UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Eserciziario di Analisi Matematica II c.d.l. Ingegneria Civile e Ambientale[1]

Michele Miranda

a.a. 2011-2012

[1] versione aggiornata al 18 ottobre 2011

In queste dispense viene distribuito del materiale che ritengo possa essere utile allo studente che si avvicina allo studio del corso di Analisi Matematica II. Vengono forniti i testi di alcuni esercizi relativi agli argomenti del corso di Analisi Matematica II tenuto presso la Facoltà di Ingegneria di Ferrara, corso di laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale, con alcune proposte di soluzione. Tengo a sottolineare che quella presentata è solo *una* possibile soluzione, ricordando che una qualsiasi soluzione alternativa, *se corretta*, è del tutto equivalente.

Sottolineo infine che con il presente eserciziario non si intende assolutamente sostituire un qualsiasi testo teorico di Analisi Matematica II; consigliamo anzi di avere ben chiari i concetti di teoria *prima* di apprestarsi ad affrontare gli esercizi.

In ultimo, chiedo scusa per eventuali errori esistenti nel presente eserciziario, e invito chiunque trovi delle inesattezze, a segnalarmele prontamente in modo da provvedere alla loro correzione.

Ferrara, 29 settembre 2011,

Michele Miranda

michele.miranda@unife.it

Indice

Capitolo 1

Curve

Esercizio 1.1 Scrivere i versori tangenti delle seguenti curve piane:

1. $\varphi(t) = (t - 2, t + \mathrm{sen}t)$, $t \in \mathbb{R}$;
2. $\varphi(t) = (te^t, \ln(1 + t))$, $t \in (-1, +\infty)$;
3. $\varphi(t) = (r \cos t, r\mathrm{sen}t)$, $t \in \mathbb{R}$;
4. $\varphi(t) = (t|t|, t - \cos t)$, $t \in \mathbb{R}$;

Esercizio 1.2 Scrivere l'equazione della retta tangente alle seguenti curve nei punti indicati:

1. $\varphi(t) = (t^2, t^3)$ in $(1, 1)$;
2. $\varphi(t) = (\mathrm{sen}t, \pi - t)$ in $(0, 0)$;
3. $\varphi(t) = (\mathrm{sen}t \cos t - t, \cos^2 t + \frac{1}{\mathrm{sen}t})$ in $(-\frac{\pi}{2}, 1)$;
4. $\varphi(t) = (t, t^2, \frac{1}{t^3})$ in $(1, 1, 1)$.

Esercizio 1.3 Studiare le seguenti curve parametrizzate, descrivendone le principali proprietà e calcolandone la lunghezza:

1. $\varphi : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (t, |t|)$;
2. $\varphi : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (t^2, t^3)$;
3. $\varphi : [-2, 8] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (1 - \cos t + (2 - t)\mathrm{sen}t, \mathrm{sen}t + (2 - t) \cos t)$;

Esercizio 1.4 Calcolare la lunghezza delle seguenti curve cartesiane del piano:

1. $y = \ln x$, $x \in [3/4, 4/3]$;
2. $y = \ln \frac{e^x+1}{e^x-1}$, $x \in [1, 2]$;

3. $x = e^y$, $y \in [1, 2]$;
4. $y = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$, $x \in [0, a]$ (asteroide);
5. $y = \frac{3x}{4} + \ln x$, $x \in [\frac{18}{25}, \frac{51}{25}]$.

Esercizio 1.5 Calcolare le lunghezze delle seguenti curve piane in coordinate polari esplicite;

1. $\varrho = 2a(1 + \cos\vartheta)$, $\vartheta \in [-\pi, \pi]$ (cardioide);
2. $\varrho = ae^{\vartheta}$, $\vartheta \in [0, \pi/6]$ (spirale Archimedea);
3. $\varrho = \vartheta^2$, $\vartheta \in [0, 3/2]$;
4. $\varrho = a\mathrm{sen}^5(\frac{\vartheta}{5})$, $\vartheta \in [0, \frac{5\pi}{6}]$.

Esercizio 1.6 Studiare le proprietà principali, calcolandone la lunghezza, della cicloide, dell'epicicloide e dell'emicicloide, cioè delle curve $\varphi : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2$ definite da

$$\varphi(t) = (Rt - r\mathrm{sen}t, R - r\cos t)$$

con $r = R$, $r < R$ ed $r > R$ rispettivamente.

Esercizio 1.7 Si consideri il folium di Cartesio $r : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}^2$,

$$r(t) = (t(t-1), t(t-1)(2t-1));$$

dopo averne discusso le principali proprietà, tra cui la regolarità, si scrivano le equazioni delle rette tangente e normale al sostegno della curva in $r(1/4)$.

Esercizio 1.8 Dato l'asteroide $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$,

$$r(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t),$$

si calcoli il parametro d'arco $s(t)$ per $t \in [0, \pi/2]$ e per $t \in [\pi/2, \pi]$. Si riparametrizzi quindi la curva usando tale parametro, cioé si definisca $\varphi(s) = \varphi(s(t)) := r(t)$ e si verifichi che $\|\varphi'(s)\| = 1$. Si dimostri inoltre che la curva é regolare a tratti ma non regolare. Si calcoli infine la curvatura dell'asteroide usando sia la parametrizzazione φ, che la parametrizzazione r.

Esercizio 1.9 Si studino le principali proprietà della spirale definita in coordinate polari da $\varrho : [0, 2\pi] \to [0, +\infty)$,

$$\varrho(\vartheta) = \vartheta;$$

si determini quindi la sua lunghezza e la sua curvatura.

Esercizio 1.10 Calcolare le lunghezze delle curve nello spazio definite da:

1. $\varphi : [0, 2] \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(t) = (t, t^2/\sqrt{2}, t^3/3)$;

2. $\varphi : [0, 2]$, $\varphi(t) = (t, 3t^2/2, 3t^3/2)$;
3. $\varphi : [0, \pi/2]$, $\varphi(t) = (t \cos t, t\mathrm{sen}t, t)$;
4. $\varphi : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(t) = (\frac{\cos 2t}{4}, \cos^3 t, \mathrm{sen}^3 t)$
5. la curva definita da
$$\begin{cases} y = x^2 \\ 3z = 2xy \end{cases}$$
e congiungente il punto $(0, 0, 0)$ al punto $(2, 4, 8/3)$;
6. $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(t) = (e^{2t}, 2e^t, t)$;
7. $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(t) = (\frac{8}{3}t^{\frac{3}{2}}, 2t^2, 2t - 1)$.

Calcolare infine l'angolo tra le ultime due curve nel punto $(1, 2, 0)$, l'ascissa curvilinea e i versori della terna intrinseca.

Esercizio 1.11 Calcolare per la curva

$$\varphi(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, \sqrt{2}e^t)$$

l'ascissa curvilinea $s(t)$ a partire dal punto $t = 0$ e riscrivere l'equazione della curva assumendo come parametro s. Calcolare quindi la terna intrinseca e provare che formano angoli costanti con l'asse z.

Esercizio 1.12 Si calcoli la curvatura della spirale cilindrica $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$$r(t) = (\cos t, \sin t, t).$$

Esercizio 1.13 (**Problema Isodiametrico**) Dimostrare che tra tutte le curve chiuse di diametro 2, la circonferenza è quella che racchiude una regione di area massima (si tenga presente che per un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$, si definisce il diametro tramite

$$\mathrm{diam} A = \sup_{x,y \in A} \|x - y\|.$$

Suggerimento: si osservi prima di tutto che conviene che l'insieme sia convesso per racchiudere area maggiore, e quindi si ponga il sistema di coordinate in un punto della curva con un asse tangente alla curva e uno perpendicolare, e calcolare quindi l'area usando le coordinate polari.

1.1 Soluzioni

Soluzione 1.1

1. Calcoliamo la derivata della curva;

$$\varphi'(t) = (1, 1 + \cos t), \qquad \|\varphi'(t)\| = \sqrt{2 + 2\cos t + \cos^2 t}$$

da cui si ottiene che il versore tangente è dato da

$$T_\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2 + 2\cos t + \cos^2 t}}(1, 1 + \cos t).$$

In particolare, per $t = \pi/2$, la curva passa per il punto $(\pi/2 - 2, \pi/2 + 1)$ ed ha in tale punto versore tangente

$$T_\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

2. Si ottiene

$$\varphi'(t) = \left(e^t(t+1), \frac{1}{t+1}\right), \qquad \|\varphi'(t)\| = \frac{\sqrt{e^{2t}(t+1)^4 + 1}}{t+1}$$

da cui

$$T_\varphi(t) = \frac{t+1}{\sqrt{e^{2t}(t+1)^4 + 1}}\left(e^t(t+1), \frac{1}{t+1}\right).$$

In particolare, per $t = 0$, la curva passa per il punto $(0, 0)$ ed ha in tale punto versore tangente

$$T_\varphi(0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

3. Si ottiene

$$\varphi'(t) = (-r\mathrm{sen}t, r\cos t), \qquad \|\varphi'(t)\| = r$$

da cui

$$T_\varphi(t) = (-\mathrm{sen}t, \cos t).$$

4. Si ottiene

$$\varphi'(t) = \left(|t| + \frac{t^2}{|t|}, 1 + \mathrm{sen}t\right), \qquad \|\varphi'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2 + \mathrm{sen}^2 t + 2\mathrm{sen}t}$$

da cui

$$T_\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2 + \mathrm{sen}^2 t + 2\mathrm{sen}t}}\left(|t| + \frac{t^2}{|t|}, 1 + \mathrm{sen}t\right).$$

In particolare, per $t = \pi$, la curva passa per il punto $(\pi^2, \pi + 1)$ ed ha in tale punto versore tangente

$$T_\varphi(\pi) = \left(\frac{\pi^2}{\sqrt{1 + 4\pi^2}}, \frac{\pi + 1}{\sqrt{1 + 4\pi^2}}\right).$$

Soluzione 1.2

1. La curva passa nel punto indicato per $t = 1$. Inoltre,
$$\varphi'(t) = (2t, 3t^2)$$
e quindi la retta tangente, in forma parametrica, è data da
$$r(t) = \varphi(1) + t\varphi'(1) = (1, 1) + t(2, 3) = (2t + 1, 3t + 1).$$
In forma cartesiana, tale retta è individuata dall'equazione
$$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}.$$

2. La curva passa nel punto indicato per $t = \pi$. Inoltre,
$$\varphi'(t) = (\cos t, -1)$$
e quindi la retta tangente, in forma parametrica, è data da
$$r(t) = \varphi(\pi) + t\varphi'(\pi) = (0, 0) + t(-1, -1) = (-t, -t).$$
In forma cartesiana, tale retta è individuata dall'equazione
$$y = x.$$

3. La curva passa nel punto indicato per $t = \frac{\pi}{2}$. Inoltre,
$$\varphi'(t) = \left(2\cos^2 t - 2, -2\cos t \operatorname{sen} t - \frac{\cos t}{\operatorname{sen}^2 t}\right)$$
e quindi la retta tangente, in forma parametrica, è data da
$$r(t) = \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) + t\varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(-\frac{\pi}{2}, 1\right) + t(-2, 0) = \left(-2t - \frac{\pi}{2}, 1\right).$$
In forma cartesiana, tale retta è individuata dall'equazione
$$y = 1.$$

4. La curva passa nel punto indicato per $t = 1$. Inoltre,
$$\varphi'(t) = \left(1, 2t, -\frac{3}{t^4}\right)$$
e quindi la retta tangente, in forma parametrica, è data da
$$r(t) = \varphi(1) + t\varphi'(1) = (1, 1, 1) + t(1, 2, -3) = (t + 1, 2t + 1, -3t + 1).$$
In forma cartesiana, tale retta è individuata dalle equazioni
$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = 4 - 3x. \end{cases}$$

Soluzione 1.3

1. La curva data è una curva semplice, non chiusa e non regolare in quanto non derivabile per $t = 0$; si noti che non può neanche esistere una riparametrizzazione della curva che la renda regolare in quanto non esiste un versore tangente al sostegno della curva nel punto $(0, 0)$ (si veda Figura 1.1). Per vedere meglio questo fatto, possiamo considerare il versore tangente, che è dato da
$$T_\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1) & t \in [-1, 0) \\ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) & t \in (0, 1]. \end{cases}$$
Dato che tale versore è discontinuo per $t = 0$, se ne deduce che la curva non è regolare. È però regolare a tratti in quanto regolare in $[-1, 0]$ e $[0, 1]$. La sua lunghezza è data da
$$l(\varphi, [-1, 1]) = \int_{-1}^{1} \|\varphi'(t)\| dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2}.$$
Si noti infine che la curvatura è nulla in quanto $\varphi''(t) = 0$ per $t \neq 0$, mentre in 0 la derivata seconda non esiste (a meno di non considerare i limiti destro e sinistro per $t \to 0$).

2. La curva è semplice, non chiusa e non regolare in quanto $t = 0$ si ha $\varphi'(0) = 0$; anche in questo caso, non esistendo un versore tangente al sostegno nel punto $(0, 0)$ (si veda sempre la Figura 1.1), non potrà esistere una riparametrizzazione che la rende una curva regolare. Per vedere meglio questo, basta scrivere il versore tangente
$$T_\varphi(t) = \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|} = \frac{1}{|t|\sqrt{4 + 9t^2}}(2t, 3t^2),$$
notando che
$$\lim_{t \to 0^-} T_\varphi(t) = (-1, 0), \qquad \lim_{t \to 0^+} T_\varphi(t) = (1, 0).$$
La curva è però regolare a tratti e la sua lunghezza è data da
$$\begin{aligned} l(\varphi, [-1, 1]) &= \int_{-1}^{1} \|\varphi'(t)\| dt = \int_{-1}^{1} |t|\sqrt{4 + 9t^2} dt = 2\int_{0}^{1} t\sqrt{4 + 9t^2} dt \\ &= \frac{2}{27}(13\sqrt{13} - 8). \end{aligned}$$
L'accelerazione scalare sarà data da
$$a(t) = \langle \varphi''(t), T_\varphi(t) \rangle = \frac{2t(2 + 9t^2)}{|t|\sqrt{4 + 9t^2}}.$$
La curvatura si puó determinare dalla relazione
$$v^2(t)k(t)N_\varphi(t) = \varphi''(t) - a(t)T_\varphi(t) = \frac{6t}{4 + 9t^2}(-3t, 2),$$
da cui, tenendo conto che $v^2(t) = t^2\sqrt{4 + 9t^2}$,
$$k(t) = \frac{6}{t\sqrt{4 + 9t^2}^3}$$

3. La curva non è semplice, non è chiusa e non è regolare (vedere figura Figura 1.1). Per la regolarità, si nota che
$$\varphi'(t) = (2-t)(\cos t, \mathrm{sen} t),$$
da cui
$$T_\varphi(t) = \frac{2-t}{|2-t|}(\cos t, -\mathrm{sen} t) = \begin{cases} (\cos t, -\mathrm{sen} t) & \text{se } t < 2 \\ (-\cos t, \mathrm{sen} t) & \text{se } t > 2. \end{cases}$$
Si nota quindi la non continuità del vettore tangenge per $t = 2$. È regolare a tratti e la sua lunghezza è data da
$$\begin{aligned} l(\varphi, [-2, 8]) &= \int_{-2}^{8} \|((2-t)\cos t, -(2-t)\mathrm{sen} t)\| dt = \int_{-2}^{8} |2-t| dt \\ &= \int_{-2}^{2} (2-t) dt + \int_{2}^{8} (t-2) dt = 26. \end{aligned}$$
Scrivendo quindi
$$\varphi''(t) = (-\cos t, \mathrm{sen} t) - (2-t)(\mathrm{sen} t, \cos t),$$
si ricava subito che
$$a(t) = -\frac{2-t}{|2-t|},$$
mentre dalla formula
$$v^2(t)k(t)N_\varphi(t) = \varphi''(t) - a(t)T_\varphi(t) = -(2-t)(\mathrm{sen} t, \cos t),$$
si ricava che
$$k(t) = \frac{1}{|2-t|},$$
mentre
$$N_\varphi(t) = \begin{cases} -(\mathrm{sen} t, \cos t) & \text{se } t < 2 \\ (\mathrm{sen} t, \cos t) & \text{se } t > 2. \end{cases}$$

Soluzione 1.4

1. La curva che stiamo considerando è data dalla funzione $\varphi : [3/4, 4/3] \to \mathbb{R}^2$,
$$\varphi(x) = (x, \ln x);$$
quindi siccome
$$\varphi'(x) = \left(1, \frac{1}{x}\right)$$
troviamo che
$$l(\varphi, [3/4, 4/3]) = \int_{3/4}^{4/3} \|\varphi'(x)\| dx = \int_{3/4}^{4/3} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx = \frac{5}{12} + \ln \frac{3}{2}.$$
Ponendo $v(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$, troviamo anche che
$$T_\varphi(x) = \frac{1}{v(x)}\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}(x, 1).$$

(a) (b) (c)

Figura 1.1: Sostegni delle curve $(t, |t|)$, (t^2, t^3), e $(1 - \cos t + (2 - t)\mathrm{sen} t, \mathrm{sen} t + (2 - t)\cos t)$.

Inoltre, dato che

$$\varphi''(x) = \left(0, -\frac{1}{x^2}\right),$$

ne ricaviamo che $a(x) = -\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$, e quindi, dalla relazione

$$v^2(x)k(x)N_\varphi(x) = \varphi''(x) - a(x)T_\varphi(x),$$

se ne deduce che

$$N_\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^6}}(x^3, -1), \qquad k(x) = \frac{\sqrt{1+x^6}}{x^2(1+x^2)^2}.$$

2. Una parametrizzazione è data da $\varphi : [1, 2] \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi(t) = \left(t, \ln\frac{e^t+1}{e^t-1}\right);$$

la curva è regolare, semplice e non chiusa con

$$\begin{aligned} l(\varphi, [1, 2]) &= \int_1^2 \left\| \left(1, \frac{e^t-1}{e^t+1}\frac{e^t(e^t-1) - e^t(e^t+1)}{(e^t-1)^2}\right) \right\| dt \\ &= \int_1^2 \frac{e^{2t}+1}{e^{2t}-1}dt = \ln(e^2+1) - 1. \end{aligned}$$

3. Una parametrizzazione è data da $\varphi : [1, 2] \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi(t) = (e^t, t)$$

ma anche da $\psi : [e, e^2] \to \mathbb{R}^2$

$$\psi(t) = (t, \ln t).$$

In ogni caso si vede che la curva è semplice, regolare non chiusa con

$$
\begin{aligned}
l(\varphi,[1,2]) &= \int_1^2 \sqrt{1+e^{2t}}dt = \int_{e^2}^{e^4} \frac{\sqrt{1+s}}{2s}ds \\
&= \int_{\sqrt{1+e^2}}^{\sqrt{1+e^4}} \frac{\tau^2}{(\tau^2-1)}d\tau \\
&= \sqrt{1+e^4} - \sqrt{1+e^2} + \ln\sqrt{\frac{\sqrt{1+e^4}-1}{\sqrt{1+e^4}+1}\frac{\sqrt{1+e^2}+1}{\sqrt{1+e^2}-1}}.
\end{aligned}
$$

4. La curva è semplice, regolare e non chiusa, con parametrizzazione data ad esempio da $\varphi : [0,a] \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi(t) = (t, (a^{2/3} - t^{2/3})^{3/2});$$

avendosi

$$\varphi'(t) = \left(1, -t^{-1/3}(a^{2/3} - t^{2/3})^{1/2}\right)$$

la sua lunghezza sarà data da

$$l(\varphi,[0,a]) = \int_0^a \sqrt{1 + t^{-2/3}(a^{2/3} - t^{2/3})}dt = a^{1/3}\int_0^a t^{-1/3}dt = \frac{3}{2}a.$$

5. Possiamo parametrizzare la curva con $\varphi : [\frac{18}{25}, \frac{51}{25}] \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi(t) = \left(t, \frac{3}{4}t + \ln t\right)$$

ottenendo quindi

$$\varphi'(t) = \left(1, \frac{3}{4} + \frac{1}{t}\right).$$

La lunghezza della curva data risulterà quindi data da

$$
\begin{aligned}
l\left(\varphi, \left[\frac{18}{25}, \frac{51}{25}\right]\right) &= \int_{\frac{18}{25}}^{\frac{51}{25}} \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{t}\right)^2}dt \\
&= \frac{31}{20} + \ln\frac{27}{17} + \frac{3\ln 2}{5}
\end{aligned}
$$

Soluzione 1.5

1. Possiamo applicare la formula

$$l(\varphi,[\vartheta_1,\vartheta_2]) = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{\varrho(\vartheta)^2 + \varrho'(\vartheta)^2}d\vartheta$$

per ottenere che

$$
\begin{aligned}
l(\varphi,[-\pi,\pi]) &= 2a\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{(1+\cos\vartheta)^2 + \operatorname{sen}^2\vartheta}d\vartheta = 4a\sqrt{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos\frac{\vartheta}{2}d\vartheta \\
&= 8a\sqrt{2}\left[\operatorname{sen}\frac{\vartheta}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 16a\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

2. Possiamo calcolare direttamente la lunghezza della curva dalla formula

$$l(\varphi, [0, \pi/6]) = a\sqrt{2}\int_0^{\pi/6} e^{\vartheta} d\vartheta = a\sqrt{2}(e^{\pi/6} - 1).$$

3. Si ottiene che

$$\begin{aligned} l(\varphi, [0, \frac{3}{2}]) = & \int_0^{3/2} \sqrt{\vartheta^4 + 4\vartheta^2} d\vartheta = \int_0^{3/2} \vartheta\sqrt{4 + \vartheta^2} d\vartheta \\ = & \frac{61}{24}. \end{aligned}$$

4. Abbiamo che

$$l\left(\varphi, \left[0, \frac{5\pi}{6}\right]\right) = a\int_0^{\frac{5\pi}{6}} \left|\operatorname{sen}^4 \frac{\vartheta}{5}\right| d\vartheta = -\frac{5a}{64}(7\sqrt{3} - 4\pi).$$

Soluzione 1.6 Le curve che dobbiamo studiare sono rappresentate in Figura 1.2. Noi

(a) (b) (c)

Figura 1.2: Sostegni delle cicloidi con $R = 1$ e $r = 1$, $r = \frac{3}{4}$ e $r = \frac{5}{4}$ rispettivamente.

considereremo qui solo il caso $r = R$, lasciando gli altri due casi come esercizio. La curva è semplice, regolare a tratti (per $t = 2\pi$ si ha uno spigolo) non chiusa e la sua lunghezza è data da

$$\begin{aligned} l(\varphi, [0, 4\pi]) = & \int_0^{4\pi} \|\varphi'(t)\| dt = R\int_0^{4\pi} \|(1 - \cos t, \operatorname{sen} t)\| dt = R\int_0^{4\pi} \sqrt{2 - 2\cos t} dt \\ = & 2R\sqrt{2}\int_0^{4\pi} \left|\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right| dt = 16R\sqrt{2} \end{aligned}$$

Soluzione 1.7 La funzione data è una curva in quanto le funzioni $t^2 - t$ e $2t^3 - 3t^2 + t$ che definiscono le componenti della funzione r sono continue; sono anche funzioni derivabili con derivata continua, da cui si deduce che r è di classe C^1. Per studiarne la regolarità come curva scriviamo

$$r'(t) = (2t - 1, 6t^2 - 6t + 1);$$

la prima componente di tale derivata si annulla unicamente per $t = 1/2$, ma in corrispondenza di tale valore di t la seconda componente vale $-1/2$, quindi la condizione $r'(t) \neq 0$ è sempre verificata, cioé la curva è regolare. Per dimostrare che la curva è semplice, possiamo sia disegnare il sostegno della curva e rendersi conto che la curva non è semplice. La dimostrazione analitica di questo fatto passa però per lo studio di

$$r(t_1) = r(t_2), \qquad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Se tale identità è verificata se e solo se $t_1 = t_2$, allora la curva sarà semplice, altrimenti se esistono due diversi tempi $t_1 \neq t_2$ che la verificano, allora avremo violato l'iniettività della funzione r. Si tratta quindi di studiare il sistema di equazioni

$$\begin{cases} t_1^2 - t_1 = t_2^2 - t_2 \\ 2t_1^3 - 3t_1^2 + t_1 = 2t_2^3 - 3t_2^2 + t_2. \end{cases}$$

La prima equazione è equivalente a $(t_1 - t_2)(t_1 + t_2 - 1) = 0$; una soluzione sará quindi ovviamente $t_1 = t_2$, che possiamo scartare. Consideriamo quindi il caso $t_1 + t_2 = 1$; la seconda equazione è equivalente a $(t_1 - t_2)(2(t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2) - 3(t_1 + t_2) + 1) = 0$ che ha ancora per soluzione $t_1 = t_2$ che scartiamo. Ponendo $t_1 + t_2 = 1$ si ricava quindi l'equazione

$$t_2^2 - t_2 = 0$$

che ha come soluzione $t_2 = 0$ e $t_2 = 1$, con corrispondenti valori di $t_1 = 1$ e $t_1 = 0$. Questo vuol dire che $r(0) = r(1)$, cioè la curva non è semplice.

