$
Si tratta quindi della parte di cerchio di raggio 1 centrato in $(1,0)$ che si trova a destra della parabola $x=y^2$; tale insieme è rappresentato in Figura 1(a). Per quanto riguarda il codominio, si nota che ad esempio lungo la parabola $x=y^2$ per punti che tendono a $(1,1)$ o $(1,-1)$ la funzione tende a $+\infty$; siccome poi in $(1,0)$ la funzione vale $\sqrt{2}$, allora il codominio contiene sicuramente l'intervallo $[\sqrt{2},+\infty)$ in quanto la funzione è continua. Per determinare quale sia il codominio, che sicuramente è contenuto in $(0,+\infty)$, bisognerebbe determinare il minimo della funzione; al momento non abbiamo

ancora sviluppato la teoria necessaria per questo e quindi tralasciamo qui la discussione completa.

Per la seconda funzione, il dominio è determinato dalle condizioni

$$-1 \leq y^2 - x^2 + 1 \leq 1,$$

da cui

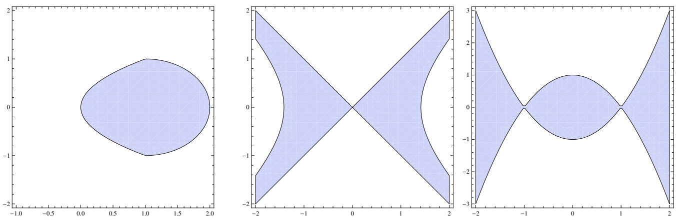
$$\begin{cases} x^2 - y^2 \leq 2 \\ x^2 - y^2 \geq 0. \end{cases}$$

Tale regione è rappresentata in Figura 1(b). Il codominio è dato da $[-\pi/2, \pi/2]$.

Il dominio dell'ultima funzione è determinato dalle condizioni

$$\begin{cases} (x^2 - 1 - y)(x^2 - 1 + y) > 0 \\ 4 - x^2 > 0. \end{cases}$$

Tale dominio è rappresentato in Figura 1(c). Il codominio è dato invece da $(-\infty, 2\ln 2]$.



(a) (b) (c)

Figura 1: Rappresentazione dei domini delle funzioni date.

2. Per quanto riguarda le proprietà topologiche dei domini del punto precedente, abbiamo che il primo dominio è limitato, connesso nè aperto è chiuso in quanto la parabola $x = y^2$ appartiene all'insieme mentre la parte di circonferenza $(x-1)^2 + y^2 = 1$ non appartiene al dominio. Il secondo dominio è illimitato, connesso in quanto $(0,0)$ appartiene al dominio e chiuso. Il terzo dominio è limitato, aperto e disconnesso in quanto i punti $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ non appartengono al dominio.

3. Il dominio è determinato dalla condizione

$$\begin{cases} 1 - x^2 - y^2 \geq 0 \\ x - \sqrt{1 - x^2 - y^2} \geq 0, \end{cases}$$

che è equivalente alla condizione

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 1 \\ 2x^2 + y^2 \geq 1. \end{cases}$$

Tale dominio è rappresentato in Figura 2; esso è chiuso, limitato (quindi compatto) e connesso. La funzione è continua sul suo dominio; si può già concludere che la funzione ammette massimo e minimo sul suo dominio grazie al Teorema di Weierstrass.

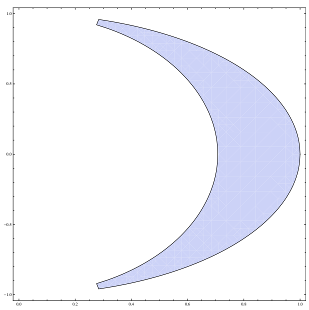


Figura 2: Dominio della figura data.

4. Gli insiemi di livello sono determinati dall'equazione

$$c = \sqrt{x - \sqrt{1 - x^2 - y^2}};$$

si vede subito che tale equazione ha soluzione solo per $c \geq 0$. Per tali valori possiamo scrivere

$$\sqrt{1 - x^2 - y^2} = x - c^2$$

che, nel caso in cui $c^2 \leq x$ è equivalente a

$$\frac{4}{2 - c^4}\left(x - \frac{c^2}{2}\right)^2 + \frac{2}{2 - c^4}y^2 = 1.$$

Tali insiemi sono quindi ellissi centrate in $(c^2/2, 0)$ e di semiassi

$$\frac{\sqrt{2 - c^4}}{2}, \qquad \frac{\sqrt{2 - c^4}}{\sqrt{2}}.$$

Si noti che la condizione $c^2 \leq x$ assieme alla condizione che il punto (x, y) appartenga al dominio della funzione implica che $c \leq 1$, in quanto $x \in [0, 1]$. Da questa discussione se ne deduce che il minimo della funzione è 0 assunto lungo l'ellisse $2x^2 + y^2 = 1$, $x \geq 0$, mentre il massimo è 1 assunto nel punto $(1, 0)$.