La curva non é chiusa; la definizione di curva chiusa è stata data per curve definite su intervalli chiusi e limitati, mentre nel nostro caso $I = \mathbb{R}$. Si potrebbe estendere la definizione di curva chiusa chiamando $a = \inf I$ e $b = \sup I$ (finiti o infiniti che siano) e verificare se

$$\lim_{t \to a} r(t) = \lim_{t \to b} r(t), \tag{1.1}$$

se i due limiti sopra esistono e definiscono un elemento di $\mathbb{R}^n$ (si potrebbe dimostrare che se ciò accade, allora la curva può essere riparametrizzata su di un intervallo chiuso e limitato in modo da definire una curva chiusa). Nel nostro caso però si nota che prendendo le componenti r_2 si ha che

$$\lim_{t \to -\infty} r_2(t) = -\infty, \qquad \lim_{t \to +\infty} r_2(t) = +\infty,$$

quindi la (1.1) non vale.

La retta tangente alla curva nel punto $r(1/4)$ sará data in forma parametrica da

$$r(1/4) + tr'(1/4) = \Big(-\frac{3}{16}, \frac{3}{32} \Big) + t\Big(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8} \Big) = \Big(-\frac{3}{16} - \frac{t}{2}, \frac{3}{32} - \frac{t}{8} \Big).$$

Per scrivere tale retta in forma cartesiana, basta ricavare il parametro t dalle equazioni

$$\begin{cases} x = -\dfrac{3}{16} - \dfrac{t}{2} \\[2ex] y = \dfrac{3}{32} - \dfrac{t}{8} \end{cases}$$

per ottenere l'equazione

$$y = \frac{x}{4} + \frac{9}{64}.$$

Per la retta normale si procede in modo analogo, considerando l'equazione parametrica

$$\Big(-\frac{3}{16}, \frac{3}{32} \Big) + t\Big(\frac{1}{8}, -\frac{1}{2} \Big) = \Big(-\frac{3}{16} + \frac{t}{8}, \frac{3}{32} - \frac{t}{2} \Big)$$

che in coordinate cartesiane diventa

$$y = -4x - \frac{21}{32}.$$

Soluzione 1.8 Per calcolare il parametro d'arco o ascissa curvilinea, consideriamo

$$r'(t) = 3\sin t\cos t(-\sin t, \cos t)$$

e calacoliamo $v(t) = \|r'(t)\| = 3|\sin t| \cdot |\cos t|$. Abbiamo quindi che per $t \in [0, \pi/2]$

$$s(t) = 3\int_0^t \sin\tau\cos\tau d\tau = \frac{3}{2}\sin^2 t.$$

Se invece consideriamo $t \in [\pi/2, \pi]$, si trova che

$$\begin{aligned} s(t) =& 3\int_0^t |\sin\tau| \cdot |\cos\tau| d\tau = 3\int_0^{\pi/2} \sin\tau\cos\tau d\tau - 3\int_0^t \sin\tau\cos\tau d\tau \\ =& 3 - \frac{3}{2}\sin^2 t. \end{aligned}$$

Se vogliamo riparametrizzare la curva usando l'ascissa curvilinea, dobbiamo ricavarci t in funzione di s; nel caso in cui $t \in [0, \pi/2]$, abbiamo che $s \in [0, 3/2]$ e quindi abbiamo che

$$s = \frac{3}{2}\sin^2 t \qquad \text{se e solo se} \qquad t = \arcsin\sqrt{\frac{2s}{3}}.$$

Nel caso invece in cui $t \in [\pi/2, \pi]$, abbiamo che $s \in [3/2, 3]$; quindi non possiamo considerare direttamente la funzione arcsin in quanto t non appartiene all'intervallo di invertibilitá della funzione sin. Ma se scriviamo $\sin t = \sin(\pi - t)$, possiamo quindi ricavare che

$$s = 3 - \frac{3}{2}\sin^2 t \qquad \text{se e solo se} \qquad t = \pi - \arcsin\sqrt{2 - \frac{2s}{3}}.$$

La curva riparametrizzata diventa quindi $\varphi : [0, 3] \to \mathbb{R}^2$,

$$\varphi(s) = r(t(s)) = \begin{cases} \dfrac{1}{3\sqrt{3}}((3-2s)^{3/2}, (2s)^{3/2}) & s \in [0, 3/2] \\ \\ \dfrac{1}{3\sqrt{3}}(-(2s-3)^{3/2}, (6-2s)^{3/2}) & s \in [3/2, 3]. \end{cases}$$

Verifichiamo la condizione $\|\varphi'(s)\| = 1$; per $s \in (0, 3/2)$, abbiamo

$$\varphi'(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(-(3-2s)^{1/2}, (2s)^{1/2}) = T_\varphi(s)$$

ed è facile la verifica che tale vettore ha norma 1. Notiamo inoltre che

$$\lim_{s \to 3/2^-} \varphi'(s) = (0, 1). \tag{1.2}$$

Infine, per $s \in (3/2, s)$ otteniamo

$$\varphi'(s) = -\frac{1}{\sqrt{3}}((2s-3)^{1/2}, (6-2s)^{1/2}) = T_\varphi(s);$$

si nota quindi che

$$\lim_{s\to 3/2^+} \varphi'(s) = (0,-1). \tag{1.3}$$

Si osserva quindi che $\phi'(s)$ non può essere esteso in $s = 3/2$ in modo da ottenere una funzione continua, quindi la curva è regolare ma non regolare a tratti.

Calcoliamo infine la curvatura di φ; la calcoliamo solo per $s \in (0, 3/2)$, in quanto per gli altri valori di s la si potrà dedurre da ragionamenti di simmetria. Abbiamo che

$$\varphi''(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\frac{1}{\sqrt{3-2s}}, \frac{1}{\sqrt{2s}}\Big),$$

da cui

$$k_\varphi(s) = \|\varphi''(s)\| = \frac{1}{\sqrt{2s(3-2s)}}.$$

Si noti che la curvatura tende a $+\infty$ per $s \to 0$ e $s \to 3/2$, da cui il fatto che il raggio di curvatura tende a 0 in tali punti. Il versore normale alla curva sarà in ultimo dato da

$$N_\varphi(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2s}, \sqrt{3-2s}).$$

Per calcolare la curvatura dell'asteroide usando la parametrizzazione r (considereremo $t \in [0, \pi/2]$), utilizziamo la formula

$$r''(t) = a(t)T_r(t) + v^2(t)k_r(t)N_r(t),$$

dove $a(t) = v'(t)$ con $v(t) = \|r'(t)\|$. Abbiamo già calcolato $v(t)$ che per $t \in [0, \pi/2]$ vale $3 \sin t \cos t$; derivando la quantità $r'(t) = 3 \sin t \cos t(-\sin t, \cos t)$ si ottiene

$$r''(t) = \underbrace{(3 - 6\sin^2 t)}_{a(t)}\underbrace{(-\sin t, \cos t)}_{T_r(t)} + \underbrace{3 \sin t \cos t}_{v^2(t)k_r(t)}\underbrace{(-\cos t, -\sin t)}_{N_r(t)},$$

da cui il fatto che,

$$k_r(t) = \frac{1}{3 \sin t \cos t}.$$

Si noti infine che ponendo $t = \arcsin\sqrt{\frac{2s}{3}}$, si ottiene che $k_r(t) = k_\varphi(s)$.

Soluzione 1.9 La curva che in coordinate polari è definita da $\varrho(\vartheta) = \vartheta$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$ definisce una curva $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$$r(\vartheta) = (\vartheta \cos \vartheta, \vartheta \sin \vartheta).$$

Tale curva è di classe C^1, non chiusa e semplice; queste ultime due proprietà si possono ricavare dal fatto che $\vartheta \mapsto \|r(\vartheta)\|$ è una funzione strettamente monotona crescente. Per la regolarità, consideriamo

$$r'(\vartheta) = (\cos \vartheta - \vartheta \sin \vartheta, \sin \vartheta + \vartheta \cos \vartheta),$$

da cui $\|r'(\vartheta)\| = \sqrt{1+\vartheta^2} > 0$; quindi la curva è regolare. La sua lunghezza, tenendo conto del cambio di variabili $x = \sqrt{1+\vartheta^2} - \vartheta$, sarà data da

$$\begin{aligned} l(r,[0,2\pi]) = & \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\vartheta^2} d\vartheta = \frac{1}{2} \int_{\sqrt{1+4\pi^2}-2\pi}^{1} \left(x + \frac{1-x^2}{2x} \right) \frac{x^2+1}{x^2} dx \\ = & \frac{1}{2} \log(2\pi + \sqrt{4\pi^2+1}) + \pi \sqrt{4\pi^2+1}. \end{aligned}$$

Per calcolare la curvatura, scriviamo $v(\vartheta) = \sqrt{1+\vartheta^2}$, $a(\vartheta) = v'(\vartheta) = \frac{\vartheta}{\sqrt{1+\vartheta^2}}$ e

$$T_r(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{1+\vartheta^2}} (\cos\vartheta - \vartheta \sin\vartheta, \sin\vartheta + \vartheta\cos\vartheta).$$

Ricaviamo la curvatura quindi dalla formula

$$\begin{aligned} v(\vartheta)^2 k_r(\vartheta) N_r(\vartheta) = & r''(\vartheta) - a(\vartheta) T_r(\vartheta) \\ = & \frac{\vartheta^2+2}{\sqrt{1+\vartheta^2}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+\vartheta^2}} (-\sin\vartheta - \vartheta\cos\vartheta, \cos\vartheta - \vartheta\sin\vartheta)}_{N_r(\vartheta)}, \end{aligned}$$

da cui

$$k_r(\vartheta) = \frac{\vartheta^2+2}{(1+\vartheta^2)^{3/2}}.$$

Soluzione 1.10

1. La curva data è semplice, regolare e non chiusa e la sua lunghezza è data da

$$l(\varphi,[0,2]) = \int_0^2 \|(1, t\sqrt{2}, t^2)\| dt = \int_0^2 \sqrt{1+2t+t^2} dt = \int_0^2 (1+t) dt = 4.$$

2. La curva è semplice, regolare e non chiusa e la sua lunghezza è data da

$$l(\varphi,[0,2]) = \int_0^2 \|(1, 3t, 9t^2/2)\| dt = \int_0^2 \sqrt{1+9t^2+\frac{81}{4}t^4} dt = \int_0^2 \left(\frac{9}{2} t^2 + 1 \right) dt = 14.$$

3. La curva è semplice, regolare e non chiusa e la sua lunghezza è data da

$$\begin{aligned} l(\varphi,[0,\pi/2] = & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \|(\cos t - t\mathrm{sen} t, \mathrm{sen} t + t\cos t, 1)\| dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2+t^2} dt \\ = & \frac{\pi}{8} \sqrt{8+\pi^2} + \mathrm{arcsenh} \left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

4. La curva data è semplice, regolare a tratti e non chiusa e la sua lunghezza è data da

$$l(\varphi,[-\pi/2,\pi/2]) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{10} |\mathrm{sen} t \cos t| dt = 2\sqrt{10} \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen} t \cos t dt = \sqrt{10}.$$

5. La curva che stiamo considerando può essere espressa dalla funzione $\varphi : [0,2] \to \mathbb{R}^3$ data da
$$\varphi(t) = \left(t, t^2, \frac{2}{3}t^3\right),$$
che è una curva semplice, regolare e non chiusa. Quindi si ottiene che $\varphi'(t) = (1, 2t, 2t^2)$, da cui
$$l(\varphi, [0,2]) = \int_0^2 (1 + 2t^2)dt = \frac{22}{3}.$$

6. L'ascissa curvilinea è data
$$s(t) = \int_0^t \sqrt{4e^{4\tau} + 4e^{2\tau} + 1}d\tau = e^{2t} + t - 1,$$
e quindi
$$l(\varphi, [0,1]) = s(1) = e^2.$$

7. L'ascissa curvilinea è data da
$$s(t) = \int_0^t \sqrt{16\tau^2 + 16\tau + 4}d\tau = 2t^2 + 2t,$$
da cui
$$l(\varphi, [0,1]) = s(1) = 4.$$

Indichiamo ora con φ la curva del punto 6. e con $\tilde{\varphi}$ quella del punto 7. Per calcolare l'angolo θ tra le due curve nel punto $(1,2,0)$, bisogna prima di tutto calcolare i valori di t e s per i quali $\varphi(t) = \tilde{\varphi}(s) = (1,2,0)$, e poi sfruttare la formula
$$\langle \varphi'(t), \tilde{\varphi}'(s) \rangle = |\varphi'(t)| \cdot |\tilde{\varphi}'(s)| \cos\theta.$$
Si trova che $t = 0$ mentre $s = 1$, da cui
$$\cos\theta = 1,$$
cioè $\theta = 0$; questo si può ricavare direttamente osservando che $\tilde{\varphi}'(1) = 2\varphi'(0)$, cioè i due vettori sono paralleli e con lo stesso verso.

Per quanto riguarda l'ultimo punto dell'esercizio, serve dare la nozione di terna intrinseca. Con essa si intende un sistema di riferimento ortonormale individuato dalla curva stessa e denominato anche *Terna di Frenet.* Il primo elemento di tale base è individuato dal versore tangente; il secondo è individuato dalla derivata rispetto all'ascissa curvilinea del versore tangente; infatti, si nota che il vettore $\frac{d}{ds}T_\varphi(s)$ è ortogonale a $T_\varphi(s)$. Il modulo di tale derivata è la curvatura della curva, mentre il suo versore indica il secondo versore della base intrineca, cioè si ha
$$\frac{d}{ds}T_\varphi(s) = k(s)N_\varphi(s)$$
con $k(s)$ curvatura della curva. La terna intrinseca viene quindi completata da un terzo versore $B_\varphi(s)$, detto anche binormale alla curva, in modo tale che T_φ, N_φ e B_φ sia un sistema ortonormale sinistrorso, cioè $B_\varphi = T_\varphi \wedge N_\varphi$, con $\wedge$ prodotto vettoriale.

Tornando all'esercizio, calcoliamo la terna intrinseca solo per la curva del punto 6., lasciando il punto 7. come esercizio; abbiamo calcolato l'ascissa curvilinea $s(t) = e^{2t} + t - 1$. Per calcolare la terna intrinseca, riparametrizziamo la curva per lunghezza d'arco, consideriamo cioè la curva $\psi : [0, e^2] \to \mathbb{R}^3$, $\psi(s) = \psi(s(t)) = \varphi(t)$. Il versore tangente sarà dato da

$$T_\varphi(t) = T_\psi(s(t)) = \frac{d}{ds}\psi(s) = \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|} = \frac{1}{2e^{2t}+1}(2e^{2t}, 2e^t, 1)$$

mentre

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}T_\psi(s) =& \frac{1}{s'(t)}\frac{d}{dt}T_\varphi(s(t))\\ =& \frac{1}{2e^{2t}+1}\frac{d}{dt}\left(\frac{2e^{2t}}{2e^{2t}+1}, \frac{2e^t}{2e^{2t}+1}, \frac{1}{2e^{2t}+1}\right)\\ =& \frac{1}{(2e^{2t}+1)^3}(4e^{2t}, 2e^t - 4e^{3t}, -4e^{2t}).\end{aligned}$$

La curvatura è quindi data da

$$k_\varphi(t) = \frac{2e^t}{(2e^{2t}+1)^2}$$

mentre

$$N_\varphi(t) = \frac{1}{(2e^{2t}+1)}(2e^t, 1 - 2e^{2t}, -2e^t).$$

La terna intrinseca viene completata dalla binormale

$$B_\varphi(t) = T_\varphi(t) \wedge N_\varphi(t) = \frac{1}{(2e^{2t}+1)^2}(-3e^{2t} - 1, 4e^{3t} + 2e^t, -2e^{4t} - 2e^{2t}).$$

Soluzione 1.11 Calcoliamo l'ascissa curvilinea:

$$s(t) = \int_0^t \|\varphi'(\tau)\| d\tau = 2e^t - 2.$$

Quindi per poter riscrivere la curva in funzione di s, bisogna ricavarsi t e sostituire, cioè

$$\varphi(s) = \frac{s+2}{2}\left(\cos\ln\left(\frac{s+2}{2}\right), \sin\ln\left(\frac{s+2}{2}\right), \sqrt{2}\right).$$

Provare a verificare che $|\varphi'(s)| = 1$; per calcolare la terna intrinseca, il versore tangente è dato dalla velocità della curva normalizzata in modo da avere norma 1, cioè

$$T_\varphi(t) = \frac{1}{2}(\cos t - \sin t, \cos t + \sin t, \sqrt{2})$$

se si utilizza la parametrizzazione in t, mentre se si passa alla variabile s e quindi alla riparametrizzazione dell curva $\psi(s) = \psi(s(t)) = \varphi(t)$, si ha

$$T_\psi(s) = \frac{1}{2}\left(\cos\ln\left(\frac{s+2}{2}\right) - \sin\ln\left(\frac{s+2}{2}\right), \cos\ln\left(\frac{s+2}{2}\right) + \sin\ln\left(\frac{s+2}{2}\right), \sqrt{2}\right).$$

Si noti che il versore normale altro non è che

$$T_\psi(s) = \frac{d\psi(s)}{ds}$$

che, come si può facilmente notare, è parallelo alla velocità della curva ed ha norma 1; si noti infatti che

$$\frac{d\psi(s)}{ds} = \frac{d\varphi(t)}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|}.$$

Per quanto riguarda il versore normale, siccome $|T_\psi(s)| = 1$ per ogni s, allora se si calcola la derivata, non cambiando il modulo, si ottiene sempre e solo la variazione del verso di tale vettore, e tale variazione è ortogonale a T_ψ stesso. Quindi ha senso definire il versore normale come tale derivata, normalizzata in modo da avere norma 1. Quindi, in definitiva:

$$N_\psi(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\cos\ln\left(\frac{s+2}{2}\right) - \sin\ln\left(\frac{s+2}{2}\right), \cos\ln\left(\frac{s+2}{2}\right) - \sin\ln\left(\frac{s+2}{2}\right), 0\right).$$

La binormale B_ψ è semplicemente il versore normale ad entrambi i versori precedenti ed in modo tale che (T_ψ, N_ψ, B_ψ) formino una terna sinistrorsa (come la terna cartesiana $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$). Quindi si trova che

$$B_\psi(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\ln\left(\frac{s+2}{2}\right) - \sin\ln\left(\frac{s+2}{2}\right), \cos\ln\left(\frac{s+2}{2}\right) + \sin\ln\left(\frac{s+2}{2}\right), 0\right).$$

Infine l'angolo con l'asse z è dato dai prodotti scalari

$$\begin{aligned} T_\psi(s)\cdot(0,0,1) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ N_\psi(s)\cdot(0,0,1) &= 0 \\ B_\psi(s)\cdot(0,0,1) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

che non dipendono da s.

Soluzione 1.12 Calcoliamo le derivate della funzione r:

$$r'(t) = (-\sin t, \cos t, 1), \qquad r''(t) = (-\cos t, -\sin t, 0).$$

Quindi $v(t) = \|r'(t)\| = \sqrt{2}$ da cui $a(t) = v'(t) = 0$. La derivata seconda si decompone quindi come

$$r''(t) = v^2(t)k_r(t)N_r(t),$$

da cui il fatto che $N_r(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)$ e

$$k_r(t) = \frac{1}{v^2(t)} = \frac{1}{2}.$$

Soluzione 1.13 Data una curva chiusa $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, una prima osservazione da fare è che se γ racchiude una regione di area massima, allora tale regione deve essere convessa (se non lo fosse, se cioè ci fosse una regione di non convessità, si potrebbe 'tappare' tale regione convessificando l'insieme, operazione che aumenterebbe l'area della regione senza aumentare il diametro dell'insieme). Quindi, se la regione è convessa, ogni punto della curva vede ogni altro punto della curva stessa; possiamo quindi porre un sistema di coordinate centrate in un punto O della curva stessa in cui l'asse y è tangente alla curva e l'asse x è perpendicolare alla curva, diretto verso l'interno della curva. Scrivendo quindi la curva in coordinate polari centrate in tale punto O, otterremmo

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\theta \\ \\ y = \varrho\sin\theta \end{cases}$$

con $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ e a θ fissato, il raggio ϱ varia tra 0 e un certo raggio $\varrho(\theta)$. Otteniamo quindi per l'area il seguente risultato

$$A(\gamma) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\varrho(\theta)} \varrho d\varrho d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\varrho(\theta)^2}{2} d\theta.$$

A questo punto notiamo che possiamo restringere l'integrale a $\theta \in [0, \pi/2]$, se oltre a $\varrho(\theta)^2$ consideriamo anche $\varrho(\theta - \pi/2)^2$, e notare infine che $\varrho(\theta)$ e $\varrho(\theta - \pi/2)$ sono i due cateti di un triangolo rettangolo la cui ipotenusa ha estremi che stanno sulla curva, e quindi la sua lunghezza è minore del diametro dell'insieme, cioè

$$\varrho(\theta)^2 + \varrho(\theta - \pi/2) \leq (\mathrm{diam}(\gamma))^2 \leq 4.$$

In definitiva, troviamo che

$$A(\gamma) \leq \pi,$$

e quest'ultimo altro non è che l'area del cerchio di diametro 2.

Capitolo 2

Funzioni continue in più variabili

Esercizio 2.1 Studiare la continuità della funzione $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \neq |y|\} \cup \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 - y^2} & |x| \neq |y| \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Esercizio 2.2 Studiare la continuità della funzione $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \neq |y|\} \cup \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 - y^2} & |x| \neq |y| \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Esercizio 2.3 Studiare la continuità della funzione

$$f(x,y) = \frac{y^2}{x^2 + y^2};$$

in particolare, dire se la funzione può essere estesa in $(0,0)$. Si dica infine se esiste il seguente limite

$$\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x,y).$$

Esercizio 2.4 Si disegnino gli insiemi di livello della funzione dell'esercizio 2.3,

$$f(x,y) = \frac{y^2}{x^2 + y^2};$$

si determini quindi il massimo e il minimo di f sull'insieme

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 \leq 1\} = \overline{B}_1((2,0))$$

mediante lo studio degli insimi di livello.

Esercizio 2.5 Dimostrare che il limite

$$\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2+y^2}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

esiste (ed è uguale a 0) se e solo se $\alpha + \beta < 2$.

Esercizio 2.6 Disegnare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y) = \arctan \frac{x^2 - y^2 + 1}{x^2 + y^2 + 1};$$

si descrivano le proprietà topologiche di tale insieme (si dica cioè se il dominio è un insieme chiuso o aperto e se ne determino le parti interne, esterne e di frontiera).

Esercizio 2.7 Studiare la continuità della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos xy}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Esercizio 2.8 Studiare la continuità della funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} (xy)\log(xy) & x, y > 0 \\ 0 & x, y = 0. \end{cases}$$

Esercizio 2.9 Studiare la continuità della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Esercizio 2.10 Studiare la continuità della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} \right)^2 & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Esercizio 2.11 Studiare la continuità della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases} .$$

Esercizio 2.12 Studiare la continuità della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \arctan \dfrac{x}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases} .$$

Esercizio 2.13 Si determini il dominio delle seguenti funzioni:

1. $f(x,y) = \sqrt{xy + \ln x}$;
2. $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x - \ln y}$;
3. $f(x,y) = \sqrt{x-1} + \ln(y-1)$;
4. $f(x,y) = -\sqrt{xe^y - ye^x}$.

Si dica inoltre se tali funzioni sono continue sul loro dominio.

Esercizio 2.14 Determinare il dominio della funzione

$$f(x,y) = \arcsin \frac{x-y+1}{x+y-1};$$

si dica se tale insieme è chiuso o aperto e se ne determini la parte interna, esterna e di frontiera.

Esercizio 2.15 Determinare il dominio della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{y^2 - x^2} + \log(1 - x^2 - y^2);$$

si dica se tale insieme è chiuso o aperto e se ne determini la parte interna, esterna e di frontiera.

Esercizio 2.16 Determinare gli insiemi $\{f = c\}$ per le seguenti funzioni di due variabili:

1. $f(x,y) = x - y$;
2. $f(x,y) = x^2 + 2y^2$;
3. $f(x,y) = xy$;
4. $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$;
5. $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$;
6. $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$;

7. $f(x,y) = xe^{-y}$;
8. $f(x,y) = \sqrt{\frac{1}{y} - x^2}$;
9. $f(x,y) = \sqrt{xy(xy-1)}$.

Esercizio 2.17 Determinare gli insiemi $\{f = c\}$ per le seguenti funzioni di tre variabili:

1. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$;
2. $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$;
3. $f(x,y,z) = x^2 + y^2$;
4. $f(x,y,z) = \dfrac{x^2 + y^2}{z^2}$;
5. $f(x,y,z) = |x| + |y| + |z|$.

2.1 Soluzioni

Soluzione 2.1 La restrizione della funzione alle rette $y = mx$ con $m \neq \pm 1$ è data da

$$f(x, mx) = \frac{m}{1 - m^2},$$

da cui

$$\lim_{x \to 0} f(x, mx) = \frac{m}{1 - m^2},$$

cioè esistono successioni diverse di punti del piano che convergono a $(0,0)$ e su cui la funzione ha valori limite differenti, quindi f non può essere continua.

Soluzione 2.2 La restrizione di f alle rette $y = mx$, $m \neq \pm 1$ è data da

$$f(x, mx) = \frac{m^2 x}{1 - m^2}$$

ed il limite di tali restrizioni per $x \to 0$ è zero. Però se si considera la restrizione di f sulle parabole $y = x - x^2$, si ottiene

$$f(x, x - x^2) = \frac{x^3 - x^3}{2x^3 - x^4},$$

da cui

$$\lim_{x \to 0} f(x, x - x^2) = \frac{1}{2}.$$

Quindi, le due seccessioni $(1/h, m/h)_{h \in \mathbb{N}}$ e $(1/h, 1/h - 1/h^2)_{h \in \mathbb{N}}$ tendono entrambe a $(0,0)$ ma i valori di f su di esse tendono rispettivamente a 0 e $1/2$, da cui la non continuità di f.

Soluzione 2.3 La funzione è continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ in quanto quoziente di funzioni continue. Per studiare la continuità in 0, possiamo considerare le rette $y = mx$, sulle quali si trova che

$$f(x, mx) = \frac{m^2}{1 + m^2}.$$

Troviamo quindi che il limite per $x \to 0$ di tale valore dipende dal parametro m; in particolare $f(x, 0) = 0$ e $f(0, y) = 1$, quindi troviamo che il limite

$$\lim_{(x,y)\to 0} f(x, y)$$

non esiste. Quindi la funzione non potrà essere estesa con continuità su tutto $\mathbb{R}^2$.

Soluzione 2.4 Gli insiemi di livello si determinalo risolvendo le equazioni

$$\frac{y^2}{x^2 + y^2} = c;$$

si nota che si deve avere $c \geq 0$. L'equazione precedente è equivalente a

$$(1 - c)y^2 = cx^2,$$

da cui si deduce che deve essere anche $c \leq 1$; passando alla radice quadrata si trova

$$|y|\sqrt{1 - c} = |x|\sqrt{c}$$

che sono sono rette passanti per l'origine. Lungo la retta $y = 0$ si trova che la funzione, che è sempre non negativa, si annulla, quindi su tale retta si ha il minimo della funzione. Se vogliamo trovare il massimo e il minimo sull'insieme $\overline{B}_1((2, 0))$, ne deduciamo quindi che il minimo è zero e viene assunto sul segmente $y = 0$ e $1 \leq x \leq 3$. Per trovare il massimo, cerchiamo la retta (insieme di livello) che è tangente all'insieme dato, cioè cerchiamo il valore di c per cui il seguente sistema ha due sole soluzioni

$$\begin{cases} |y|\sqrt{1 - c} = |x|\sqrt{c} \\ \\ (x - 2)^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Ricavando la y dalla prima equazione e sostituendo nella seconda, si trova, per $c \neq 1$, che la soluzione si trova risolvendo la seguente equazione;

$$\frac{1}{1 - c}x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Si avrà quindi la soluzione imponendo che il discriminante di tale polinomio sia nullo, cioè

$$\frac{\Delta}{4} = 4 - \frac{3}{1 - c} = 0.$$

Tale soluzione si avrà quindi per $c = 1/4$ ed in corrispondenza di tale valore si trovano i due punti $(1, 1)$ e $(1, -1)$. In definitiva, il massimo è $1/4$ assunto nei due punti $(1, 1)$ e $(1, -1)$.

Soluzione 2.5 Se passiamo alle coordinate polari, otteniamo la funzione

$$\tilde{f}(\varrho, \vartheta) = \varrho^{\alpha+\beta-2} |\cos \vartheta|^{\alpha} |\sin \vartheta|^{\beta}.$$

Quindi, siccome $|\tilde{f}(\varrho, \vartheta)| \leq \varrho^{\alpha+\beta-2}$, otterremo che se $\alpha + \beta - 2 < 0$, allora

$$\exists \lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x, y) = 0.$$

In caso contrario, possiamo considerare i due casi $y = 0$ e $y = x$ in modo da trovare che

$$f(x, 0) = 0, \qquad f(x, x) = \frac{|x|^{\alpha+\beta-2}}{2};$$

quindi per $|x| \to +\infty$, troviamo che il limite ad infinito non può esistere per $\alpha + \beta \geq 2$.

Soluzione 2.6 La funzione arctan è definita su tutto $\mathbb{R}$, quindi la funzione data è continua non appena l'argomento dell'arcotangente è definito. Ma la funzione

$$\frac{x^2 - y^2 + 1}{x^2 + y^2 + 1}$$

è definita e continua in tutto $\mathbb{R}^2$. La funzione data è quindi definita su tutto $\mathbb{R}^2$ ed è ivi continua; avremo quindi che il dominio è sia chiuso che aperto, con parte interna coincidente con tutto $\mathbb{R}^2$, parte esterna e frontiera vuoti.

Soluzione 2.7 Nel caso in considerazione, la funzione non presenta alcun problema di continuità al di fuori del punto $(0, 0)$; inoltre, calcolando il limite lungo gli assi cartesiani e lungo una qualsiasi direzione $y = mx$, esso è sempre 0. Quindi, o riusciamo a trovare un cammino particolare che porti verso lo zero e lungo il quale la funzione non tende a 0, oppure riusciamo a dimostrare veramente che il limite è 0. Un metodo che può essere utile per dimostrare la continuità in un dato punto è utilizzare le coordinate polari; o meglio, le coordinate polari centrate nel punto limite. In dettaglio, se dobbiamo verificare che

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L, \tag{2.1}$$

quello che si richiede nel limite è di verficare che il valore di f tenda al numero (o al vettore nel caso vattoriale) L quando la distanza di (x, y) da (x_0, y_0) tende a zero. Quindi possiamo scrivere le coordinate polari centrate in (x_0, y_0) valide per ogni punto (x, y) in un intorno di (x_0, y_0), come segue:

$$x = x_0 + \varrho \cos \theta$$
$$y = y_0 + \varrho \sin \theta$$

con $\theta \in [0, 2\pi)$ e $\varrho > 0$. Dunque, quando si fa il limite per $(x, y) \to (x_0, y_0)$, si sta richiedendo che $\varrho \to 0$. In definitiva, se riusciamo a trovare una funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in 0 tale che $g(\varrho) \to 0$ per $\varrho \to 0$ e

$$|f(x, y) - L| \leq g(\varrho)$$

per ϱ sufficientemente piccolo, allora siamo riusciti a dimostrare che il limite in (2.1) è verificato. Nel nostro caso $(x_0, y_0) = (0, 0)$; inoltre se (x, y) si trova in un intorno di $(0, 0)$, allora il valore di xy è prossimo allo zero e possiamo usare quindi lo sviluppo di Taylor per la funzione coseno e ottenere che

$$\frac{1-\cos(xy)}{x^2+y^2} = \frac{x^2y^2+o(x^2y^2)}{2(x^2+y^2)}.$$

Quindi, passando alle coordinate polari otteniamo la quantità

$$\frac{\varrho^4\cos^2\theta\sin^2\theta+o(\varrho^4)}{2\varrho^2}$$

che si può stimare con

$$\left|\frac{\varrho^4\cos^2\theta\sin^2\theta+o(\varrho^4)}{2\varrho^2}\right| \leq \frac{\varrho^2}{2}+o(\varrho^2)=g(\varrho).$$

Quindi il limite (2.1) risulta verificato e la funzione è continua.

Soluzione 2.8 Nel presente esercizio, la continuità della funzione va verificata non solo nel punto $(0,0)$, ma anche in tutti i punti della forma $(x_0,0)$ con $x_0>0$ e $(0,y_0)$ con $y_0>0$. In questo caso conviene cercare di sfruttare la forma della funzione data; la funzione è infatti di due variabili ma dipende solo dal prodotto $t=xy$; in tutti i casi in cui va verificata la continuità, si ha che $t\to 0$. Ricadiamo quindi sempre nel limite

$$\lim_{t\to 0} t\ln t = 0.$$

Più rigorosamente, se passiamo alle coordinate polari $x=\varrho\cos\theta, y=\varrho\sin\theta$, abbiamo che

$$|xy\ln xy| \leq -\varrho^2\ln\varrho^2$$

(per $\varrho\to 0$ si ha che $\ln\varrho<0$) da cui l'esistenza del limite pari a 0. Notiamo infine che la funzione è definita anche per $x,y<0$, purchè si abbia $xy>0$; la funzione data è quindi continua sull'insieme

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy\geq 0\},$$

con valore pari a 0 nel caso in cui $xy=0$.

Soluzione 2.9 Notiamo anzitutto che la funzione data è a simmetria radiale, cioè essa dipende solo dalla distanza del punto (x,y) dall'origine. Questo vuol dire che se riscriviamo la funzione in coordinate polari $x=\varrho\cos\theta$, $y=\varrho\sin\theta$, otteniamo che

$$f(x,y)=\tilde{f}(\varrho,\theta)=\varrho^2\sin\frac{1}{\varrho}.$$

Da questo segue immediatamente la continuità della funzione data nell'origine.

Soluzione 2.10 Si nota che la restrizione di f alle parabole $y=mx^2$ è data da

$$f(x,mx^2)=\frac{m^2}{(1+m)^2}$$

da cui la non continuità di f.

Soluzione 2.11 Le restrizioni di f alle rette $x = 0$ e $y = 0$ è data da

$$f(0, y) = 0, \qquad f(x, 0) = \frac{2}{x}$$

da cui si deduce la non continuità di f.

Soluzione 2.12 Si nota che prendendo la sezione di f lungo l'asse x si ottiene la funzione $\arctan 1/x$ e

$$-\frac{\pi}{2} = \lim_{x\to 0^-} \arctan\frac{1}{x} \neq \lim_{x\to 0^+} \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Quindi la funzione non può essere continua.

Soluzione 2.13

1. Siccome nella definizione di f compare $\ln x$, si deve anzitutto avere $x > 0$; poi, la radice è definita per $xy + \ln x \geq 0$, quindi il dominio è dato da

   $$D(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \geq -\frac{\ln x}{x}\right\}$$

   (si veda la Figura 2.1). Su tale dominio f è continua in quanto xy continua, $\ln x$ continua per $x > 0$, $xy + \ln x$ continua perché somma di funzioni continue e la composizione con la radice è una funzione continua quando l'argomento della radice è contenuto nel dominio della radice, cioè quando l'argomento è positivo.

Figura 2.1:

2. Il dominio di f è determinato dall'esistenza del logaritmo e dal non annullamento del denominatore $x - \ln y$, cioè

   $$D(f) = \left\{(x, y) \in R^2 : y > 0, y \neq e^x\right\}$$

   che è la regione del semipiano superiore a cui è stato tolto il grafico della funzione esponenziale. Su tale dominio f è continua in quanto $x^2 y$ continua, $x - \ln y$ continua e il rapporto tra funzioni continue, quando il denominatore è non nullo, è continuo.

3. Si avrà che

   $$D(f) = \left\{(x, y) \in R^2 : x \geq 1, y > 1\right\}$$

   e su tale dominio f è continua.

4. La funzione data è definita per $xe^y - ye^x \geq 0$, cioè

$$\frac{x}{e^x} \geq \frac{y}{e^y}. \tag{2.2}$$

Studiamo quindi la funzione $g(t) = te^{-t}$; tale funzione è monotona crescente per $t \leq 1$, decrescente per $t \geq 1$ (si veda il grafico 2.2). In particolare, la restrizione di g a $[0,1]$ è invertibile con inversa g^{-1}; abbiamo rappresentato in figura anche il grafico di $h(t) = g^{-1}(g_{|[1,+\infty)})$. Dividiamo quindi la determinazione del dominio di f in vari

(a) g (b) g^{-1} (c) h

Figura 2.2: Grafici delle funzioni g, g^{-1} ed h.

punti;

i) per $x \leq 1$ e $y \leq 1$, siccome g è monotona crescente, la condizione (2.2) è verificata per $y \leq x$;

ii) per $x \geq 1$, $y \geq 1$, g è monotona decrescente, quindi (2.2) è verificata per $y \geq x$;

iii) se $x \geq 1$ e $y \leq 0$ oppure $x \leq 0$, $y \geq 1$, (2.2) è sempre verificata;

iv) se $x \geq 1$ e $0 \leq y \leq 1$, (2.2) è verificata per $y \leq h(x)$;

v) infine se $0 \leq x \leq 1$, $y \geq 1$, (2.2) è verificata per $x \geq h(y)$.

In definitiva, il dominio di f è individuato dalla regione in Figura 2.3.

Figura 2.3:

Soluzione 2.14 Il dominio è determinato anzitutto dalla condizione $x + y - 1 \neq 0$ e successivamente dalle condizioni

$$-1 \leq \frac{x - y + 1}{x + y - 1} \leq 1.$$

Distinguendo i caso $y > -x+1$ e $y < -x+1$, si trova che il dominio di f è dato da

$$D(f) = (E_1 \cup E_2) \setminus \{y = -x+1\},$$

dove

$$E_1 = \{x \geq 0\} \cap \{y \geq 1\}, \qquad E_2 = \{x \leq 0\} \cap \{y \leq 1\}.$$

Gli insiemi E_1 e E_2 sono chiusi, quindi $E_1 \cup E_2$ è chiuso. A tali insiemi va però tolto il punto $(0,1)$, che è un punto di frontiera. Se ne deduce che il dominio non è né chiuso né aperto. La frontiera è data da

$$\partial D(f) = \{x = 0\} \cup \{y = 1\},$$

mentre parte interna ed esterna sono date rispettivamente da

$$D(f)^\circ = \Big(\{x > 0\} \cap \{y > 1\}\Big) \cup \Big(\{x < 0\} \cap \{y < 1\}\Big)$$

e

$$(\mathbb{R}^N \setminus D(f))^\circ = \Big(\{x > 0\} \cap \{y < 1\}\Big) \cup \Big(\{x < 0\} \cap \{y > 1\}\Big).$$

Soluzione 2.15 Il dominio è determinato dalle due condizioni

$$\begin{cases} y^2 - x^2 \geq 0 \\ 1 - x^2 - y^2 > 0, \end{cases}$$

da cui si ottiene l'insieme

$$D(f) = \{|y| \geq |x|\} \cap \{x^2 + y^2 < 1\}.$$

Tale insieme non è né aperto né chiuso, in quanto i punti $|y| = |x|$, $x^2 + y^2 < 1$ sono di frontiera ed appartengono al dominio, mentre i punti di frontiera $x^2 + y^2 = 1$, $|y| \geq |x|$ non appartengono al dominio.

Soluzione 2.16

1. L'insieme cercato è determinato dalle soluzioni dell'equazione $x - y = c$, cioè dalle rette $y = x - c$. Se ne deduce che f è costante lungo tali rette, parallele tra loro, con valore tanto maggiore quanto più tali rette si spostano verso il basso. Si noti poi che per ogni $c \in \mathbb{R}$ tali insiemi sono non vuoti.

2. Si tratta di risolvere l'equazione $x^2 + 2y^2 = c$; quindi si deve avere $c \geq 0$. Per $c = 0$ l'unica soluzione è data da $(0,0)$, mentre per $c > 0$ si ottiene

$$\frac{x^2}{c} + \frac{2y^2}{c} = 1$$

   che è l'equazione di un ellisse di semiassi $\sqrt{c}$ e $\sqrt{c/2}$; tali ellissi sono concentriche e tanto più grandi quanto più è elevato il valore di c.

3. Dobbiamo risolvere l'equazione $xy = c$; avremo quindi due rami di iperbole, quelli in Figura 2.4 (a) per $c > 0$, e quelli in Figura 2.4 (b) per $c < 0$. Per $c = 0$ si ottengono invece gli assi $x = 0$ e $y = 0$.

(a) (b)

Figura 2.4: Insiemi di livello per (a) $c > 0$ e (b) $c < 0$.

4. Si tratta di risolvere $x^2/y = c$; per $c = 0$ si ottiene l'asse $x = 0$, mentre per $c \neq 0$ otteniamo
$$y = \frac{x^2}{c}$$
che sono parabole con concavità verso l'alto se $c > 0$, verso il basso altrimenti. Tali parabole sono tanto più larghe quanto più c è grande. Si nota altresì che la funzione, che non è definita per $y = 0$, non può essere estesa con continuità in $(0, 0)$.

5. Dobbiamo risolvere l'equazione
$$\frac{x-y}{x+y} = c,$$
cioè $x(1-c) = y(1+c)$. Per $c = -1$ si ottiene l'asse $x = 0$, mentre per $c \neq -1$ le rette
$$y = \frac{1-c}{1+c}x,$$
tutte passanti per l'origine (quindi f non può essere estesa con continuità in $(0, 0)$).

6. Dobbiamo risolvere l'equazione
$$\frac{y}{x^2+y^2} = c$$
cioè $c(x^2+y^2) - y = 0$. Per $c = 0$ si ottiene l'asse $y = 0$, altrimenti possiamo riscrivere l'equazione nella forma
$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2c}\right)^2 = \frac{1}{4c^2}$$
che rappresenta una circonferenza centrata in $(0, 1/2c)$ e di raggio $1/2c$.

7. Dobbiamo risolvere l'equazione $xe^{-y} = c$, cioè $x = ce^y$. Per $c = 0$ si ottiene l'asse $x = 0$, altrimenti i grafici, nella variabile y, della funzione esponenziale (si veda Figura 2.5).

8. Dobbiamo risolvere l'equazione
$$\sqrt{\frac{1}{y} - x^2} = c \tag{2.3}$$

Figura 2.5: Livelli della funzione xe^{-y}

e quindi si deve avere $c \geq 0$; si noti poi che la radice è definita per $0 \leq y \leq \frac{1}{x^2}$. Elevando al quadrato in (2.3), si ottiene

$$y = \frac{1}{x^2 + c^2},$$

che sono gli insiemi rappresentati in Figura 2.6.

Figura 2.6: Livelli della funzione $\sqrt{\frac{1}{y} - x^2}$

9. Dobbiamo risolvere l'equazione

$$\sqrt{xy(xy-1)} = c$$

e quindi $c \geq 0$. Elevando al quadrato e ricavando xy, si ottiene

$$xy = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4c^2}}{2}$$

che sono per ogni c quattro rami di iperboli (in Figura 2.7 è rappresentato il caso $c = 2$).

Figura 2.7: Livello $c = 2$ della funzione $\sqrt{xy(xy-1)}$

Soluzione 2.17

1. Bisogna risolvere l'equazione $x^2+y^2+z^2=c$, quindi si hanno soluzioni per $c \geq 0$. Per $c=0$ la soluzione é data dal solo punto $(0,0,0)$, mentre per $c>0$ le soluzioni sono le sfere centrate nell'origine e di raggio $\sqrt{c}$; quindi gli insiemi di livello si allargano quando c cresce.

2. Bisogna risolvere l'equazione $x+2y+3z=c$, da cui si deduce che i livelli sono piani paralleli ortogonali al vettore $(1,2,3)$ e passanti per i punti $(c,0,0)$.

3. Bisogna risolvere l'equazione $x^2+y^2=c$, da cui $c \geq 0$. Per $c=0$, si trova $x=y=0$, quindi il livello 0 é l'insieme dei punti di coordinate $(0,0,z)$ cioé l'asse vertcale z. Per $c>0$, (x,y) deve appartenere alla circonferenza centrata in $(0,0)$ di raggio $\sqrt{c}$, quindi il livello c é la superficie laterale del cilindro verticale basato su tale circonferenza.

4. Bisogna risolvere l'equazione
$$\frac{x^2+y^2}{z^2}=c$$
da cui $c \geq 0$. Per $c=0$ il livello é dato da $x=y=0$, cioé l'asse verticale $(0,0,z)$, $z \neq 0$ in quanto per $z=0$ la f non é definita. Per $c>0$ si ottiene l'equazione $cz^2=x^2+y^2$, che definisce la superficie laterale del cono la cui intersezione con il piano $z=costante$ é la circonferenza di raggio $|z|\sqrt{c}$. Tali coni sono tanto piú aperti quanto piú grande é c e se ne deduce che f non puó essere estesa con continuitá in $(0,0,0)$.

5. Bisogna risolvere l'equazione $|x|+|y|+|z|=c$, da cui $c \geq 0$. Per $c=0$ si ottiene $x=y=z=0$, mentre per $c>0$ si hanno le seguenti otto possibilitá:

   - per $x,y,z \geq 0$ il piano di equazione $x+y+z=c$;
   - per $x,y \geq 0$ e $z \leq 0$ il piano di equazione $x+y-z=c$;
   - per $x \geq 0$ e $y,z \leq 0$ il piano di equazione $x-y-z=c$;
   - per $x,z \geq 0$ e $y \leq 0$ il piano di equazione $x-y+z=c$;
   - per $x,y,z \leq 0$ il piano di equazione $-x-y-z=c$;
   - per $x,y \leq 0$ e $z \geq 0$ il piano di equazione $-x-y+z=c$;
   - per $x,z \leq 0$ e $y \geq 0$il piano di equazione $-x+y-z=c$;
   - per $x \leq 0$ e $y,z \geq 0$ il piano di equazione $x+y+z=c$.

   In Figura 2.8 è riportato il livello con $c=2$.

Figura 2.8: Livello $c = 2$ della funzione $|x| + |y| + |z|$

Capitolo 3

Derivabilità e differenziabilità

Esercizio 3.1 Utilizzando le sezioni coordinate e gli insiemi di livello, disegnare qualitativamente il grafico delle seguenti funzioni sui domini indicati:

1. $f(x,y) = x$ con $E = [0,2] \times [0,3]$;
2. $f(x,y) = \text{sen}x$ con $E = [0,2\pi] \times [0,1]$;
3. $f(x,y) = y^2$ con $E = [-1,1] \times [-1,1]$;
4. $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ con $E = [-1,1] \times [-1,1]$;
5. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ con $E = \{(x,y) : x, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 4\}$;
6. $f(x,y) = 4 - x^2$ con $E = \{(x,y) : y \geq 0, x^2+y^2 \leq 4\}$;
7. $f(x,y) = |x| + |y|$ con $E = \{(x,y) : y \geq 0, x^2+y^2 \leq 4\}$;
8. $f(x,y) = 6 - x - 2y$ con $E = \{(x,y) : y \geq 0, x^2+y^2 \leq 4\}$.

Esercizio 3.2 Mediante la definizione, calolare le derivate direzionali delle seguenti funzioni:

1. $f(x,y) = x^2 - xy$;
2. $f(x,y) = (x^2 - y)e^{xy-2}$;
3. $f(x,y) = \dfrac{x}{1+x^2+y^2}$;
4. $f(x,y) = (x+1)^2 - (y-1)^2\text{sen}x$.

Esercizio 3.3 Utilizzando la definizione, calcolare le derivate parziali delle seguenti funzioni:

1. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$, $x \neq -y$;

2. $f(x,y) = (x+y^2)\ln(x-y)$, $x > y$.

Esercizio 3.4 Scrivere le derivate parziali delle seguenti funzioni e calcolarle nel punto indicato:

1. $f(x,y) = xy + x^2$, $P = (2,0)$;
2. $f(x,y) = \operatorname{sen}(x\sqrt{y})$, $P = (\pi/3, 4)$;
3. $f(x,y) = \arctan \dfrac{y}{x}$, $P = (-1,1)$;
4. $f(x,y,z) = x^3y^4z^5$, $P = (0,-1,-1)$;
5. $f(x,y,z) = \dfrac{xy}{y+z}$, $P = (1,1,1)$;
6. $f(x,y,z) = \ln(1+e^{xyz})$, $P = (2,0,-1)$.

Esercizio 3.5 Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Esercizio 3.6 Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità della funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} (xy)\log(xy) & xy > 0 \\ 0 & xy = 0. \end{cases}$$

Esercizio 3.7 Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\operatorname{sen}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Esercizio 3.8 Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = xy^2.$$

Calcolare inoltre il suo gradiente nel punto $(2,3)$ e determinare quali sono le direzioni lungo le quali le derivate direzionali della f in $(2,3)$ sono massime e minime. Scrivere infine l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(2,3)$ e determinare la retta normale a tale piano nel punto di tangenza.

Esercizio 3.9 Calcolare il gradiente delle seguenti funzioni, esplicitandone modulo e direzione:

1. potenziale elettrico

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad (x,y) \neq (0,0);$$

2. “potenziale” magnetico

$$f(x,y) = \arctan\frac{x}{y}, \qquad y \neq 0.$$

Esercizio 3.10 Data la funzione $f(x,y) = \sqrt{1-2x^2-4y^2}$:

1. determinare il dominio e discutere su di esso la continuità e la differenziabilità di f;
2. calcolare le derivate direzionali in $(0,1/4)$;
3. scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nei punti $(0,\frac{1}{4})$ e $(\frac{1}{4},\frac{1}{4\sqrt{2}})$;
4. determinare gli insiemi di livello di f e dedurne quindi massimo e minimo di f sul suo dominio;
5. fissato il livello E_c con $c = \sqrt{3}/2$, determinare la direzione ortogonale ad E_c nel punto determinato da $x_0 = 1/4$ e $y_0 > 0$.

Esercizio 3.11 Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico delle seguenti funzioni nei punti indicati:

1. $f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$, in $(1,1)$ e $(2,1)$;
2. $f(x,y) = \sqrt{1-2x^2} - 4y^2$ in $(1/2,0)$ e $(-1/4,2)$.

Esercizio 3.12 Studiare la differenziabilità in $(0,1)$ della funzione

$$f(x,y) = \sqrt[3]{x^2(y-1)} + 1.$$

si determini inoltre la derivata di f in direzione v in $(0,1)$, sia usando la definizione di derivata direzionale, che utilizzando la formula che lega le derivate direzionali al differenziale.

Esercizio 3.13 Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico della funzione

$$f(x,y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2}$$

nel punto $(1,1)$.

Esercizio 3.14 Verificare la formula di derivata della funzione composta $Dh = Df \cdot Dg$ e $DH = Dg \cdot Df$ per le funzioni $h = f \circ g$ e $H = g \circ f$, dove

$$f(x,y) = (e^x \sin y, e^x \cos y, xy), \qquad g(x,y,z) = (z(x^2+y^2), z^2).$$

Esercizio 3.15 Verificare la formula della derivata della funzione composta $f \circ g$ con le seguenti funzioni:

1. $f(x, y) = \operatorname{sen}(x^2 y)$, $g(x, y) = (xy^2, x^2 + 1/y)$;
2. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $g(x, y) = (e^{xy}, 1 + x^2 \cos y)$;
3. $f(x, y) = \arctan(y/x)$, $g(x, y) = (2x + y, 3x - y)$.

Esercizio 3.16 Verificare la formula di derivazione della funzione composta quando la funzione $f(x, y) = xy$ viene scritta in coordinate polari.

Esercizio 3.17 Determinare le rette normali al paraboloide $z = x^2 + y^2 - 1$ passanti per il punto $(0, 0, 0)$; calcolare quindi l'angolo tra tali rette e l'asse x.

Esercizio 3.18 Data la funzione $f(x, y) = y^2/x$ e l'insieme $E = \{(x, y) : 2x^2 + y^2 = 1\}$, verificare che in ogni punto di E la derivata di f nella direzione normale ad E è nulla.

Esercizio 3.19 Scrivere l'equazione del piano tangente e della retta normale al paraboloide

$$z = x^2 + y^2$$

nel punto $(-1, 2, 5)$; trovare quindi i punti del paraboloide in cui il piano tangente è parallelo al piano di equazione $z = 3x + 4y$ e scrivere in tali punti le equazioni del piano tangente e della retta normale.

3.1 Soluzioni

Soluzione 3.1

1. Le sezioni di f lungo x sono date dalla retta $z = x$, mentre la funzione è costante sulle sezioni lungo y. Gli insiemi di livello sono le rette verticali $x = c$. In definitiva, il grafico è riportato in Figura 3.1(a).
2. Le sezioni lungo x sono dalla funzione $z = \operatorname{sen} x$, mentre le sezioni lungo y sono costanti. Infine, gli insiemi di livello sono non nulli per $c \in [-1, 1]$ e sono dati dalle rette $x = \operatorname{arcsen} c + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Quindi il grafico sarà quello riportato in Figura 3.1(b).
3. Le sezioni lungo x sono costanti, quelle lungo y sono date dalla funzione $z = y^2$, mentre gli insiemi di livello sono non nulli per $c \geq 0$ e sono individuati dalle rette orizzontali $y = \pm\sqrt{c}$. Avremo quindi il grafico riportato in Figura 3.1(c).
4. Le sezioni lungo x ed y sono parabole con concavità rivolta verso il basso; i livelli sono non nulli per $c \leq 4$ e sono dati da circonferenze centrate nell'origine e di raggio $\sqrt{4 - c}$. Il grafico è riportato in Figura 3.1(d).

(a) x (b) sen$x$ (c) y^2 (d) $4-x^2-y^2$

Figura 3.1: Grafici delle funzioni x, sen$x$, y^2 e $4-x^2-y^2$.

Figura 3.2: Grafici delle sezioni di f lungo x al variare di y

5. Le sezioni lungo x e y sono descritte da funzioni i cui grafici sono simili ai grafici delle funzioni $\sqrt{1+t^2}$; con questo intendiamo che ad esempio la sezione lungo x è data da $|y|\sqrt{1+x^2/y^2}$. Tali sezioni sono riportate in Figura 3.2. Gli insiemi di livello invece sono non nulli per $c \geq 0$ e sono circonferenze centrate nell'origine e di raggio c. Il grafico della funzione è riportato in Figura 3.3(a).
6. Le sezioni lungo la x sono parabole con concavità rivolta verso il basso, mentre le sezioni lungo y sono costanti. Gli insiemi di livello sono non nulli per $c \leq 4$ e sono le dati dalle rette verticali $x = \pm\sqrt{4-c}$. Il grafico è riportato in Figura 3.3(b).
7. La sezione lungo la x è data dalla funzione $|x|$ a cui aggiungiamo $|y|$; analogo comportamento si ha lungo y. Infine i livelli sono non nulli per $c \geq 0$ e sono dati da quadrati di lato $c\sqrt{2}$ centrati nell'origine e ruotati di $\pi/4$. Il grafico è riportato in Figura 3.3(c).
8. La sezione lungo x e lungo y produce rette con inclinazione negativa; gli insiemi di livello c sono le rette $2y = 6-x-c$. Il grafico è riportato in Figura 3.3(d).

(a) $\sqrt{x^2+y^2}$ (b) $4-x^2$ (c) $|x|+|y|$ (d) $6-x-2y$

Figura 3.3: Grafici delle funzioni $\sqrt{x^2+y^2}$, $4-x^2$, $|x|+|y|$ e $6-x-2y$.

Soluzione 3.2 L'esrcizio chiede di calcolare, fissato $v \in \mathbb{R}^2$, $v = (v_1, v_2)$, il limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv_1, y+tv_2) - f(x,y)}{t}.$$

1. Abbiamo che

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{f(x+tv_1,y+tv_2)-f(x,y)}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{(x+tv_1)^2-(x+tv_1)(y+tv_2)-x^2+xy}{t}\\ &= \lim_{t\to 0} 2xv_1 - xv_1 2 + tv_1^2 - yv_1 - tv_1v_2\\ &= 2xv_1 - xv_2 - yv_1.\end{aligned}$$

2. Abbiamo che

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0}\frac{f(x+tv_1,y+tv_2)-f(x,y)}{t} =\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{((x+tv_1)^2-y-tv_2)e^{xy+txv_2+tyv_1+t^2v_1v_2-2}-(x^2-y)e^{xy-2}}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}(x^2-y)e^{xy-2}\frac{e^{txv_2+tyv_1+t^2v_1v_2}-1}{t}+\\ &\quad + (tv_1^2+2xv_1-v_2)e^{xy+txv_2+tyv_1+t^2v_1v_2-2}\\ &= (x^2-y)e^{xy-2}(xv_2+yv_1)+(2xv_1-v_2)e^{xy-2}.\end{aligned}$$

3. Si ottiene

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0}\frac{f(x+tv_1,y+tv_2)-f(x,y)}{t} =\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\frac{x+tv_1}{1+(x+tv_1)^2+(y+tv_2)^2}-\frac{x}{1+x^2+y^2}\right)\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{x^2v_1+y^2v_2-xv_1^2t-2x^2v_1-xv_2^2t-2xyv_2}{(1+(x+tv_1)^2+(y+tv_2)^2)(1+x^2+y^2)}\\ &= \frac{(x^2-2x^2)v_1+(y^2-2xy)v_2}{(1+x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

4. Otteniamo

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0}\frac{f(x+tv_1,y+tv_2)-f(x,y)}{t} =\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{(x+tv_1+1)^2-(y+tv_2-1)^2\mathrm{sen}(x+tv_1)-(x+1)^2+(y-1)^2\mathrm{sen}x}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\Big(2xv_1+2v_1-y^2\frac{\mathrm{sen}(x+tv_1)-\mathrm{sen}x}{t}+\frac{\mathrm{sen}x-\mathrm{sen}(x+tv_1)}{t}+2v_2\mathrm{sen}(x+tv_1)+\\ &\quad -2yv_2\mathrm{sen}(x+tv_1)+2y\frac{\mathrm{sen}(x+tv_1)-\mathrm{sen}x}{t}-tv_2^2\mathrm{sen}(x+tv_1)\Big)\\ &= (2x+2-y^2\cos x-\cos x+2y\cos x)v_1+(2\mathrm{sen}x-2y\mathrm{sen}x)v_2.\end{aligned}$$

Soluzione 3.3 L'esercizio chiede di calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t,y)-f(x,y)}{t},\qquad \lim_{t\to 0}\frac{f(x,y+t)-f(x,y)}{t}.$$

1. Si ottiene che

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t,y)-f(x,y)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(\frac{(x+t)y}{x+y+t}-\frac{xy}{x+y}\Big)=\lim_{t\to 0}\frac{xy+y^2-xy}{(x+y+t)(x+y)}$$
$$=\frac{y^2}{(x+y)^2},$$

mentre

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x,y+t)-f(x,y)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(\frac{x(y+t)}{x+y+t}-\frac{xy}{x+y}\Big)=\lim_{t\to 0}\frac{xy+x^2-xy}{(x+y+t)(x+y)}$$
$$=\frac{x^2}{(x+y)^2}.$$

2. Si ricava che

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t,y)-f(x,y)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{(x+t+y^2)\ln(x+t-y)-(x+y^2)\ln(x-y)}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}(x+y^2)\frac{\ln(x-y+t)-\ln(x-y)}{t}+\ln(x+t-y)$$
$$=\frac{(x+y^2)}{x-y}+\ln(x-y),$$

mentre

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x,y+t)-f(x,y)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{(x+(y+t)^2)\ln(x-y-t)-(x+y^2)\ln(x-y)}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}(x+y^2)\frac{\ln(x-y-t)-\ln(x-y)}{t}+2y\ln(x+t-y)+t\ln(x-y-t)$$
$$=-\frac{(x+y^2)}{x-y}+2y\ln(x-y).$$

Soluzione 3.4

1. Con un calcolo diretto, si ricava

$$\nabla f(x,y)=(y+2x,x),\qquad \nabla f(2,0)=(4,2).$$

2. Otteniamo

$$\nabla f(x,y)=\left(\sqrt{y}\cos(x\sqrt{y}),\frac{x}{2\sqrt{y}}\cos(x\sqrt{y})\right),\qquad \nabla f(\pi/3,4)=(-1,-\pi/24).$$

3. Si ricava

$$\nabla f(x,y)=\left(-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right),\qquad \nabla f(-1,1)=(-1/2,-1/2).$$

4. Abbiamo

$$\nabla f(x,y,z)=(3x^2y^4z^5,4x^3y^3z^5,5x^3y^4z^4),\qquad \nabla f(0,-1,-1)=(0,0,0).$$

5. Otteniamo
$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{y}{y+z}, \frac{xz}{(y+z)^2}, -\frac{xy}{(y+z)^2}\right), \qquad \nabla f(1,1,1) = (1/2, 1/4, -1/4).$$

6. Si ha
$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{yze^{xyz}}{1+e^{xyz}}, \frac{xze^{xyz}}{1+e^{xyz}}, \frac{xye^{xyz}}{1+e^{xyz}}\right), \qquad \nabla f(2,0,-1) = (0,-1,0).$$

Soluzione 3.5 Come abbiamo visto nel capito sulle funzioni continue, la funzione data è continua. Per quanto riguarda la derivabilità si ha che
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$
Per vedere se c'è la differenziabilità, dobbiamo verificare che
$$0 = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - Df(0,0)(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1-\cos hk}{(h^2+k^2)^{3/2}}.$$
Passando alle coordinate polari, otteniamo che, posto $h = \varrho\cos\theta$, $k = \varrho\sin\theta$,
$$\left|\frac{1-\cos hk}{(h^2+k^2)^{3/2}}\right| \le \frac{\varrho}{2} + o(\varrho) = g(\varrho)$$
che tende a 0 per $\varrho \to 0$. Quindi la funzione f è differenziabile in $(0,0)$. Si noti inoltre che le derivate parziali sono date da
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) =& \frac{y(x^2+y^2)\mathrm{sen}(xy) - 2x(1-\cos(xy))}{(x^2+y^2)^2} \\ =& \frac{xy^2(x^2+y^2)\frac{\mathrm{sen}(xy)}{xy} - 2x^3y^2\frac{(1-\cos(xy))}{x^2y^2}}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}$$
mentre
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) =& \frac{x(x^2+y^2)\mathrm{sen}(xy) - 2y(1-\cos(xy))}{(x^2+y^2)^2} \\ =& \frac{x^2y(x^2+y^2)\frac{\mathrm{sen}(xy)}{xy} - 2x^2y^3\frac{(1-\cos(xy))}{x^2y^2}}{(x^2+y^2)^2};\end{aligned}$$
si nota quindi che tali derivate sono continue, e quindi si poteva anche applicare direttamente il Teorema del differenziale totale.

Soluzione 3.6 La funzione data è continua per quanto visto nel capitolo sulle funzioni continue. Per quanto riguarda la derivabilità, studiamo solo il caso $x, y > 0$; abbiamo che
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0) = \lim_{x\to 0^+}(y_0 \ln xy_0) = -\infty,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) = \lim_{y\to 0^+}(x_0 \ln x_0 y) = -\infty,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Quindi la funzione non è derivabile nei punti del tipo $(x_0, 0)$ e $(0, y_0)$, mentre lo è in $(0, 0)$. Questo vuol dire che se vogliamo studiare la differenziabilità di f, possiamo sperare di averla solo in $(0, 0)$. Scrivendo la definizione di differenziabilità, si tratta di verificare che

$$\lim_{(h,k)\to 0} \frac{hk \ln hk}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Ma questo lo si può verificare ancora passando alle coordinate polari e procedendo come in precedenza. Per quanto riguarda infine la continuità delle derivate parziali, notiamo che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \ln xy + y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \ln xy + x,$$

da cui la facile verifica della continuità delle derivate parziali.

Soluzione 3.7 La funzione è continua per quanto detto nel capitolo sulle funzioni continue. Per la derivabilità, si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \left(\sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \left(\sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

Una verifica diretta mostra la non continuità delle derivate parziali nell'origine, mentre la funzione risulta differenziabile in quanto

$$\lim_{(h,k)\to 0} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - Df(0, 0)(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k)\to 0} \sqrt{h^2 + k^2} \sin \frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Si noti che questo non è in contraddizione con nessun teorema visto a lezione, in quanto il teorema del differenziale totale afferma che se le derivate parziali esistono e sono continue allora la funzione è differenziabile, ma non si può dire nulla sulla continuità delle derivate parziali nel caso in cui la funzione sia differenziabile.

Soluzione 3.8 Per quanto riguarda la continuità, derivabilità e differenziabilità di tale funzione non c'è nessun problema in quanto la funzione data altro non è che un polinomio (se non si è convinti di questo fare i conti usando le definizioni). Per quanto riguarda il gradiente della funzione in $(2, 3)$, esso è dato semplicemente da

$$\nabla f(2, 3) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(2, 3), \frac{\partial f}{\partial y}(2, 3) \right) = (9, 12).$$

Per quanto riguarda l'ultima parte dell'esercizio, calcoliamo le derivate direzionali utilizzando la definizione; quindi sia $v = (v_1, v_2)$ una direzione (cioè $v_1^2 + v_2^2 = 1$), e calcoliamo

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv_1, y+tv_2) - f(x,y)}{t} = y^2 v_1 + 2xyv_2.$$

In particolare, nel punto $(2,3)$ otteniamo che

$$\frac{\partial f}{\partial v}(2,3) = 9v_1 + 12v_2.$$

Per vedere quale di queste direzioni la derivata direzionale è massima o minima si tratta di trovare i massimi e minimi della funzione

$$g(v_1, v_2) = 9v_1 + 12v_2$$

sotto il vincolo $v_1^2 + v_2^2 = 1$. Tale vincolo altro non è che la circonferenza di raggio 1 che può essere parametrizzata mediante l'angolo ϑ che la direzione v forma con l'asse delle ascisse. Quindi, scrivendo in coordinate polari $v_1 = \cos\vartheta$, $v_2 = \sin\vartheta$, otteniamo la funzione di una sola varaibile reale

$$h(\vartheta) = 9\cos\vartheta + 12\sin\vartheta;$$

tale funzione assume massimo per ϑ determinato dalle condizioni

$$\cos\vartheta = \frac{3}{v}\mathrm{sen}\vartheta.$$

Utilizzando anche la relazione fondamentale che lega seno e coseno $\cos^2\vartheta + \mathrm{sen}^2\vartheta = 1$, si determinano i valori

$$\cos\vartheta = \pm\frac{3}{5}, \qquad \mathrm{sen}\vartheta = \pm\frac{4}{5}.$$

Per tali valori si ha $v_1 = \cos\vartheta = \pm 3/5$, $v_2 = \sin\vartheta = \pm 4/5$. Quindi il gradiente della funzione f corrisponde al vettore con direzione la massima pendenza della derivata parziale e con modulo pari al valore massimo delle derivate parziali.

Per l'equazione dep piano tangente, usiamo la formula

$$z = f(2,3) + \nabla f(2,3)\cdot(x-2, y-3) = 9x + 12y - 36,$$

da cui il piano tangente di equazione $9x + 12y - z = 36$ che è il piano ortogonale al vettore $(9, 12, -1)$ e passante per $(2, 3, 18)$. La retta normale sarà infine parametrizzata da

$$r(t) = (2,3,18) + t(9,12,-1) = (2+9t, 3+12t, 18-t),$$

cioè la retta

$$\begin{cases} x + 9y = 164 \\ y + 12z = 219. \end{cases}$$

Soluzione 3.9 Nel primo caso, si ha

$$\nabla f(x,y) = -\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}(x,y);$$

la direzione è data da (x, y) ma il verso è opposto (quindi il gradiente è radiale), mentre il modulo è dato da

$$\|\nabla f(x,y)\| = \frac{1}{x^2+y^2}$$

che è l'inverso del quadrato della distanza dall'origine. Nel secondo caso il gradiente è dato da

$$\nabla f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}(-y,x).$$

Quindi il modulo è dato da

$$\|\nabla f(x,y)\| = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

cioè l'inverso della distanza dall'origine, mentre la direzione è ortogonale a (x, y); il campo $\nabla f(x, y)$ si dice quindi rotazionale ed ha ad esempio la proprietà che se $\varphi(t) = (r\cos t, r\mathrm{sen}t)$, $t \in [0, 2\pi]$, è la circonferenza di raggio r, allora l'integrale curvilineo di ∇f lungo φ (lavoro del campo magnetico) è dato da

$$\int_\varphi \nabla f \cdot d\vec{s} = -2\pi.$$

Soluzione 3.10

1. La funzione data è definita e continua per $1-2x^2-4y^2 \geq 0$, cioè all'interno dell'ellisse di equazione $2x^2+4y^2 = 1$ e di semi–assi $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\frac{1}{2}$. Le derivate parziali di f esistono e sono continue per $2x^2 + 4y^2 < 1$ con

$$\nabla f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-2x^2-4y^2}}(-2x,-4y);$$

la funzione è quindi differenziabile all'interno dell'ellisse $\{2x^2+4y^2 < 1\}$. Si può anche dimostrare che le derivate parziali non esistono nei punti $2x^2 + 4y^2 = 1$ e quindi in tali punti la funzione non può essere differenziabile.

2. La derivata direzionale in direzione v nel punto $(0, 1/4)$ è data da

$$\frac{\partial f}{\partial v}\left(0,\frac{1}{4}\right) = \nabla f\left(0,\frac{1}{4}\right)\cdot v = \left(0,-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\cdot v = -\frac{2v_2}{\sqrt{3}}.$$

3. L'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ è data da

$$z = f(x_0,y_0) - \frac{1}{\sqrt{1-2x_0^2-4y_0^2}}(2x_0,4y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0);$$

nel punto $(0, 1/4)$ tale equazione diventa

$$2y + \sqrt{3}z = 2,$$

cioè il piano ortogonale al vettore $(0, 2, \sqrt{3})$ e passante per il punto $(0, 1/4, 0)$. Per quanto riguarda il punto $(1/4, 1/4\sqrt{2})$ si ottiene il piano

$$x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z = 2,$$

cioè il piano passante per $(1/4, 1/4\sqrt{2}, \sqrt{3}/2)$ ed ortogonale a $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$.

4. Gli insiemi di livello sono determinati dai luoghi delle soluzioni delle equazioni

$$\sqrt{1-2x^2-4y^2}=c;$$

si deve quindi avere $c \geq 0$ ed elevando al quadrato si ricava

$$2x^2+4y^2=1-c^2,$$

e quindi $c \leq 1$; questo significa che la funzione assume solo valori tra 0 e 1. Per $c=1$ il livello è dato dal punto $(0,0)$, mentre per $0 \leq c < 1$ il livello è dato dall'ellisse centrata nell'origine e di semi–assi $\frac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{2}}$ e $\frac{\sqrt{1-c^2}}{2}$. Se ne deduce infine che

$$\min_E f = 0, \qquad \text{assunto in tutti i punti per chi } 2x^2+4y^2=1,$$

mentre

$$\max_E f = 1, \qquad \text{assunto in } (0,0).$$

5. Per $c=\sqrt{3}/2$ l'insieme di livello è dato dall'ellisse

$$8x^2+16y^2=1$$

di semi–assi $1/2\sqrt{2}$ e $1/4$; l'ultimo punto dell'eserczio chiede la direzione ortogonale all'ellisse nel punto $(1/4, 1/4\sqrt{2})$. Siccome il gradiente della funzione è ortogonale ai suoi livelli, tale direzione (solitamente per direzione si intende un vettore di norma 1, quindi dobbiamo normalizzare il gradiente) sarà data da

$$\nu = \frac{\nabla f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)}{\|\nabla f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)\|} = -\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

Soluzione 3.11

1. Siccome

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right),$$

la continuità delle derivate parziali implica la differenziabilità di f in ogni punto e quindi l'esistenza del piano tangente. Nel punto $(1,1)$ tale piano ha equazione

$$z = f(1,1) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot (x-1, y-1),$$

cioè

$$x+y-\sqrt{3}z+1=0,$$

mentre in $(2,1)$ si avrà

$$2x+y-\sqrt{6}z+1=0.$$

2. Dato che
$$\nabla f(x,y) = \left(-\frac{2x}{\sqrt{1-2x^2}}, -8y\right),$$
le derivate sono continue per $|x| < 1/\sqrt{2}$ e quindi in tali punti f risulta differenziabile; il piano tangente esiste quindi in ogni punto con $|x| < 1/\sqrt{2}$ ed in $(1/2, 0)$ avrà equazione
$$\sqrt{2}x + z = \sqrt{2},$$
mentre in $(-1/4, 2)$
$$\sqrt{2}x - 16\sqrt{7}y - \sqrt{7}z + 2\sqrt{2} + 16\sqrt{7} = 0.$$

Soluzione 3.12 Iniziamo col calcolare le derivate parziali, dove sono definite, con le usuali regole di derivazione; otteniamo
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{y-1}{x}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x^2}{(y-1)^2}}.$$
La derivata rispetto ad x è continua per $x \neq 0$, mentre la derivata rispetto ad y è continua per $y \neq 1$. Quindi la funzione, che è definita in tutto $\mathbb{R}^2$, è sicuramente differenziabile nell'insieme
$$E = \{x \neq 0\} \cup \{y \neq 1\}.$$
Vediamo cosa succede ad esempio nei punti con $x = 0$; dobbiamo distinguere i casi $y = 1$ e $y \neq 1$. Nel primo caso otteniamo che
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,1) - f(0,1)}{h} = 0,$$
mentre nel secondo caso
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y) - f(0,y)}{h} \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h^2(y-1)}}{h} = \lim_{h\to 0} \sqrt[3]{\frac{y-1}{h}}$$
e tale limite non esiste. Ne deduciamo che per $y \neq 1$ non possiamo neanche scrivere il gradiente della funzione e quindi la funzione non sarà differenziabile.

Per il calcolo della derivata parziale rispetto ad y procediamo in modo analogo; distinguiamo anche qui i casi $x = 0$ e $x \neq 0$. Nel primo caso abbiamo
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,1+h) - f(0,1)}{h} = 0,$$
mentre nel secondo caso
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,1+h) - f(x,1)}{h} \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^2h}}{h} = \lim_{h\to 0} \sqrt[3]{\frac{x^2}{h^2}}$$
e anche questo limite non esiste. Quindi l'unico punto residuo in cui andare a verificare la differenziabilità è il punto $(0,1)$; qui abbiamo che il gradiente è nullo, quindi lo studio della differenziabilità si riduce allo studio del limite
$$\lim_{(h,k)\to 0} \frac{f(h,1+k) - f(0,1)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to 0} \frac{\sqrt[3]{h^2k}}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Si nota però che prendendo ad esempio $k = mh$, il precedente limite diventa

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{m}h}{\sqrt{1+m^2}|h|},$$

da cui la non esistenza del limite e la non differenziabilità di f in $(0,1)$.

La non differenziabilità in $(0,1)$ si deduce anche considerando la derivata direzionale di f in $(0,1)$ e direzione $v = (v_1, v_2)$;

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(hv_1, 1+hv_2) - f(0,1)}{h} = \sqrt[3]{v_1^2 v_2};$$

dato che questo risultato non è lineare in v, allora la funzione non può essere differenziabile, nonostante esistano tutte le derivate direzionali.

Soluzione 3.13 Scriviamo direttamente il gradiente della funzione;

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{y(1-x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}, \frac{x(1-y^2+x^2)}{(1+x^2+y^2)^2}, \right).$$

Quindi, dato che $\nabla f(1,1) = (\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9})$, troviamo che l'equazione del piano tangente sarà:

$$(-\nabla f(1,1), 1) \cdot (x-1, y-1, z - f(1,1)) = 0,$$

cioè il piano di equazione

$$x + y - 9z + 1 = 0.$$

Soluzione 3.14 Iniziamo col scrivere esplicitamente la funzione h;

$$\begin{aligned} h(x,y,z) =& f \circ g(x,y,z) = f(z(x^2+y^2), z^2) \\ =& (e^{z(x^2+y^2)} \sin(z^2), e^{z(x^2+y^2)} \cos(z^2), z^3(x^2+y^2)), \end{aligned}$$

da cui la matrice Jacobiana $Dh(x,y,z)$ che sarà data da

$$\begin{pmatrix} 2xze^{z(x^2+y^2)} \sin(z^2) & 2yze^{z(x^2+y^2)} \sin(z^2) & e^{z(x^2+y^2)}((x^2+y^2)\sin(z^2) + 2z\cos(z^2)) \\ 2xze^{z(x^2+y^2)} \cos(z^2) & 2yze^{z(x^2+y^2)} \cos(z^2) & e^{z(x^2+y^2)}((x^2+y^2)\cos(z^2) - 2z\sin(z^2)) \\ 2xz^3 & 2yz^3 & 3z^2(x^2+y^2) \end{pmatrix}.$$

Per verificare la formula ci calcoliamo ora le matrici di Jacobiane di f e g:

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \sin y & e^x \cos y \\ e^x \cos y & -e^x \sin y \\ y & x \end{pmatrix},$$

mentre

$$Dg(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xz & 2yz & x^2+y^2 \\ 0 & 0 & 2z \end{pmatrix}.$$

Si tratta quindi di verificare che il prodotto riga per colonna della matrice

$$Df(g(x,y,z)) \cdot Dg(x,y,z)$$

corrisponda alla matrice precedentemente trovata;

$$\begin{pmatrix} e^{z(x^2+y^2)}\sin(z^2) & e^{z(x^2+y^2)}\cos(z^2) \\ e^{z(x^2+y^2)}\cos(z^2) & -e^{z(x^2+y^2)}\sin(z^2) \\ z^2 & z(x^2+y^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2xz & 2yz & x^2+y^2 \\ 0 & 0 & 2z \end{pmatrix};$$

questa verifica è immediata.

Per verificare la seconda parte, consideriamo la funzione

$$H(x,y) = g(f(x,y)) = (xye^{2x}, x^2y^2),$$

la cui matrice Jacobiana è data da

$$DH(x,y) = \begin{pmatrix} ye^{2x}(1+2x) & xe^{2x} \\ \\ 2xy^2 & 2x^2y \end{pmatrix}.$$

La verifica si effettua qui considerando $Dg(f(x,y)) \cdot Df(x,y)$, cioè il prodotto;

$$\begin{pmatrix} 2xye^x \sin y & 2xye^x \cos y & e^{2x} \\ 0 & 0 & 2xy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^x \sin y & e^x \cos y \\ e^x \cos y & -e^x \sin y \\ y & x \end{pmatrix};$$

anche qui la verifica è immediata.

Soluzione 3.15 L'esercizio chiede di verificare la validità dell'espressione

$$\nabla(f \circ g)(x,y) = \nabla f(g(x,y)) \cdot Dg(x,y).$$

1. Abbiamo anzitutto;

$$\nabla f(x,y) = (2xy\cos(x^2y), x^2\cos(x^2y)), \qquad Dg(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ 2x & -1/y^2 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \nabla f(g(x,y)) =& \nabla f(xy^2, x^2+1/y) \cdot Dg(x,y) \\ =& \left(2xy^2\left(x^2+\frac{1}{y}\right)\cos\left((xy^2)^2\left(x^2+\frac{1}{y}\right)\right), (xy^2)^2\cos\left((xy^2)^2\left(x^2+\frac{1}{y}\right)\right)\right). \end{aligned}$$

In definitiva

$$\nabla f(g(x,y)) \cdot Dg(x,y) = \cos(x^4y^4 + x^2y^3)(4x^3y^4 + 2xy^3, 4x^4y^3 + 3x^2y^2).$$

Se invece scriviamo

$$f(g(x,y)) = f(xy^2, x^2+1/y) = \operatorname{sen}(x^4y^4 + x^2y^3),$$

si ottiene ancora

$$\nabla f(g(x,y)) = \cos(x^4y^4 + x^2y^3)(4x^3y^4 + 2xy^3, 4x^4y^3 + 3x^2y^2).$$

2. Abbiamo anzitutto;

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right), \qquad Dg(x,y) = \begin{pmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} \\ 2x\cos y & -x^2 \mathrm{sen} y \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \nabla f(g(x,y)) =& \nabla f(e^{xy}, 1 + x^2\cos y) \cdot Dg(x,y) \\ =& \frac{\left(ye^{2xy} + 2x\cos y + 2x^3\cos^2 y, xe^{2xy} - x^2\mathrm{sen} y - x^4 \mathrm{sen} y \cos y\right)}{\sqrt{e^{2xy} + (1+x^2\cos y)^2}}. \end{aligned}$$

Se invece scriviamo

$$f(g(x,y)) = f(e^{xy}, 1 + x^2\cos y) = \sqrt{e^{2xy} + (1+x^2\cos y)^2},$$

si ottiene ancora

$$\nabla f(g(x,y)) = \frac{\left(ye^{2xy} + 2x\cos y(1 + x^2\cos^2 y), xe^{2xy} - x^2\mathrm{sen} y(1 + x^2\mathrm{sen} y)\right)}{\sqrt{e^{2xy} + (1+x^2\cos y)^2}}.$$

3. Abbiamo anzitutto;

$$\nabla f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}(-y, x), \qquad Dg(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \nabla f(g(x,y)) =& \nabla f(2x+y, 3x-y) \cdot Dg(x,y) \\ =& \frac{5}{13x^2 + 2y^2 - 2xy}(-y, x). \end{aligned}$$

Se invece scriviamo

$$f(g(x,y)) = f(2x+y, 3x-y) = \arctan \frac{2x+y}{3x-y}$$

si ottiene ancora

$$\nabla f(g(x,y)) = \frac{5}{13x^2 + 2y^2 - 2xy}(-y, x).$$

Soluzione 3.16 Riscrivere la funzione data in coordinate polari significa effettuare il cambio di variabili $(x,y) = F(\varrho, \vartheta) = (\varrho\cos\vartheta, \varrho\mathrm{sen}\vartheta)$; si ottiene così la funzione

$$\tilde{f}(\varrho, \vartheta) = f(\varrho\cos\vartheta, \varrho\mathrm{sen}\vartheta) = \varrho^2\cos\vartheta\mathrm{sen}\vartheta.$$

Si ottiene quindi

$$\nabla\tilde{f}(\varrho, \vartheta) = (\varrho\mathrm{sen}2\vartheta, \varrho^2\cos 2\vartheta).$$

Utilizzando invece la formula per il gradiente della funzione composta

$$\tilde{f}(\varrho, \vartheta) = f(F(\varrho, \vartheta))$$

si ottiene invece, dato che $\nabla f(x,y) = (y, x)$

$$\begin{aligned} \nabla\tilde{f}(\varrho, \vartheta) =& \nabla f(F(\varrho, \vartheta))DF(\varrho, \vartheta) \\ =& (\varrho\mathrm{sen}\vartheta, \varrho\cos\vartheta) \cdot \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\varrho\mathrm{sen}\vartheta \\ \mathrm{sen}\vartheta & \varrho\cos\vartheta \end{pmatrix} = (\varrho\mathrm{sen}2\vartheta, \varrho^2\cos 2\vartheta) \end{aligned}$$

Soluzione 3.17 Stiamo considerando il grafico della funzione

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 1;$$

il piano tangente al suo grafico è dato dall'equazione

$$z = x_0^2 + y_0^2 - 1 + (2x_0, 2y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)$$

o equivalentemente

$$-2(x_0, y_0) \cdot (x, y) + z = x_0^2 + y_0^2 - 1 - 2x_0^2 - 2y_0^2.$$

La direzione ortogonale è quindi individuata dal vettore $(-2x_0, -2y_0, 1)$; la retta normale è parametrizzata da

$$r(t) = (x_0, y_0, x_0^2 + y_0^2) + t(-2x_0, -2y_0, 1) = ((1-2t)x_0, (1-2t)y_0, x_0^2 + y_0^2 - 1 + t).$$

Tale retta passa per l'origine al tempo t_0 per cui $r(t_0) = (0,0,0)$, determinato dalla soluzione del sistema

$$\begin{cases} (1-2t_0)x_0 = 0 \\ (1-2t_0)y_0 = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 - 1 + t_0 = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $(x_0, y_0) = (0,0)$, $t_0 = 1$ e $t_0 = 1/2$ con $x_0^2 + y_0^2 = 1/2$, cioè i punti $1/\sqrt{2}(\cos\vartheta, \mathrm{sen}\vartheta)$ della circonferenza di raggio $1/\sqrt{2}$ centrata nell'origine. Le rette cercate sono quindi date da

$$r_1(t) = (0,0,-1) + t(0,0,1), \qquad r_\vartheta(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\vartheta, \mathrm{sen}\vartheta, -1/\sqrt{2}) + t(-\sqrt{2}\cos\vartheta, -\sqrt{2}\mathrm{sen}\vartheta, 1).$$

L'angolo che tali rette formano con l'asse delle x è dato da

$$(0,0,1) \cdot (1,0,0) = 0, \qquad \frac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{2}\cos\vartheta, -\sqrt{2}\mathrm{sen}\vartheta, 1) \cdot (1,0,0) = -\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\vartheta.$$

Soluzione 3.18 Siccome E è espresso come livello zero della funzione $g(x,y) = 2x^2 + y^2 - 1$, la direzione normale uscente da E è individuata da

$$\nu = \frac{\nabla g(x,y)}{\|g(x,y)\|} = \frac{(2x,y)}{\sqrt{4x^2 + y^2}}.$$

La derivata di f in tale direzione è data da

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \nu = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + y^2}} \left(-\frac{y^2}{x^2}, \frac{2y}{x} \right) \cdot (2x, y) = 0.$$

Soluzione 3.19 Dobbiamo scrivere l'equazione del piano tangente al grafico della funzione

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

nel punto $(-1, 2)$; tale piano è dato dall'equazione

$$2x - 4y + z + 5 = 0$$

che è un piano ortogonale a $(2,-4,1)$ e passante per $(-1,2,5)$. La retta normale è quindi parametrizzata da

$$r(t) = (-1,2,5) + t(2,-4,1)$$

o in forma cartesiana

$$\begin{cases} x - 2z = -11 \\ y + 4z = 22. \end{cases}$$

Per la seconda parte dell'esercizio, il piano $z = 3x + 4y$ è ortogonale a $(3,4,-1)$. Cerchiamo quindi i punti in cui il vettore $(-\nabla f(x,y),1)$ è parallelo a tale vettore; risolviamo quindi l'equazione

$$\lambda(3,4,-1) = (-\nabla f(x,y),1) = (-2x,-2y,1).$$

Tale sistema ha soluzione $\lambda = -1$ e $(x,y) = (3/2,2)$; in tale punto il piano tangente ha equazione

$$12x + 16y - 4z + 25 = 0,$$

mentre la retta normale è parametrizzata da

$$r(t) = \left(\frac{3}{2}, 2, \frac{25}{4}\right) + t(3,4,-1).$$

Capitolo 4

Funzioni implicite e superfici

Esercizio 4.1 Dire in quali punti del piano si può applicare il Teorema della funzione implicita alla funzione
$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy;$$
in particolare, dire quali insiemi di livello di f sono curve regolari e descrivere cosa succede nei punti in cui non si può applicare il Teorema delle funzioni implicite. Si scriva infine l'equazione della retta tangente ai livelli di f in un generico punto (x_0, y_0) e si particolarizzi la formula trovata nel punto $(2, 2)$.

Esercizio 4.2 Si verifichi che le condizioni del Teorema delle funzioni implicite sono soddisfatte nel punto $(2, 1)$ per la funzione

$$f(x, y) = 3xy^2 - 2x^3y + 10.$$

Si scriva quindi il polinomio di Taylor di grado 3 della funzione $y = g(x)$ definita implicitamente in $(2, 1)$ dall'equazione $f(x, y) = 0$.

Esercizio 4.3 Dire se e dove si puó applicare il teorema delle funzioni implicite alla funzione

$$f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + 2y.$$

In particolare, si descrivano le proprietà degli insiemi di livello, scrivendo le equazioni delle rette tangente e normale in ogni punto.

Esercizio 4.4 Data la funzione $f(x, y) = xe^y - y$, mostrare che in $(0, 0)$ si può applicare il Teorema della funzione implicita; descrivere inoltre il livello $E_0 = \{f = 0\}$, almeno in un intorno di $(0, 0)$.

Esercizio 4.5 Rappresentare la curva definita implicitamente da

$$(x^2 + y^2 - 1)^2 - 12y^2 = 0.$$

Esercizio 4.6 Rappresentare nel piano la curva definita implicitamente da

$$(xy - \sqrt{5})(y^2 - x^2 - 4) = 0.$$

Esercizio 4.7 Dimostrare che l'equazione

$$x^3 + y^3 + x^2y - 3y^2 = 0$$

definisce implicitamente una curva; dimostrare che tale curva è il grafico di una funzione rispetto alla x negli intervalli $x \in (-\infty, -\sqrt{3}]$ e $x \in [\sqrt{3}, +\infty)$.

Esercizio 4.8 Applicare il Teorema della funzione implicita alla funzione

$$f(x,y) = x^2 - y^2 - 2x + 2y$$

per studiare gli insiemi di livelli di f; si consideri in particolare il livello $E_0 = \{f = 0\}$.

Esercizio 4.9 Determinare i punti a tangente orizzontale dell'insieme $x^4 + y^4 - 3x^2y = 0$.

Esercizio 4.10 Studiare, per ogni $x \in \mathbb{R}$, le proprietà della funzione $y = g(x)$ definita implicitamente da

$$2y^3 + 4x^2y - 3x^4 + x + 6y = 0.$$

Esercizio 4.11 Dimostrare che in ogni punto dell'insieme

$$E_c = \{2x^2 + y^2 = c\}$$

la derivata di $f(x,y) = y^2/x$ in direzione normale ad E_c è nulla.

Esercizio 4.12 Verificare che il luogo dei punti del piano per cui risulta

$$y \log x - x \cos y = 0$$

definisce implicitamente una curva regolare in un intorno del punto $(1, \pi/2)$: scrivere gli sviluppi di Taylor al secondo ordine della funzione $y = g(x)$ così definita.

Esercizio 4.13 Determinare i punti a tangenza orizzontale dei livelli della funzione

$$f(x,y) = 4(x^4 + x^2y^2) - 12x^3y + x^2.$$

Esercizio 4.14 Data $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$, dire in quali punti si può applicare il Teorema della funzione implicita e dedurre da questo informazioni sugli insiemi di livello di f.

Esercizio 4.15 Data $f(x,y,z) = x^2e^z+ze^y+y^2$, mostrare che vale il Teorema della funzione implicita in $(0,0,0)$ e scrivere l'equazione del piano tangente al livello $\{f = 0\}$ in tale punto.

Esercizio 4.16 Dimostrare che l'equazione

$$x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 1$$

definisce implicitamente una funzione $z = g(x, y)$. Determinare le derivate parziali di g e studiare le proprietà dell'insieme $E_1 = \{x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 1\}$ in un intorno di $(0, 0, 1)$.

Esercizio 4.17 Dimostrare che per la funzione

$$f(x, y, z) = e^z - z^2 - x^3 - y^3$$

vale il Teorema della funzione implicita; studiare inoltre le proprietà dell'insieme di livello $E_0 = \{f = 0\}$ in un intorno del punto $(1, 0, 0)$.

Esercizio 4.18 Dimostrare che la funzione $f : [0, 1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \frac{u^2}{2} \sin(2v))$$

definisce una superficie parametrizzata regolare.

Esercizio 4.19 Si dimostri che l'elicoide parametrizzato da $f : [0, 1] \times [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3$

$$f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$$

è una superficie regolare (eventualmente dire dove tale superficie non è regolare). Si tracci un disegno approssimato di tale superficie.

Esercizio 4.20 Si dimostri che la superficie ottenuta ruotando attorno all'asse z la curva

$$r(t) = (x(t), z(t)) = (t(1 + t), \sin(\pi t)), \qquad t \in [0, 1],$$

è una superficie regolare (eventualmente, dire in quali punti viene meno la regolarità) e si scriva l'equazione del piano tangente alla superficie nel punto $(\frac{5\sqrt{2}}{32}, \frac{5\sqrt{2}}{32}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

4.1 Alcuni esempi senza dimostrazioni

Presentiamo qui alcuni esempi di superfici parametrizzate; invitiamo comunque ad effettuare la verifica che tali superfici sono regolari, anche se i conti sono lunghi.

4.1.1 Proiezione stereografica della sfera

La sfera nello spazio è data da $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Si è già visto durante le lezioni di teoria che tale superficie può essere paramtrizzata mediante le coordinate polari e tale parametrizzazione è singolare nei punti appartenenti all'asse z (i due poli). Presentiamo qui una parametrizzazione con una sola singolarità, il solo polo nord; meglio di così non si potrà fare, in quanto esistono teoremi che dimostrano che la sfera non può essere parametrizzata completamente da una funzione definita in un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$.

La proiezione stereografica consiste nel fissare il polo nord $(0,0,1)$ e proiettare i punti della sfera sul piano $z=0$; con ciò intendiamo considerare il segmento che connette il punto $(0,0,1)$ con un generico punto del piano $(u,v,0)$, e su questo segmento fissare quell'unico punto, eccettuato il polo nord, che appartiene alla sfera. Stiamo quindi considerando il segmento

$$(x,y,z) = (0,0,1) + t(u,v,-1)$$

e ricaviamo t imponendo la condizione $x^2+y^2+z^2=1$. Tale t definisce quindi la parametrizzazione $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\varphi(u,v) = \frac{1}{u^2+v^2+1}(2u, 2v, u^2+v^2-1).$$

4.1.2 Nastro di Möbius

Il nastro di Möbius è un esempio di una superficie non orientabile; si ottiene prendendo un segmento di lunghezza R, il segmento con vertici in $(0,0,0)$ e $(R,0,0)$, ed effettuare una doppia rotazione, una nel piano xz ed una attorno all'asse z con velocità dimezzata. Tale parametrizzazione si ottiene considerando la funzione $\varphi : [0,R]\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$\varphi(u,v) = R(\cos v, \sin v, 0) + (u-R)\left(\cos\frac{v}{2}\cos v, \cos\frac{v}{2}\sin v, \sin\frac{v}{2}\right).$$

Si provi a scrivere il vettore

$$\hat{n}(u,v) = \frac{\varphi_u(u,v)\times\varphi_v(u,v)}{\|\varphi_u(u,v)\times\varphi_v(u,v)\|}$$

e si noti che $\hat{n}(u,0) = -\hat{n}(u,2\pi)$. Questo significa che il vettore normale, quando si effettua un giro, invece di puntare verso l'alto, punterà verso il basso, cioè la faccia superiore del nastro diventa quella inferiore. Se si effettuano due giri, cioè se $v\in[0,4\pi]$, allora si torna al punto di partenza; il nastro di Möbius è un esempio di una superficie le cui faccie possono essere percorse su ambo i lati partendo da un qualsiasi punto.

4.2 Soluzioni

Soluzione 4.1 Iniziamo col calcolare il gradiente di f;

$$\nabla f(x,y) = 3(x^2-y, y^2-x);$$

i punti in cui tale gradiente si annulla sono solo $(0,0)$ e $(1,1)$, quindi questi sono i soli due punti in cui il Teorema della funzione implicita non si applica. Per i punti che non appartengono alla parabola $y=x^2$, il teorema si potrà applicare per dedurre che i livelli sono localmente grafico rispetto alla variabile y, cioè della forma $x=g(y)$, mentre per i punti che non appartengono alla parabola $x=y^2$, il teorema si potrà applicare per dedurre che i livelli sono grafici $y=g(x)$. Per la retta tangente basterà applicare la formula

$$\nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0, y-y_0) = 0,$$

cioè in un punto generico (x_0, y_0):

$$3(x_0^2 - y_0, y_0^2 - x_0)(x - x_0, y - y_0) = 0.$$

Tale equazione nel punto $(x_0, y_0) = (2, 2)$ diventa

$$x + y = 4.$$

Soluzione 4.2 Anzitutto, $f(2, 1) = 0$, quindi $(2, 1) \in E_0 = \{f = 0\}$. Inoltre,

$$\nabla f(x, y) = (3y^2 - 6x^2 y, 6xy - 2x^3), \qquad \nabla f(2, 1) = (-21, -4).$$

Quindi il Teorema della funzione implicita si può applicare sia rispetto alla variabile x che rispetto alla variabile y. In particolare, esisterà una funzione $g : (2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ con $g(2) = 1$ e tale che $E_0 \cap (2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon) \times (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ è il grafico di g per ε opportuno. Per determinare lo sviluppo di Taylor di g di ordine 3 attorno a $x_0 = 2$ dovremo derivare tre volte l'espressione

$$0 = 3xg(x)^2 - 2x^3 g(x) + 10.$$

Otterremo le espressioni, per la derivata prima

$$0 = 3g(x)^2 + 6xg(x)g'(x) - 6x^2 g(x) - 2x^3 g'(x),$$

mentre per la derivata seconda

$$0 = 12g(x)g'(x) + 6xg'(x)^2 + 6xg(x)g''(x) - 12xg(x) - 12x^2 g'(x) - 2x^3 g''(x)$$

ed infine per la derivata terza

$$\begin{aligned} 0 =& 18g'(x)^2 + 18g(x)g''(x) + 18xg'(x)g''(x) + 6xg(x)g'''(x) - 12g(x) - 36xg'(x) + \\ & - 18x^2 g''(x) - 2x^3 g'''(x). \end{aligned}$$

Se ne deduce quindi lo sviluppo

$$g(x) = 1 - \frac{21}{4}(x - 2) + \frac{1983}{32}(x - 2)^2 - \frac{183421}{192}(x - 2)^3 + o((x - 2)^3).$$

Soluzione 4.3 Si nota che

$$\nabla f(x, y) = (2x - 2, -2y + 2),$$

che si annulla unicamente per $(x, y) = (1, 1)$. Questo implice che ogni livello c per cui $(1, 1) \notin E_c = \{f = c\}$ é localmente grafico rispetto ad una delle due variabili. Tali livelli saranno grafici rispetto ad x se $y \neq 1$, mentre saranno grafici rispetto alla y se $x \neq 1$. Siccome $f(1, 1) = 0$, ne deduciamo che i livelli E_c con $c \neq 0$ saranno (unioni) di curve regolari, mentre il livello E_0 avrà dei problemi nel punto $(1, 1)$ e sarà regolare negli altri punti. Dato che $\nabla f(x_0)$ è un vettore ortogonale agli insiemi di livello, se ne deduce che le equazioni delle rette tangenti si possono trovare utilizzando la formula

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0.$$

Così ad esempio, nel punto $(0,2)$ otterremo la retta $(-2,-2)(x, y-2)=0$, che è la retta

$$y = -x + 2.$$

Per avere una idea grafica di quello che è stato detto in questo esercizio, possiamo anche calcolare esplicitamente gli insiemi di livello; dato che

$$f(x,y) = (x-1)^2 - (y-1)^2,$$

troviamo che

$$E_0 = \{y = x\} \cup \{y = 2 - x\},$$

che sono due rette che si incontrano nel punto $(1,1)$. Sarà quindi chiaro che intorno a tale punto E_0 non può essere il grafico rispetto ad alcuna variabile.

Gli altri livelli saranno invece rami di iperbole, centrate in $(1,1)$; ogni ramo di tali iperboli è una curva regolare.

Soluzione 4.4 Iniziamo col calcolare il gradiente della funzione;

$$\nabla f(x,y) = (e^y, xe^y - 1).$$

Si nota subito che $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \neq 0$ per ogni punto (x,y), quindi si potrà sempre applicare il Teorema della funzione implicita per dire che i livelli $E_c = \{f = c\}$ sono delle curve parametrizzate da $(g(y), y)$; tale curva nel nostro caso si può scrivere esplicitamente, ricavando la variabile x dall'equazione $xe^y - y = c$, cioè

$$x = g(y) = (y + c)e^{-y}.$$

In particolare il livello E_0 è dato da

$$E_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = ye^{-y}\},$$

da cui il fatto che tale livello è globalmente il grafico di una funzione. Se si vuole vedere tale livello come grafico rispetto alla variabile x, allora si deve applicare il Teorema delle funzioni implicite richiedendo che la derivata di f rispetto ad y non si annulli; tale condizione si traduce in $xe^y - 1 \neq 0$. Quindi, eccettuati i punti contenuti nel grafico della funzione $y = -\log x$, $x > 0$, si può applicare il Teorema della funzione implicita. Si noti che i grafici di $y = -\log x$ e $x = ye^{-y}$ si toccano esattamente nel punto $(1/e, 1)$. La funzione implicita $y = h(x)$ che realizza il luogo di zeri di f altro non è che l'inversa della funzione $x = g(y)$ precedentemente trovata; questo ovviamente sotto la condizione che g sia invertibile. Ma la funzione g ha un massimo per $y = 1$, con valore $g(1) = 1/e$. In corrispondenza di tale punto si ha $g'(1) = 0$; quindi la funzione g non sarà iniettiva (si provi a tracciare il grafico di g), anche se lo è se ristretta a $y \leq 1$ o $y \geq 1$. In corrispondenza del massimo di g la funzione h avrà la derivata che tende ad infinito (il grafico di h si ottiene semplicemente ruotando il grafico di g), e quindi intorno al punto $(1/e, 1)$, E_0 non potrà essere un grafico rispetto alla variabile x.

Soluzione 4.5 Il luogo di zeri si può determinare esplicitamente risolvendo direttamente l'equazione, che è equivalente a $2\sqrt{3}|y| = |x^2 + y^2 - 1|$. L'insieme delle soluzioni è dato da

$$\{2\sqrt{3}y = x^2 + y^2 - 1\} \cup \{2\sqrt{3}y = 1 - x^2 - y^2\}.$$

Il primo insieme è la circonferenza di raggio 2 centrata in $(0, \sqrt{3})$, mentre il secondo insieme è la circonferenza di raggio 2 centrata in $(0, -\sqrt{3})$. Si nota quindi che nell'intersezione di queste due circonferenze, cioè nei punti $(-1, 0)$ e $(1, 0)$, l'insieme non è il grafico di una funzione, né rispetto alla x, né rispetto alla y. Inoltre, nei punti con $x = 0$, dove y può assumere i valori $2 + \sqrt{3}$, $-\sqrt{3} + 2$, $\sqrt{3} - 2$ e $-\sqrt{3} - 2$ l'insieme non è grafico rispetto alla y, così come nei punti con $y = \pm\sqrt{3}$ dove x assume i valori ± 2 l'insieme non è grafico rispetto alla y. Ritroviamo questi risultati applicando il Teorema della funzione implicita alla funzione $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2 - 12y^2$, il cui gradiente è dato da

$$\nabla f(x, y) = (4x(x^2 + y^2 - 1), 4y(x^2 + y^2 - 7)).$$

La derivata rispetto ad x si annulla per $x = 0$ e nei punti della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$; per questi valori di x si ha la condizione $f(x, y) = 0$ solo nei punti $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 2+\sqrt{3})$, $(0, 2 - \sqrt{3})$, $(0, -2 + \sqrt{3})$ e $(0, -2 - \sqrt{3})$. Quindi, eccettuati tali punti, il livello zero di f si può vedere come grafico rispetto alla variabile y. Infine, se ripetiamo lo stesso ragionamento per vedere il luogo di zeri come grafico rispetto alla variabile x, troviamo che la derivata parziale di f rispetto ad y si annulla per $y = 0$ e nei punti della circonferenza $x^2 + y^2 = 7$. In corrispenza di tali punti, la condizione $f(x, y) = 0$ viene soddisfatta nei punti $(-1, 0)$, $(1, 0)$ e nei quattro punti $(2, \sqrt{3})$, $(-2, \sqrt{3})$, $(2, -\sqrt{3})$ e $(-2, -\sqrt{3})$.

Soluzione 4.6 La curva si può descrivere esplicitamente come unione dei seguenti insiemi

$$\{xy = \sqrt{5}\} \cup \{y^2 - x^2 = 4\},$$

che sono due iperboli (in tutto quattro rami di iperboli). Si può scrivere tale luogo come grafico di funzioni rispetto alla variabile x come $y = \frac{\sqrt{5}}{x}$ oppure $y = \pm\sqrt{4 + x^2}$. Tuttavia, questi grafici si incontrano nei due punti $(-1, -\sqrt{5})$ e $(1, \sqrt{5})$, da cui il fatto che in corrispondenza di tali punti la curva non potrà essere vista come grafico di una funzione. Applichiamo ora il Teorema della funzione implicita alla funzione $f(x, y) = (xy - \sqrt{5})(y^2 - x^2 - 4)$, iniziando col calcolare il suo gradiente;

$$\nabla f(x, y) = (y(y^2 - x^2 - 4) - 2x(xy - \sqrt{5}), x(y^2 - x^2 - 4) + 2y(xy - \sqrt{5})).$$

Studiamo semplicemente la derivata rispetto alla y; analoghe conseguenze si potranno dedurre studiando la derivata rispetto alla x. Tale derivata si annulla unicamente quando

$$\begin{cases} xy = \sqrt{5} \\ y^2 - x^2 = 4, \end{cases}$$

cioè esattamente dove le iperboli si intersecano. Eccettuati tali punti, il luogo di zeri sarà sempre localmente il grafico di una funzione rispetto alla x; si noti che comunque il luogo degli zeri non è globalmente il grafico di una funzione, ma unione di più grafici.

Soluzione 4.7 Calcoliamo il gradiente di f:

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 + 2xy, 3y^2 + x^2 - 6y).$$

Quindi, la derivata rispetto alla y si annulla per $x^2 + 3(y - 1)^2 = 3$, che rappresenta l'equazione di una ellisse di semiassi $\sqrt{3}$, 1 centrata in $(0, 1)$. Quindi, se $|x| > \sqrt{3}$, sicuramente la derivata parziale rispetto ad y non si annulla, e quindi si può applicare il Teorema della funzione implicita. Si riescono a recuperare anche i valori $|x| = \sqrt{3}$, in quanto per tali valori la derivata di f rispetto ad y si annulla in corrispondenza di $y = 1$, ma i punti $(-\sqrt{3}, 1)$ e $(\sqrt{3}, 1)$ non appartengono alla curva che stiamo studiando.

Soluzione 4.8 Calcoliamo il gradiente di f:

$$\nabla f(x,y) = (2x-2, -2y+2).$$

Il gradiente è diverso da 0 sempre eccetto che per $(x,y) = (1,1)$. Quindi tutti i livelli di f saranno descritti da curve regolari, eccettuato il livello che contiene il punto $(1,1)$. In tale punto la funzione vale $f(1,1) = 0$, quindi non si può concludere che livello E_0 sia una curva regolare. In effetti, tale livello è dato dall'equazione $(x-1)^2 = (y-1)^2$, che ha come luogo di soluzioni l'insieme

$$\{y = x\} \cup \{y = -x+2\}.$$

Soluzione 4.9 I punti cercati sono i punti in cui l'insieme si può scrivere come grafico di una funzione $y = g(x)$ con $g'(x) = 0$. Dobbiamo cercare quindi tutti i punti in cui si può applicare il Teorema della funzione implicita per ottenere una funzione $y = g(x)$ e per tali punti la derivata si deve annullare; questo significa cercare i punti (x,y) per cui $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ e $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, dato che

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,g(x))}.$$

Siccome

$$\nabla f(x,y) = (4x^3 - 6xy, 4y^3 - 3x^2),$$

i punti in cui si può applicare il Teorema della funzione implicita per ottenere $y = g(x)$ come luogo di zeri sono quelli per cui $y \neq \sqrt[3]{\frac{3x^2}{4}}$.

Soluzione 4.10 Verifichiamo anzitutto che si possa applicare il Teorema della funzione implicita per ottenere una funzione $y = g(x)$; consideriamo quindi la derivata rispetto ad y della funzione $f(x,y) = 2y^3 + 4x^2 - 3x^4 + x + 6y$;

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6y^2 + 4x^2 + 6.$$

Siccome tale derivata é sempre diversa da zero, per ogni punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, possiamo caratterizzare il luogo di zeri di f localmente come grafico di una funzione. Tale funzione sarà di classe C^∞ in quanto f é un polinomio.

Possiamo ad esempio considerare il punto $(x,y) = 0$; avremo quindi che esiste una funzione $y = g(x)$, $g : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ per cui $g(0) = 0$ e

$$2g(x)^3 + 4x^2 - 3x^4 + x + 6g(x) = 0.$$

Possiamo ricavare le derivate di $g(x)$ derivando l'espressione precedente;

$$6g(x)^2 g'(x) + 8xg(x) + 4x^2 g'(x) - 12x^3 + 1 + 6g'(x) = 0.$$

Valutando l'espressione precedente per $x = 0$, si ottiene che $g'(0) = -1/6$. Derivando ancora l'espressione precedente una volta si ricava che $g''(0) = 0$, mentre un'ulteriore derivazione implica che $g'''(0) = \frac{25}{108}$. Se ne deduce la seguente apporssimazione per la funzione g:

$$g(x) = -\frac{x}{6} + \frac{73x^3}{648} + o(x^3).$$

Soluzione 4.11 Dove la funzione f è differenziabile, la derivata direzionale di f è data da

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot v.$$

La funzione è differenziabile per ogni $x \neq 0$, quindi eccettuati tali punti possiamo scrivere

$$\nabla f(x,y) = \left(-\frac{y^2}{x^2}, \frac{2y}{x}\right).$$

Gli insiemi E_c sono i livelli della funzione $g(x,y) = 2x^2 + y^2$, quindi la direzione normale a E_c è descritta dal gradiente di $g(x,y)$, Basta quindi verificare che i gradienti di f e g sono ortogonali tra loro:

$$\nabla f(x,y) \cdot \nabla g(x,y) = \left(-\frac{y^2}{x^2}, \frac{2y}{x}\right) \cdot (4x, 2y) = -\frac{4y^2}{x} + \frac{4y^2}{x} = 0.$$

Soluzione 4.12 Scriviamo il gradiente di $f(x,y) = y \log x - x \cos y$;

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{y}{x} - \cos y, \log x + x \sin y\right).$$

Si nota che se $y \log x - x \cos y = 0$, allora tale gradiente non si annulla mai. Quindi possiamo applicare il teorema della funzione implicita; possiamo scrivere localmente che $y = g(x)$ definisce il luogo degli zeri di f e dalla relazione

$$g(x) \log x - x \log g(x) = 0,$$

con $g(1) = \frac{\pi}{2}$ ricaviamo lo sviluppo di g. Otterremo che

$$g(x) = \frac{\pi}{2}\frac{\pi}{2}(x-1) - \frac{3\pi}{4}(x-1)^2 + o((x-1)^2).$$

Soluzione 4.13 I punti cercati sono i punti in cui si può applicare il Teorema delle funzioni implicite e per cui si possa scrivere $y = g(x)$ con $g'(x_0) = 0$ nel punto (x_0, y_0) in considerazione. Ciò equivale a cercare i punti in cui il gradiente è non nullo ma $\partial_x f = 0$. Si cercano quindi i punti (x,y) per cui

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x(8x^2 - 18xy + 4y^2 + 1) = 0.$$

Per $x = 0$ si nota che anche $\partial_y f =$, cioè il Teorema della funzione implicita non si applica. Restano quindi i punti delle iperboli

$$x = \frac{1}{8}\left(9y \pm \sqrt{49y^2 - 8.}\right)$$

A questi punti vanno tolti i due punti $(\pm 1/\sqrt{10}, \pm 3/2\sqrt{10})$, nei quali anche la derivata rispetto ad y di f si annulla e quindi il Teorema della funzione implicita non si applica.

Soluzione 4.14 Siccome $\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, -2z)$, si deduce che l'unico punto in cui il Teorema della funzione implicita è $(0,0,0)$. Così ad esempio nel punto $(1,0,0)$, il livello

$\{f = 1\}$ sarà localmente un grafico $x = g(y, z)$, in $(0, 1, 0)$ lo stesso livello sarà localmente un grafico $y = g(x, z)$ mentre in $(0, 0, 1)$ il livello $\{f = -1\}$ sarà localmente il grafico di una funzione $z = g(x, y)$.

In $(0, 0, 0)$ avremo infine che il livello $\{f = 0\}$ ha una singolarità; infatti tale livello è un cono con vertice proprio in $(0, 0, 0)$ e tale cono non può essere descritto come un grafico rispetto ad alcuna scelta delle variabili.

Soluzione 4.15 Si ha $\nabla f(x, y, z) = (2xe^z, ze^y + 2y, x^2e^z + e^y)$, e quindi $(0, 0, 1)$. Se ne deduce che il livello $\{f = 0\}$, a cui il punto $(0, 0, 0)$ appartiene, è localmente il grafico di una funzione $z = g(x, y)$. Per tale funzione si ha che

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)} = 0, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)} = 0.$$

Il piano tangente sarà quindi orizzontale e descritto dall'equazione $z = 0$.

Soluzione 4.16 Il gradiente della funzione è dato da

$$\nabla f(x, y, z) = (3x^2 + yz, 3y^2 + xz, 3z^2 + xy)$$

che si annulla esclusivamente in $(0, 0, 0)$. Tale punto non appartiene ad E_1, quindi tale livello è sicuramente localmente un grafico attorno ad ogni suo punto. In particolare, in $(0, 0, 1)$ il gradiente diventa $\nabla f(0, 0, 1) = (0, 0, 3)$, quindi potremo scrivere $z = g(x, y)$ e ricaviamo subito anche che $\nabla g(0, 0) = (0, 0)$. Si possono anche calcolare le derivate seconde di g, ottenendo che

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,0) = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0) = -\frac{1}{3}.$$

Da questo si deduce l'espansione

$$g(x, y) = 1 - \frac{1}{3}xy + o(\|(x, y)\|^2).$$

Soluzione 4.17 Il gradiente di f è dato da

$$\nabla f(x, y, z) = (-3x^2, -3y^2, e^z - 2z).$$

Si nota che la terza componente di tale vettore non è mai nullo; per dedurre questo basta studiare la funzione $e^z - 2z$ trovandone il minimo, per scoprire che è sempre positiva. Quindi possiamo sempre scrivere che i livelli di f sono localmente grafici $z = g(x, y)$. In particolare, in $(1, 0, 0)$, il gradiente di f diventa $\nabla f(1, 0, 0) = (-3, 0, 1)$, quindi il livello E_0 sarà localmente attorno a tale punto grafico $z = g(x, y)$ ma anche $x = g(y, z)$. Non possiamo però dire che è grafico $y = g(x, z)$. Possiamo scrivere l'equazione del piano tangente ad E_0 in $(1, 0, 0)$ che sarà data da:

$$(-3, 0, 1) \cdot (x - 1, y, z) = 0,$$

cioè

$$3x - z + 1 = 0.$$

Soluzione 4.18 Per vedere se f definisce una superficie parametrizzata regolare dobbiamo vedere se f è di classe C^1 e se il rango della matrice Jacobiana è pari a 2. Abbiamo che

$$Df(u,v) = \begin{pmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \\ u\sin(2v) & u^2\cos(2v) \end{pmatrix}.$$

Da qui si deduce che f è di classe C^1 in quanto tutte le derivate parziali sono continue. La matrice Jacobiana è nulla se $u = 0$, quindi non avremo regolarità per $u = 0$. Per $u \neq 0$ la matrice 2×2

$$\begin{pmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{pmatrix}$$

è invertibile, quindi il rango di $Df(u,v)$ è sempre 2 per $u \neq 0$, cioè f definisce una superficie parametrizzata regolare per $u \neq 0$. Possiamo anche scrivere il vettore normale alla superficie

$$\begin{aligned} f_u(u,v) \times f_v(u,v) =& (\cos v, \sin v, u\sin(2v)) \times (-u\sin v, u\cos v, u^2\cos(2v)) \\ =& (-u^2\sin v, -u^2\cos v, u). \end{aligned}$$

Soluzione 4.19 Calcoliamo la matrice Jacobiana della parametrizzazione:

$$Df(u,v) = \begin{pmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui si ricava che

$$f_u(u,v) \times f_v(u,v) = (\sin v, -\cos v, u),$$

e quindi $\|f_u \times f_v\| = \sqrt{1+u^2}$. La superficie è quindi regolare ovunque. Per avere un'idea qualitativa di tale superficie, si possono considerare le curve con u o v costante. Per u costante si ottiene un'elica cilindrica, mentre per v costante si ottiene un segmento che parte dal punto $(0,0,v)$ ed ha per direzione $(\cos v, \sin v, 0)$. La superficie risultante è un'elicoide (una scala a chiocciola). Si utilizzi Matlab per avere una rappresentazione più fedele di tale superficie.

Soluzione 4.20 La superficie che si ottiene ruotando la curva data attorno all'asse z può essere parametrizzata da $f : [0,1] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$f(t,\vartheta) = ((t+t^2)\cos\vartheta, (t+t^2)\sin\vartheta, \sin(\pi t)).$$

La matrice Jacobiana di tale parametrizzazione è data da

$$Df(t,\vartheta) = \begin{pmatrix} (1+2t)\cos\vartheta & -(t+t^2)\sin\vartheta \\ (1+2t)\sin\vartheta & (t+t^2)\cos\vartheta \\ \pi\cos(\pi t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Se ne deduce quindi che

$$f_t(t,\vartheta) \times f_\theta(t,\vartheta) = (t+t^2)(-\pi\cos\vartheta\cos(\pi t), -\pi\sin\vartheta\cos(\pi t), 1+2t),$$

da cui

$$\|f_t(t,\vartheta) \times f_\theta(t,\vartheta)\| = |t+t^2|\sqrt{\pi^2\cos(\pi t) + (1+2t)^2}.$$

La superficie è quindi regolare nel dominio in considerazione purché $t \neq 0$. Per l'equazione del piano tangente, dobbiamo prima trovare i valori di t e ϑ per cui $f(t,\vartheta) = (\frac{5\sqrt{2}}{32}, \frac{5\sqrt{2}}{32}, \frac{\sqrt{2}}{2})$; si trova che $t = 1/4$ e $\vartheta = \pi/4$ sono tali valori; il piano tangente sarà quindi dato da

$$f_t(1/4,\pi/4) \times f_\theta(1/4,\pi/4) \cdot \left(x - \frac{5\sqrt{2}}{32}, y - \frac{5\sqrt{2}}{32}, z - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0,$$

e cioè il piano di equazione

$$\pi x + \pi y - 3z + \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{16} = 0.$$

Capitolo 5

Integrali multipli

Esercizio 5.1 Dire se l'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 \leq y \leq x^2\}$$

è semplice o meno (in caso, dire rispetto a quale asse); si calcoli quindi l'area di E.

Esercizio 5.2 Integrare la funzione $f(x, y) = y(x^2 + \text{sen}x) + e^x$ sull'insieme $Q = [0, \pi] \times [0, 3]$.

Esercizio 5.3 Calcolare

$$\int_E (x^2 + y)dxdy$$

dove $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x^2, 0 \leq x \leq 2\}$.

Esercizio 5.4 Calcolare l'integrale

$$\int_E (x^2 - 3y^2)\text{sen}(xy)dxdy$$

dove $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq -3, y \leq 3, y \geq x\}$.

Esercizio 5.5 Calcolare

$$\int_E \frac{x}{x^2 + y^2}dxdy$$

dove $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, x^2/2 \leq y \leq x^2\}$.

Esercizio 5.6 Calcolare

$$\int_E xdxdy$$

dove $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x^2 + y^2 \geq 1, 0 \leq y \leq 1, x \geq 0\}$.

Esercizio 5.7 Calcolare l'integrale

$$\int_E x^3 y^5 dxdy$$

dove $E = E_1 \cup E_2$ con

$$\begin{aligned} E_1 =& \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq x^2\} \\ E_2 =& \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}. \end{aligned}$$

Esercizio 5.8 Calcolare

$$\int_E \frac{xy^2}{x^2 + y^2} dxdy$$

dove $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$.

Esercizio 5.9 Calcolare

$$\int_E \frac{\tan(x + y)}{x + y} dxdy$$

dove $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x + y \leq 1, x, y \geq 0\}$.

Esercizio 5.10 Calcolare

$$\int_E (x + y) dxdy$$

dove $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 2x, 1 \leq xy \leq 2\}$.

Esercizio 5.11 Calcolare

$$\int_E x^2 (y - x^3) e^{y + x^3} dxdy$$

dove $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 \leq y \leq 3, x \geq 1\}$.

Esercizio 5.12 Calcolare

$$\int_E \frac{3}{x^2 y^2} dxdy$$

dove $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1/x, x \leq y \leq 4x\}$.

Esercizio 5.13 Calcolare area e volume della palla centrata nell'origine e di raggio $r > 0$.

Esercizio 5.14 Determinare per quali valori del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$ risultano integrabili sulla palla centrata nell'origine e di raggio $r > 0$ le funzioni:

1. $f(x, y) = (x^2 + y^2)^\alpha$ nel piano;
2. $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^\alpha$ nello spazio.

Determinare infine il loro integrale.

Esercizio 5.15 Calcolare
$$\int_0^\infty \frac{\text{sen}x}{x} dx$$
(Suggerimento; si consideri $f(x, y) = \text{sen}x e^{-xy}$ e la si integri su $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$).

Esercizio 5.16 Calcolare l'area della regione E compresa tra le curve
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x = 0 \\ \varrho^2 = 2\cos 2\vartheta, \quad \vartheta \in [-\pi/4, \pi/4]. \end{cases}$$

Esercizio 5.17 Trovare il volume del tetraedro T di vertici $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

Esercizio 5.18 Determinare il volume dell'intersezione dei due cilindri
$$C_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}, \qquad C_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Esercizio 5.19 Data la funzione $z = f(x) = e^x$, $x \in [1, 3]$, si calcolino i volumi dei solidi di rotazione ottenuti ruotando f sia attorno all'asse x che attorno all'asse z.

Esercizio 5.20 Determinare il volume del toro di raggio R ottenuto ruotando una circonferenza di raggio r.

Esercizio 5.21 Determinare il volume del solido
$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 9(1 - \sqrt{x^2 + z^2})^2 + 4y^2 \leq 1\}.$$

Esercizio 5.22 Calcolare il volume del solido
$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 - 2 \leq z \leq 4 - x - y\}.$$

Esercizio 5.23 Disegnare il sottoinsieme del piano
$$E = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \geq \frac{1}{4}, \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\right\}.$$
Si determini tale insieme usando anche le coordinate polari e si calcoli il seguente integrale:
$$\int_E \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dxdy.$$

Esercizio 5.24 Dire se la funzione
$$f(x, y) = \frac{1}{x + y}$$
è integrabile in senso generalizzato nel triangolo di vertici $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 1)$.

Esercizio 5.25 Calcolare

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx.$$

(Suggerimento: calcolare in $\mathbb{R}^2$ l'integrale di $e^{-x^2-y^2}$).

Esercizio 5.26 Ricordiamo la seguente definizione; un insieme illimitato E si dice misurabile se esiste una successione di insiemi limitati e misurabili E_h invadenti E, cioè tali che $E_h \subset E_{h+1}$ e $E = \bigcup_h E_h$. In tal caso si porrà $|E| = \lim_h |E_h|$. Dimostrare quindi, dopo averlo disegnato, che l'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1, 0 \le z \le |\log(x^2 + y^2)|\}$$

è misurabile e se ne calcoli la misura (cioè se ne determini il volume). Si dica infine che relazione c'è tra il procedimento precedente e il calcolo dell'integrale in senso generalizzato della funzione $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ su $\{x^2 + y^2 \le 1\}$.

Esercizio 5.27 Determinare l'area dell'ellisse racchiusa dalla curva

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$$

ed il volume dell'elissoide racchiuso dalla superficie

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}.$$

Esercizio 5.28 Determinare il volume della regione interna sia alla superficie sferica

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$$

che alla superficie cilindrica

$$x^2 + (y - a)^2 = a^2.$$

Esercizio 5.29 Nell'integrale

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy$$

si scambi l'ordine di integrazione, cioè si lasci libera la variabile y e si scriva x in dipendanza da y.

Esercizio 5.30 Calcolare il volume della porzione di cono ($\alpha > 0$)

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \alpha(x^2 + y^2) \le z^2, 0 \le z \le h\right\}$$

Esercizio 5.31 Si calcoli l'integrale

$$\int_E \frac{x^2}{x^2 + z^2} dxdydz$$

dove

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 2, x^2 - y^2 + z^2 \le 0, y \ge 0\right\}.$$

Esercizio 5.32 Calcolare, se esiste, l'integrale
$$\int_E f(x,y)dxdy$$
dove
$$f(x,y) = \operatorname{sen}\frac{\pi x}{x+y}, \qquad E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \le y \le 2x,\ 0 < x+y \le 2\}.$$

Esercizio 5.33 Calcolare il seguente integrale
$$\int_{\{x^2+y^2+z^2\le 1\}} \operatorname{sen}(x+y+z)dxdydz.$$

Esercizio 5.34 Calcolare il seguente integrale
$$\int_E e^{\frac{x+y}{\sqrt{2}}} dxdydz$$
dove
$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \le 1\right\}.$$

Esercizio 5.35 Calcolare volume e baricentro dell'insieme
$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \ge 0, y \ge 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} \le 1, 0 \le z \le \sqrt{xy}\}.$$

Esercizio 5.36 Calcolare il momento di inerzia rispetto all'asse x di una lamina omogenea nello spazio descritta dall'insieme dei punti
$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, x \in [0,\pi], 0 \le y \le \operatorname{sen} x\}.$$

Esercizio 5.37 Calcolare baricentro e momento di inerzia per la rotazione attorno all'asse z del cono
$$E = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le (1-z)^2, 0 \le z \le 1\}$$
la cui densità di massa è descritta dalla funzione $f(x,y,z) = x^2+y^2+2z$.

5.1 Soluzioni

Soluzione 5.1 Dimostriamo che l'insieme dato è y-semplice; notiamo che abbiamo già la condizione $h_1(x) = x^4 \le y \le x^2 = h_2(x)$, e cioè abbiamo le due funzioni continue h_1 e h_2 che determinano le limitazioni sulla variabile y. Manca da determinare l'intervallo su cui è definita la variabile x; questo si individua imponendo la condizione $x^4 \le x^2$, altrimenti la condizione $x^4 \le y \le x^2$ ha come risultato l'insieme vuoto. Ma la condizione $x^4 \le x^2$ si verifica per $x \in [-1,1]$, e quindi troviamo che
$$E = \{-1 \le x \le 1, x^4 \le y \le x^2\}.$$
L'area di E sarà data dall'integrale della funzione 1 su E, cioè
$$\text{Area}(E) = \int_E dxdy = \int_{-1}^1 dx \int_{x^4}^{x^2} dy = 2\int_0^1 (x^2 - x^4)dx = \frac{4}{15}.$$

Soluzione 5.2 Essendo il dominio un rettangolo si può scrivere

$$\int_Q f(x,y)dxdy = \int_0^\pi \Big(\int_0^3 f(x,y)dy\Big)dx = \int_0^3 \Big(\int_0^\pi f(x,y)dx\Big)dy$$

e integrare indifferentemente prima rispetto ad una variabile e poi rispetto all'altra. Scegliamo di integrare prima rispetto alla variabile y:

$$\begin{aligned}\int_Q f(x,y)dxdy &= \int_0^\pi \Big(\int_0^3 [y(x^2+\text{sen}x)+e^x]dy\Big)dx\\ &= \int_0^\pi \Big(\frac{y^2x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\text{sen}x + ye^x\Big)\Big|_0^3 dx\\ &= \int_0^\pi \Big(\frac{9x^2}{2} + \frac{9}{2}\text{sen}x + 3e^x\Big)dx\\ &= \Big(\frac{9x^3}{6} - \frac{9}{2}\cos x + 3e^x\Big)\Big|_0^\pi\\ &= \frac{3\pi^3}{2} + 6 + 3e^\pi.\end{aligned}$$

Soluzione 5.3 L'insieme E è quello rappresentato in Figura 5.1. Scegliendo x come varia-

Figura 5.1:

bile libera si può scrivere l'integrale

$$\int_0^2 dx\Big(\int_0^{x^2}(x^2+y)dy\Big)$$

che diventa

$$\int_0^2 dx\Big(x^2y+\frac{y^2}{2}\Big)\Big|_{y=0}^{y=x^2} = \int_0^2 \frac{3}{2}x^4dx = \frac{48}{5}.$$

Scegliendo y come variabile libera l'integrale diventa (svolgerlo per esercizio)

$$\int_0^4 dy\Big(\int_{\sqrt{y}}^2 (x^2+y)dx\Big).$$

Soluzione 5.4 Il dominio di integrazione è normale rispetto ad entrambe le variabili; scrivendo

$$\int_E (x^2-3y^2)\text{sen}(xy)dxdy = \int_E x^2\text{sen}(xy)dxdy - 3\int_E y^2\text{sen}(xy)dxdy$$

conviene tenere nel primo integrale come variabile libera la x, mentre nel secondo conviene tenere come variabile libera la y; quindi

$$\begin{aligned}
\int_E (x^2-3y^2)\mathrm{sen}(xy)dxdy &= \int_{-3}^{3} x^2 \int_x^3 \mathrm{sen}(xy)dydx + \\
&\quad -3\int_{-3}^{3} y^2 \int_{-3}^{y} \mathrm{sen}(xy)dxdy \\
&= \int_{-3}^{3} (x\cos x^2 - x\cos 3x)dx + \\
&\quad -3\int_{-3}^{3} (y\cos 3y - y\cos y^2)dy = 0,
\end{aligned}$$

in quanto integrali di funzioni dispari su intervalli simmetrici rispetto all'origine.

Soluzione 5.5 Scegliendo x come variabile libera, l'integrale diventa

$$\begin{aligned}
\int_E \frac{x}{x^2+y^2}dxdy &= \int_1^2 \left(\int_{x^2/2}^{x^2} \frac{x}{x^2+y^2}dy\right)dx \\
&= \int_1^2 (\arctan x - \arctan x/2)\, dx \\
&= \left[x\,(\arctan x - \arctan x/2) + \log\left(\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right]_1^2 \\
&= 2\arctan 2 - \frac{3}{4}\pi + \arctan\frac{1}{2} + \log\frac{8}{5}\sqrt{\frac{2}{5}}.
\end{aligned}$$

Soluzione 5.6 Se scegliamo x come variabile libera dobbiamo spezzare in tre l'integrale (in tre insiemi come indicato in Figura 5.2). Conviene quindi scegliere y come variabile libera:

Figura 5.2:

$$\int_E f(x,y)dxdy = \int_0^1 \Big(\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} xdx\Big)dy$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{2}\big(4-y^2-(1-y^2)\big)dy = \frac{3}{2}.$$

Soluzione 5.7 Notiamo anzitutto che la funzione integranda è dispari rispetto ad entrambe le variabile, inoltre il dominio E_1 è simmetrico rispetto all'asse y mentre E_2 è simmetrico rispetto all'asse x, quindi

$$\int_E x^3y^5dxdy = \int_{E_1} x^3y^5dxdy + \int_{E_2} x^3y^5dxdy = 0.$$

Soluzione 5.8 L'insieme di integrazione non è normale rispetto a nessuna delle due variabili; notiamo però che se passiamo alle coordinate polari, esso diventa, nelle variabili ϱ e ϑ, il rettangolo $[1,\sqrt{2}]\times[\pi/4,5\pi/4]$. Otteniamo quindi che

$$\begin{aligned}\int_E \frac{xy^2}{x^2+y^2}dxdy &= \int_{[1,\sqrt{2}]\times[\pi/4,5\pi/4]} \frac{\varrho\cos\vartheta\,\varrho^2\mathrm{sen}^2\vartheta}{\varrho^2}\varrho d\varrho d\vartheta \\ &= \int_1^{\sqrt{2}}\int_{\pi/4}^{5\pi/4} \varrho^2\cos\vartheta\mathrm{sen}^2\vartheta d\vartheta d\varrho \\ &= \frac{\sqrt{2}-4}{18}.\end{aligned}$$

Soluzione 5.9 Notiamo che il dominio di integrazione è normale rispetto ad entrambe le variabili, però la funzione integranda $\tan t/t$ non ammette primitiva; proviamo quindi ad effettuare. Cerchiamo un cambio di variabili tale che la matrice del cambiamento di coordinate abbia determinante 1; un possibile cambio di variabili di questo tipo si può ottenere ponendo $u = x+y$, $v = x$. Nelle variabili (u,v) l'insieme E diventa

$$\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid 0 < u \le 1\,, 0 < v < u\},$$

e quindi

$$\begin{aligned}\int_E \frac{\tan(x+y)}{x+y}dxdy &= \int_0^1\left(\int_0^u \frac{\tan u}{u}dv\right)du = \int_0^1 \tan u du \\ &= -\log\cos 1.\end{aligned}$$

Soluzione 5.10 L'insieme E è quello in Figura 5.3. Si può svolgere il calcolo in coordianate cartesiane, ma è più semplice effettuare il cambio di coordinate

$$u = xy\,, \qquad v = \frac{y}{x}$$

da cui si ricava che

$$x = \sqrt{\frac{u}{v}}, \qquad y = \sqrt{uv}.$$

Figura 5.3:

Lo jacobiano di tale trasformazione è dato da $1/2v$ per cui si ottiene

$$\int_1^2 dv \int_1^2 du\Big(\sqrt{uv} + \sqrt{\frac{u}{v}}\Big)\frac{1}{2v}$$

che, svolto, dà il risultato.

Soluzione 5.11 Se effettuiamo la sostituzione $u = y - x^3$, $v = y + x^3$, notiamo che la funzione $F(x, y) = (y - x^3, y + x^3)$ è una applicazione differenziabile con

$$|\det DF(x,y)| = \left|\det\begin{pmatrix} 3x^2 & 1 \\ -3x^2 & 1 \end{pmatrix}\right| = 6x^2,$$

e quindi eccettuato i punti in cui $x = 0$, la funzione F è un diffeomorfismo. Notiamo che sull'insieme E si ha $x \geq 1$, e quindi possiamo applicare la formula di cambiamento di variabili, tenendo presente che nelle variabili (u, v) l'insieme E diventa

$$\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq u \leq 1\,, u + 4 \leq v \leq 6 - u\},$$

$$\begin{aligned}
\int_E x^2(y - x^3)e^{y+x^3}dxdy &= \frac{1}{6}\int_E |\det DF(x,y)|(y - x^3)e^{y+x^3}dxdy \\
&= \frac{1}{6}\int_0^1 \left(\int_{u+4}^{6-u} ue^v dv\right) du \\
&= -\frac{e^5 + e^4}{6}.
\end{aligned}$$

Soluzione 5.12 Passando alle coordinate polari, l'insieme E diventa

$$\{(\vartheta, \rho) \in \mathbb{R}^2 \mid \pi/4 \leq \vartheta \leq \arctan 4, \rho \geq 1/\sqrt{\cos\vartheta \mathrm{sen}\vartheta}\};$$

quindi l'integrale diventa

$$\begin{aligned}
\int_E \frac{3}{x^2y^2}dxdy &= \int_{\pi/4}^{\arctan 4} d\vartheta \int_{1/\sqrt{\mathrm{sen}\vartheta\cos\vartheta}} \frac{3}{\rho^4\cos^2\vartheta \mathrm{sen}^2\vartheta}\rho d\rho \\
&= \frac{3}{2}\int_{\pi/4}^{\arctan 4} \frac{1}{\mathrm{sen}\vartheta\cos\vartheta}d\vartheta \\
&= 3\log 2.
\end{aligned}$$

Soluzione 5.13 Iniziamo con la palla nel piano; l'insieme è dato da $\{x^2 + y^2 \leq r^2\}$; passando quindi alle coordinate polari, si ottiene che

$$\text{Area}(\overline{B}_r(0)) = \int_{\overline{B}_r(0)} dxdy = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^r \varrho d\varrho = \pi r^2.$$

Nello spazio, utlizzeremo invece le coordinate sferiche per ottenere

$$\text{Vol}(\overline{B}_r(0))dxdydz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^r \varrho^2 \text{sen}\varphi d\varrho = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Soluzione 5.14 La funzione ha per $\alpha < 0$ una singolarità nell'origine, quindi dobbiamo utilizzare la teoria degli integrali generalizzati. Possiamo considerare come insiemi invadenti gli insiemi $E_h = \overline{B}_r(0) \setminus B_{1/h}(0)$. Nel caso della prima funzione, passando alle coordinate polari otteniamo

$$\begin{aligned}\int_{E_h} (x^2 + y^2)^\alpha dxdy &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{1/h}^r \varrho^{2\alpha} \varrho d\varrho = 2\pi \int_{1/h}^r \varrho^{2\alpha+1} d\varrho \\ &= \begin{cases} \dfrac{\pi}{\alpha+1}(r^{2\alpha+2} - h^{-2\alpha-2}) & \alpha \neq -1 \\ 2\pi(\ln r + \ln h) & \alpha = -1. \end{cases}\end{aligned}$$

La funzione sarà quindi integrabile per $\alpha > -1$ e l'integrale vale

$$\int_{\overline{B}_r(0)} f(x,y)dxdy = \frac{\pi r^{2\alpha+2}}{\alpha+1}.$$

Nella dimensione tre, si passa alle coordinate sferiche e si ottiene

$$\begin{aligned}\int_{E_h} (x^2 + y^2 + z^2)^\alpha dxdydz &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\pi} d\varphi \int_{1/h}^r \varrho^{2\alpha} \varrho^2 \text{sen}\varphi d\varrho \\ &= \begin{cases} \dfrac{4\pi}{2\alpha+3}(r^{2\alpha+3} - h^{-2\alpha-3}) & \alpha \neq -\dfrac{3}{2} \\ 4\pi(\ln r + \ln h) & \alpha = -\dfrac{3}{2}. \end{cases}\end{aligned}$$

Quindi la funzione è integrabile se e solo se $\alpha > -3/2$ e

$$\int_{\overline{B}_r(0)} f(x,y,z)dxdydz = \frac{4\pi}{2\alpha+3} r^{2\alpha+3}.$$

Soluzione 5.15 Se integriamo la funzione $f(x,y) = \text{sen}x e^{-xy}$ su $[0,+\infty) \times [0,+\infty)$ prima rispetto a y otteniamo

$$\int_{[0,+\infty)\times[0,+\infty)} f(x,y)dydx = \int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}x}{x} dx,$$

mentre se integriamo prima rispetto a x si ottiene

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \text{sen}x e^{-xy} dxdy = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2} dy = \frac{\pi}{2},$$

da cui si ricava che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Soluzione 5.16 Riscrivendo la prima curva, che è una circonferenza centrata in $(1/2, 0)$ e raggio $1/2$, in coordinate polari, abbiamo che essa è descritta dall'equazione

$$\rho = \cos\vartheta, \vartheta \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Figura 5.4:

Notando a questo punto che il dominio S di cui si vuole calcolare l'area è simmetrico rispetto all'asse x (si veda la figura (5.4)), la sua area sarà data da

$$\text{Area}(S) = 2\text{Area}(S'),$$

dove S' è individuata, nelle coordinate polari, da $0 \le \vartheta \le \pi/4$. Cerchiamo anzitutto l'angolo ϑ_0 per il quale le due curve si incontrano; esso sarà individuato dalla condizione

$$\cos^2\vartheta = 2\cos 2\vartheta,$$

che ha come soluzione

$$\operatorname{sen}\vartheta_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\vartheta_0 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

L'area di S' sarà quindi data da

$$\begin{aligned}
\text{Area}(S') &= \int_{S'} dxdy = \int_{S'} \varrho d\varrho d\vartheta \\
&= \int_0^{\vartheta_0} d\vartheta \int_0^{\cos\vartheta} \varrho d\varrho + \int_{\vartheta_0}^{\pi/4} d\vartheta \int_0^{\sqrt{2\cos 2\vartheta}} \varrho d\varrho \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{8} + \frac{\pi}{16} - \frac{\vartheta_0}{4}.
\end{aligned}$$

In definitiva

$$\text{Area}(S) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8} - \frac{\vartheta_0}{2}.$$

Figura 5.5:

Soluzione 5.17 Il tetraedro è il solido delimitato dai quattro piani $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$ e rappresentato in Figura 5.5. Per calcolare il volume di un solido S (e in generale la misura n-dimensionale di un aperto in $\mathbb{R}^n$) si può calcolare l'integrale della funzione 1 sull'insieme S. Per cui valutiamo

$$\int_T dxdydz\,.$$

Scegliendo x come variabile libera si hanno le limitazioni $0 \le x \le 1$. Per x fissato ora esprimiamo gli estremi per y e z (si veda il secondo disegno in Figura 5.5). Scegliendo y si ottiene $0 \le y \le 1 - x$ e infine $0 \le z \le 1 - x - y$. Quindi

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(T) &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy(1 - x - y) \\
&= \int_0^1 dx\,(y - xy - y^2/2)\Big|_{y=0}^{y=1-x} \\
&= \int_0^1 \Big[1 - 2x + x^2 - \frac{x^2 - 2x + 1}{2}\Big] dx = \frac{1}{6}\,.
\end{aligned}$$

Soluzione 5.18 Chiamando V il solido dato dall'intersezione di C_1 e C_2 si ha

$$\int_V dx\,dy\,dz = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dz = \frac{16}{3}.$$

Soluzione 5.19 Per rotazione di f attorno all'asse x si intende ruotare l'insieme del piano dato dal sottografico di f rispetto all'asse x, operazione che determina l'insieme

$$E = \{(x, y, z) : x \in [1, 3], y^2 + z^2 \le e^{2x}\},$$

quindi il volume di E, dato che E è stratificato in direzione x e gli strati sono cerchi di raggio e^x, sarà dato da

$$\mathrm{Vol}(E) = \pi \int_2^3 e^{2x} dx = \frac{\pi(e^6 - e^2)}{2}.$$

Per quanto riguarda la rotazione attorno all'asse z, si intende l'insieme che si ottiene ruotando rispetto a z il sottografico di f, cioè l'insieme

$$E = \{(x, y, z) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq z \leq e^{\sqrt{x^2+y^2}}\},$$

quindi, dato che E è z–semplice, si ottiene che il suo volume è dato da

$$\mathrm{Vol}(E) = \int_{\{1\leq x^2+y^2\leq 9\}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = 2\pi \int_1^3 \varrho e^{\varrho} d\varrho = 4\pi e^3.$$

Soluzione 5.20 Il toro è una figura la cui superficie può essere ottenuta ruotando una circonferenza di raggio r su una circonferenza di raggio R ortogonale alla prima, $0 < r < R$ per ottenere una figura come quella a sinistra in Figura 5.6. In generale per calcolare il

Figura 5.6:

volume di un solido di rotazione, cioè un solido la cui superficie si ottiene ruotando una curva $(z, f(z))$ nel piano con $f > 0$ (si veda la Figura 5.7), si possono usare le coordinate cilindriche. Considerando $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$, e il solido ottenuto ruotando il grafico di f,

Figura 5.7:

descriviamo il solido con le coordinate

$$(\rho, \vartheta, z) \mapsto (\rho \cos \vartheta, \rho \mathrm{sen} \vartheta, z)$$

il cui jacobiano è ρ. Se denotiamo con S il solido, integrando si ha

$$\mathrm{Vol}(S) = \int_a^b dz \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{f(z)} \rho \, d\rho = \pi \int_a^b f^2(z) dz\,.$$

Per calcolare il volume del toro consideriamo quindi le funzioni $f(z) = \sqrt{r^2 - z^2} + R$ e $g(z) = -\sqrt{r^2 - z^2}$ definite tra $-r$ e r valutando prima l'integrale di f^2 al quale sottraiamo l'integrale di g^2. Si ha quindi

$$\pi \int_{-r}^{r} [f^2(z) - g^2(z)]dz = 4R\pi^2 \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - z^2}dz\,.$$

Si noti che l'integrale da calcolare fornisce l'area del semicerchio, per cui il volume del toro è dato da

$$4R\pi \frac{\pi r^2}{2} = 2\pi^2 R r^2\,.$$

Il risultato puó essere interpretato come il prodotto dell'area del cerchio piccolo πr^2 moltiplicata per la lunghezza della circonferenza grande $2\pi R$.

Soluzione 5.21 L'insieme dato è invariante per rotazioni attorno all'asse y, quindi possiamo provare a passare alle coordinate cilindriche con asse lungo l'asse y, cioè

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\vartheta \\ y = t \\ z = \varrho\mathrm{sen}\vartheta. \end{cases}$$

In queste nuove coordinate l'insieme E risulta essere determinato da

$$\left\{(\vartheta, \varrho, t) \in [0, 2\pi) \times \mathbb{R}^2 \mid -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}\,, 1 - \frac{\sqrt{1-4t^2}}{3} \leq \varrho \leq 1 + \frac{\sqrt{1-4t^2}}{3}\right\}.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(E) &= \int_E dxdydz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{-1/2}^{1/2} dt \int_{1-\frac{\sqrt{1-4t^2}}{3}}^{1+\frac{\sqrt{1-4t^2}}{3}} \varrho d\varrho \\ &= \frac{4\pi}{3} \int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{1-4t^2}dt = \frac{\pi^2}{3}. \end{aligned}$$

Soluzione 5.22 L'insieme di $\mathbb{R}^3$ $x^2 + y^2 \leq 1$ rappresenta un cilindro centrato nell'origine e raggio 1, avente l'asse z come asse di rotazione. Si chiede pertanto di calcolare il volume della porzione di questo cilindro compreso tra il paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2 - 2$ ed il piano $z = 4 - x - y$; otteniamo quindi, dato che per tutti i punti (x, y) per i quali $x^2 + y^2 \leq 1$ vale la condizione $x^2 + y^2 - 2 \leq 4 - x - y$,

$$\mathrm{Vol}(E) = \int_E dxdydz = \int_B dxdy \int_{x^2+y^2-2}^{4-x-y} dz = \int_B (6 - x - y - x^2 - y^2)dxdy.$$

Quest'ultimo integrale può infine essere calcolato utilizzando le coordinate polari:

$$\mathrm{Vol}(E) = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 (6 - \varrho\cos\vartheta - \varrho\mathrm{sen}\vartheta - \varrho^2)\varrho d\varrho = \frac{11}{2}\pi.$$

Soluzione 5.23 L'insieme dato consiste nella parte esterna al cerchio di raggio $1/2$ centrato nell'origine ed interno al cerchio di raggio $1/2$ centrato in $(1/2, 0)$. In coordinate polari tale insieme diventa

$$E' = \left\{ (\varrho, \vartheta) \in (-\pi, \pi] \times [0, +\infty) : \frac{1}{2} \leq \varrho \leq \cos\vartheta \right\}.$$

Si noti che abbiamo preso $\vartheta \in (-\pi, \pi]$; questa scelta risulta più comoda, in quanto il nostro insieme è contenuto nel semipiano $x \geq 0$. Si deve avere $1/2 \leq \cos\vartheta$ per non avere insiemi vuoti in ϱ, da cui si deduce che $\vartheta \in [-\pi/3, \pi/3]$. Possiamo quindi calcolare l'integrale dato passando alle coordinate polari e sfruttando la simmetria dell'insieme E rispetto all'asse x e la parità in y della funzione integranda,

$$\int_E \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dxdy = 2 \int_0^{\pi/3} d\vartheta \int_{1/2}^{\cos\vartheta} \frac{\varrho}{\sqrt{1 - \varrho^2}} d\varrho = \frac{\pi}{\sqrt{12}} - 1.$$

Soluzione 5.24 La funzione non è definita per $x + y = 0$; possiamo quindi considerare degli insiemi che invadono il triangolo E di vertici $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 1)$ del tipo

$$E_h = \{(x, y) : \frac{1}{h} \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}.$$

In questo modo otteniamo che

$$\int_{E_h} \frac{1}{x + y} dxdy = \int_{1/h}^{1} dy \int_0^y \frac{1}{x + y} dx = \int_{1/h}^{1} \log 2 dy = \log 2 \left(1 - \frac{1}{h}\right).$$

La funzione f è positiva e quindi

$$\sup_{h \geq 0} \int_{E_h} \frac{1}{x + y} dxdy \leq \log 2,$$

quindi la funzione è integrabile in senso generalizzato su E e

$$\int_E \frac{1}{x + y} dxdy = \lim_{h \to +\infty} \int_{E_h} \frac{1}{x + y} dxdy = \log 2.$$

Soluzione 5.25 La funzione $f(x) = e^{-x^2}$ non ammette un'esplicita primitiva. Per calcolare quest'integrale usiamo un trucco: passiamo attraverso un integrale in $\mathbb{R}^2$. Valutiamo

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2 - y^2} dxdy.$$

Usando le coordinate polari, il cui jacobiano è ρ, otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2 - y^2} dxdy = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho = \pi.$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2 - y^2} dxdy &= \int_{\mathbb{R}} dx \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2 - y^2} dy \Big) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} dx \Big(e^{-x^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy \Big) = \\ &= \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt \Big)^2 \end{aligned}$$

da cui si conclude che $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ e più in generale

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = (\pi)^{n/2}.$$

Soluzione 5.26 Dobbiamo trovare una successione di insiemi misurabili e limitati E_h tali che $E_h \subset E_{h+1}$ e

$$E = \bigcup_{h=1}^{\infty} E_h \qquad \text{(a meno di insiemi di misura nulla).}$$

Una possibile scelta è data dagli insiemi

$$E_h = \{(x,y,z) : \frac{1}{h^2} \leq x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq |\log(x^2+y^2)|\}.$$

Tali insiemi sono z–semplici, e quindi la loro misura sarà data da

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(E_h) =& |E_h| = \int_{\{\frac{1}{h^2} \leq x^2+y^2 \leq 1\}} dxdy \int_0^{|\log(x^2+y^2)|} dz \\
=& -\int_{\{\frac{1}{h^2} \leq x^2+y^2 \leq 1\}} \log(x^2+y^2) dxdy = -2\pi \int_{1/h}^{2} 2\varrho \log \varrho d\varrho \\
=& \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2h^2} - \frac{\pi \log h}{h^2}.
\end{aligned}$$

Quindi $\sup_h \mathrm{Vol}(E_h) < +\infty$; inoltre

$$\bigcup_{h=1}^{\infty} E_h = E \setminus \{x = y = 0\},$$

ma l'insieme $\{x = y = 0\}$ (l'asse z) è un insieme di misura nulla, quindi

$$\mathrm{Vol}(E) = \lim_h \mathrm{Vol}(E_h) = \frac{\pi}{2}.$$

Infine, dato che l'insieme è z–semplice, il calcolo del suo volume è esattamente equivalente al calcolo dell'integrale generalizzato

$$\int_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} |\log(x^2+y^2)| dxdy.$$

Soluzione 5.27 Uso le coordinate polari modificate che possiamo chiamare coordinate ellittiche

$$(\rho, \vartheta) \mapsto (a\rho\cos\vartheta, b\rho\mathrm{sen}\vartheta)$$

che ha jacobiano $ab\rho$. L'area diventa

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \rho ab \, d\rho = \pi ab.$$

In altro modo, si può fare il cambio di variabili

$$(x,y) \mapsto \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)$$

in modo che l'ellisse data venga trasformata nel cerchio unitario; il determinante della matrice Jacobiana di tale cambiamento di variabili è dato da $\frac{1}{ab}$, e quindi

$$\text{Area}(E) = \int_E dxdy = ab\int_E \frac{1}{ab}dxdy = ab\text{Area}(B_1(0)) = \pi ab.$$

Per l'ellissoide possiamo considerare il cambio di variabili

$$(x,y,z) \mapsto \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right)$$

che trasforma l'elissoide nella palla unitaria. Il determinante della matrice Jacobiana è $\frac{1}{abc}$ e quindi

$$\text{Vol}(E) = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Soluzione 5.28 Sfruttando la simmetria sia rispetto al piano x, y che rispetto al piano y, z il volume del solido risulta essere quattro volte il volume del solido delimitato inoltre dalle condizioni $x > 0$ e $z > 0$.
A questo punto usiamo le coordinate cilindriche con asse lungo l'asse z e centrate nell'origine: il cilindro è determinato dall'equazione

$$\rho^2\cos^2\vartheta + (\rho\text{sen}\vartheta - a)^2 = a^2$$

che equivalentemente può essere scritto come

$$\rho(\rho - 2a\text{sen}\vartheta) = 0$$

che ha soluzioni $\rho = 0$ e $\rho = 2a\text{sen}\vartheta$. Quindi le limitazioni per le variabili sono

$$0 \le \vartheta \le \pi/2\,, \qquad 0 \le \rho \le 2a\text{sen}\vartheta.$$

Infine da $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ si ricava $z^2 = 4a^2 - \rho^2$ da cui le limitazioni sulla z diventano

$$0 \le z \le \sqrt{4a^2 - \rho^2}.$$

Quindi il volume è dato da

$$V = 4\int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{2a\text{sen}\vartheta} d\rho \int_0^{\sqrt{4a^2-\rho^2}} \rho dz$$

che fornisce, usando il fatto che per $0 \le \vartheta \le \pi/2$ $\sqrt{1 - \text{sen}^2\vartheta} = \cos\vartheta$, il seguente risultato

$$V = \frac{16}{9}(3\pi - 4)a^3.$$

Figura 5.8:

Soluzione 5.29 L'insieme delimitato dagli estremi -1 e 1 per la variabile x e $|x|$ e $\sqrt{2-x^2}$ per la variabile y è quello in Figura 5.8. Quindi l'integrale diventa

$$\int_0^1 dy \int_{-y}^{y} f(x,y)dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx.$$

Soluzione 5.30 Uso le coordinate cilindriche

$$\int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{z/\sqrt{\alpha}} \rho d\rho = \frac{h^3\pi}{3\alpha}.$$

Provare alternativamente ad usare la formula per i solidi di rotazione.

Soluzione 5.31 Utilizziamo le coordinate cilindriche

$$x = \rho\cos\vartheta, \qquad y = t, \qquad z = \rho \operatorname{sen}\vartheta,$$

con $0 \le \vartheta \le 2\pi$, $0 \le \rho \le 1$ e $\rho \le t \le \sqrt{2-\rho^2}$. L'integrale diventa

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 d\rho \int_\rho^{\sqrt{2-\rho^2}} \left(\rho\frac{\rho^2\cos^2\vartheta}{\rho^2}\right) dt = (2\sqrt{2}-2)\frac{\pi}{3}.$$

In questo caso potrebbe sembrare più naturale utilizzare le coordinate sferiche: convincersi che non è così.

Soluzione 5.32 L'insieme E è quello a sinistra in Figura 5.9. Sicuramente l'integrale esiste perché la funzione integranda è limitata e quindi $|\int_E f dxdy| \le |E|$.
Un modo di risolvere questo integrale è effettuare il cambio di variabile

$$\phi(s,t) = \left(\frac{s}{1+t}, \frac{st}{1+t}\right), \qquad 0 \le s \le 2, 1 \le t \le 2.$$

Figura 5.9: a sinistra l'insieme E, a destra $\widetilde{E}$

che porta il rettangolo $\widetilde{E}$ in E. Il cambio ϕ si ottiene ponendo $y/x = t$ e $x + y = s$. Lo Jacobiano è dato da $\frac{s}{(1+t)^2}$, per cui si perviene all'integrale

$$\int_0^2 ds \int_1^2 \frac{s}{(1+t)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{1+t}\right) dt$$

che risolto è

$$\int_0^2 \frac{s}{\pi} \cos \frac{\pi}{1+t}\Big|_{t=1}^{t=2} ds = \int_0^2 \frac{s}{\pi}\Big(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{2}\Big) ds = \frac{1}{\pi}.$$

Provare anche con il cambio di variabile

$$\psi(s,t) = (s - ts, ts), \qquad 0 \le s \le 2, \frac{1}{2} \le t \le \frac{2}{3}.$$

che mappa $\widetilde{\widetilde{E}}$ in E come indicato in Figura 5.10.

Figura 5.10: a sinistra l'insieme E, a destra $\widetilde{\widetilde{E}}$

Soluzione 5.33 Per calcolare l'integrale dato, proviamo ad effettuare un cambio di variabili in modo che la funzione integranda si semplifichi ed in modo tale che la matrice del cambiamento di coordinate non dia problemi nell'integrazione e, ancora, che nel nuovo sistema di riferimento l'insieme su cui si vuole integrare non si complichi. Per non avere problemi con la matrice del cambiamento di coordinate si può fare in modo che tale matrice abbia determinante pari a 1; particolari trasformazioni con tale determinante sono le rotazioni, trasformazioni che hanno il vantaggio nel nostro caso di trasformare la palla B centrata nell'origine e di raggio 1 in se stessa. Cerchiamo quindi una rotazione dello spazio che ad esempio mandi il piano $x + y + z = 0$ nel piano determinato nelle nuove coordinate (u, v, w)

ad esempio da $u = 0$. Una tale rotazione è data da

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

In tal modo l'integrale diventa

$$\int_B \operatorname{sen}(x+y+z)dxdydz = \int_B \operatorname{sen}(u\sqrt{3})dudvdw.$$

A questo punto notiamo che la funzione integranda è dispari nella variabile u e il dominio B è simmetrico rispetto a tale variabile, e quindi si ottiene che

$$\int_B \operatorname{sen}(u\sqrt{3})dudvdw = 0.$$

Soluzione 5.34 Notiamo che l'insieme di integrazione è invariante per rotazioni intorno all'asse z; seguendo la discussione del punto precedente, cerchiamo una rotazione dello spazio in modo che il piano $x+y=0$ si trasformi, nelle nuove coordinate (u,v,w), nel piano $u=0$ e consideriamo una rotazione che lasci inalterato l'insieme di integrazione, cioè una rotazione effettuata attorno all'asse z. Una tale rotazione è data ad esempio da

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

L'integrale diventa quindi

$$\int_E e^{\frac{x+y}{\sqrt{2}}} dxdydz \quad = \quad \int_E e^u dudvdw = \int_{I_u} e^u A_u du,$$

dove A_u è l'area dell'ellisse

$$E_u = \left\{ (v,w) \in \mathbb{R}^2 : \frac{v^2}{a^2-u^2} + \frac{a^2}{b^2}\frac{z^2}{a^2-u^2} = 1 \right\}$$

e $I_u = [-a,a]$. In definitiva troviamo che

$$\int_E e^{\frac{x+y}{\sqrt{2}}} dxdydz \quad = \quad \int_{-a}^{a} e^u \pi \frac{b}{a}\left(a^2-u^2\right) du = 2\pi\frac{b}{a}((a-1)e^a + (a+1)e^{-a})$$

Soluzione 5.35 L'insieme E è normale rispetto al piano xy, quindi

$$\mathrm{Vol}(E) = \int_D \sqrt{xy}dxdy$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq (1 - \sqrt{x})^2\}$. Quindi

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(E) =& \int_0^1 dx \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} \sqrt{xy}dy = \frac{2}{3}\int_0^1 \sqrt{x}(1-\sqrt{x})^{3/2}dx \\ =&\frac{4}{3}\int_0^1 s^2(1-s)^3 ds = \frac{1}{45}.\end{aligned}$$

Il baricentro è invece dato dal punto $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ con

$$(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = \frac{1}{\mathrm{Vol}(E)}\int_E (x, , y, z)dxdydz,$$

Abbiamo quindi che

$$\begin{aligned}\overline{x} =&45\frac{2}{3}\int_0^1 x\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^{3/2}dx \\ =&30\int_0^1 s^4(1-s)^3 ds = \frac{3}{28},\end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned}\overline{y} =&45\int_D \sqrt{xy^3}dxdy = 45\frac{2}{5}\int_0^1 \sqrt{x}(1-\sqrt{x})^{5/2}dx \\ =&36\int_0^1 s^2(1-s)^5 ds = \frac{3}{14}\end{aligned}$$

ed infine

$$\begin{aligned}\overline{z} =&\frac{45}{2}\int_D xydxdy = \frac{45}{4}\int_0^1 x(1-\sqrt{x})^4 dx \\ =&\frac{45}{2}\int_0^1 s^3(1-s)^4 ds = \frac{9}{112}.\end{aligned}$$

Quindi il baricentro ha coordinate $(3/28, 3/14, 9/112)$.

Soluzione 5.36 Dire che la lamina è omogenea significa dire che la sua densità di massa è costante, che supporremo essere uguale ad 1. La distanza di un punto (x, y, z) dall'asse x è dato $\sqrt{y^2 + z^2}$. E è un insieme bidimensionale con $z = 0$, quindi il suo momento d'inerzia è dato da

$$I_x = \int_E y^2 dxdy = \int_0^\pi \int_0^{\mathrm{sen}x} y^2 dy = \frac{1}{3}\int_0^1 \mathrm{sen}^3 x dx = \frac{4}{9}.$$

Soluzione 5.37 Iniziamo col calcolare la massa del cono, passando alle coordinate cilindriche;

$$\begin{aligned}M =& \int_E f(x, y, z)dxdydz = \int_E (x^2 + y^2 + 2z)dxdydz \\ =& \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 dz \int_0^{1-z} (\varrho^2 + 2z)\varrho d\varrho = \frac{4\pi}{15}.\end{aligned}$$

Per il calcolo del baricentro avremo quindi

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \int_E x f(x,y,z) dx dy dz = \bar{y} = \frac{1}{M} \int_E y f(x,y,z) dx dy dz = 0,$$

in quanto la funzione da integrare è dispari sia nella x che nella y e E è simmetrico rispetto ai piani $x = 0$ e $y = 0$. Infine

$$\bar{z} = \frac{1}{M} \int_E z f(x,y,z) dx dy dz = \frac{5}{16}.$$

Per il momento di inerzia, dato che la distanza al quadrato dall'asse z è data da $x^2 + y^2$, avremo che

$$I_z(E) = \int_E (x^2 + y^2) f(x,y,z) dx dy dz = \frac{17\pi}{210}.$$

Capitolo 6

Estremi e punti stazionari

6.1 Massimi e minimi su insiemi

Esercizio 6.1 Trovare i punti di massimo e minimo e i valori massimo e minimo della funzione $f : E \to \mathbb{R}$ dove $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} \leq 1\}$ e $f(x, y) = x^3 - y^2$.

Esercizio 6.2 Calcolare massimi e minimi della funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$$

sull'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \leq 0, x + y \geq -3\}$.

Esercizio 6.3 Calcolare massimi e minimi della funzione

$$f(x, y) = x^2 + 3y^2 - xy - y$$

sull'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

Esercizio 6.4 Calcolare massimi e minimi della funzione

$$f(x, y) = 3x + y - 2$$

sull'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 3, y \leq 2, y \geq 1 - x\}$.

Esercizio 6.5 Calcolare massimi e minimi della funzione

$$f(x, y) = x^3 + y^2$$

sull'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Esercizio 6.6 Calcolare massimi e minimi della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x}{2} - y^2$$

sull'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Esercizio 6.7 Calcolare massimi e minimi della funzione

$$f(x,y) = xy$$

sull'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - xy + y^2 \leq 1\}$.

Esercizio 6.8 Calcolare massimi e minimi della funzione

$$f(x,y) = 6 - 4x - 3y$$

sull'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Esercizio 6.9 Calcolare gli assi dell'ellisse $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9\}$.

Esercizio 6.10 Calcolare massimi e minimi della funzione

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

sugli insiemi

- $E = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 3y - 2z = 4\big\}$;
- $E = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 1, 2x - y - 3z = 4\big\}$.

Esercizio 6.11 Calcolare massimi e minimi della funzione

$$f(x,y,z) = x + 3y - z$$

sull'insieme $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z = 0, z = 4x + 4y\}$.

Esercizio 6.12 Trovare massimo e minimo di

$$f(x,y,z) = x + y - z^2$$

nell'insieme $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 \leq 0, 0 \leq z \leq 2\}$.

Esercizio 6.13 Trovare la massima e la minima distanza dall'origine dell'insieme

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 \leq 3, z - y = 1\}.$$

Esercizio 6.14 Si determinino, se esistono, il massimo e il minimo di

$$f(x,y,z) = \frac{x^2 - y^2}{1 + z^2}$$

nell'insieme (illimitato) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Esercizio 6.15 Calcolare massimi e minimi della funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{(x-y)^2}$$

sugli insiemi:

- $E = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 \le 2\big\}$;
- $E = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x \ne y\big\}$;
- $[1, 2] \times [-1, 0]$;
- $E = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \le 2, y \ge 0, y \le x - 1\big\}$;
- $E = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \le \log x\big\}$.

Esercizio 6.16 Si determinino, se esistono, il massimo e il minimo di

$$f(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z^2} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

nell'insieme $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 + 4z^2 \le 4, x \ge 0\}$.

Esercizio 6.17 Si determinino, se esistono, il massimo e il minimo di

$$f(x, y, z) = 2x^2 - y^2 - z^2 - x$$

nell'insieme $E_1 \cup E_2$ dove

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 1, z \le 0\},$$

mentre

$$E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - (z-1)^2 \le 0, 0 \le z \le 1\}.$$

Esercizio 6.18 Si determinino, se esistono, il massimo e il minimo di

$$f(x, y, z) = \frac{1}{1 + x^2 + (y-1)^2}$$

nell'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \frac{1}{|x|}\}$.

Esercizio 6.19 Sia $A = (a_{ij})_{i,j=1}^N$ una matrice simmetrica a (coefficienti reali). Consideriamo la forma quadratica

$$Ax \cdot y = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} x_j y_i.$$

Massimizzare e minimizzare la funzione

$$f(x) = \frac{Ax \cdot x}{|x|^2} = \frac{\sum_{i,j=1}^N a_{ij} x_j x_i}{|x|^2}$$

definita per $|x| \ne 0$.

Esercizio 6.20 Trovare massimo e minimo della funzione $f(x, y) = (y - x^2)^3$ nell'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2 \le y \le \sqrt{4 - x^2}\}$ utilizzando le curve di livello di f.

Esercizio 6.21 Trovare massimo e minimo della funzione $f(x, y) = (x + y)^2$ nell'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ tramite le curve di livello di f.

Esercizio 6.22 Trovare massimo e minimo della funzione $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ nell'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ mediante le curve di livello di f.

Esercizio 6.23 Determinare il massimo e il minimo della funzione

$$f(x, y, z) = xyz$$

sull'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z = 1\}.$$

Dedurre da questo che per tutti i numeri positivi x, y, z vale la seguente relazione tra la media geometrica e la media aritmetica:

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x + y + z}{3}.$$

Si provi a il precedente risultato al caso generale;

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$

tra tutti i numeri positivi $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$,

Esercizio 6.24 Massimizzare fra tutti i parallelepipedi di superficie assegnata S il volume.

Esercizio 6.25 Trovare massimo e minimo di $f(x, y) = xy$ nell'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x + 2/\sqrt[3]{5}, 3x^5 + 5y^3 \leq 8\}.$$

Esercizio 6.26 Trovare massimo e minimo, se esistono, di $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2$ nell'insieme $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2yz = 1\}$.

Esercizio 6.27 Trovare massimo e minimo di $f(x, y, z) = x + 3y - z$ nell'insieme $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z = 0, z = 2x + 4y\}$.

Esercizio 6.28 Trovare, se esistono, i punti di massimo e minimo di

$$f(x, y) = \frac{2x - 2y + 1}{x^2 + y^2 + 1}$$

su $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq y \leq 1 + |x|\}$.

Esercizio 6.29 Cercare i punti di massimo e minimo di $f(x, y) = xe^{-xy}$ nell'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 2x\},$$

Esercizio 6.30 Trovare, se esistono, i punti di massimo e minimo di

$$f(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2$$

nell'insieme $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 4y - 6z + 5 = 0\}$.

Esercizio 6.31 Determinare i punti di massima e minima distanza dall'origine dei punti dell'insieme

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z - 1 = 0, 2x - y - 3z - 4 = 0\}.$$

Esercizio 6.32 Determinare i punti di massima e minima distanza dall'origine dei punti di bordo dell'insieme

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, -2 \leq z \leq 2\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}.$$

6.2 Punti stazionari e loro classificazione

Esercizio 6.33 Determinare i punti stazionari, nel dominio di definizione, delle seguenti funzioni:

1. $f(x,y) = x^3 + 4y^2 + 4xy$;
2. $f(x,y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$;
3. $f(x,y) = \dfrac{x + y - 1}{x^2 + y^2}$;
4. $f(x,y) = (2x + y)e^{-x^2 - y^2}$;
5. $f(x,y) = xy \ln(xy^2) + x^2 y$;
6. $f(x,y) = \operatorname{sen}(x + y) \cos(x - y)$.

Esercizio 6.34 Determinare i punti critici della funzione $f(x,y) = \operatorname{senh}(x^4 + y^3 - 4x^2 - 3y^2)$ all'interno dell'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x|(1 + (y-2)^2) - 2 < 0\}$, studiarne la natura e stabilire se f ammette massimo e minimo.

Esercizio 6.35 Determinare i punti critici della funzione $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$ in $\mathbb{R}^2$, studiarne la natura e stabilire se f ammette massimo e minimo in $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 6.36 Studiare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2 + 2.$$

Esercizio 6.37 Trovare e classificare i punti stazionari della seguente funzione:

$$f(x,y) = (y^2 - y)e^{x^2 - x}.$$

Esercizio 6.38 Trovare e classificare i punti stazionari della funzione

$$f(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + xyz.$$

Esercizio 6.39 Si consideri la funzione $f(x,y,z) = x^2 + y^4 + y^2 + z^3 - 2xz$. Studiarne i punti stazionari liberi in $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 6.40 Studiare i punti stazionari liberi in $\mathbb{R}^2$ della funzione

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy + y^3 - 8x^3 - 6xy^2 + 12yx^2.$$

Esercizio 6.41 Studiare i punti stazionari liberi in $\mathbb{R}^3$ della funzione $f(x,y,z) = \frac{3}{4}x^2 + 8y^2 + 7xy + z^4$.

6.3 Soluzioni

Soluzione 6.1 Per il teorema di Weierstrass f ammette sia massimo che minimo. All'interno si ha

$$\nabla f(x,y) = (3x^2, -2y) = 0$$

che ha soluzione solo per $(x,y) = (0,0)$ che è all'interno di E. Vediamo il bordo. Prendiamo

Figura 6.1:

in considerazione il lato l_1: parametrizziamo con la seguente funzione

$$\varphi : (-1,1) \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(t) = (1,t)$$

e consideriamo $f \circ \varphi : (-1,1) \to \mathbb{R}$. Si ha

$$\frac{d}{dt}(f \circ \varphi)(t) = \frac{d}{dt} f(\varphi(t)) = \frac{d}{dt} f(1,t) = \frac{d}{dt}(1 - t^2) = -2t = 0$$

per $t = 0$ che corrisponde al punto $(1, \varphi(0)) = (1,0)$. Chiaramente in casi semplici come questo si può considerare direttamente la funzione f ristretta all'insieme l_1 e derivare rispetto a y la funzione $f(1,y) = 1 - y^2$, ma in tal caso si presti molta attenzione. Bisogna sempre ricordare che alla base c'è una parametrizzazione. Analogamente si parametrizzano gli altri lati e derivando si ottengono i punti $(0,1)$ sul lato l_2, $(-1,0)$ sul lato l_3, $(0,-1)$ sul lato l_4. Abbiamo quindi i seguenti candidati: $(0,0)$ punto stazionario interno, $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ e $(0,-1)$ punti stazionari vincolati, $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$ vertici. A questo punto valutando la funzione f su tutti e nove i punti si trova che il punto di massimo è $(1,0)$ e il valore massimo di f è $f(1,0) = 1$, i punti di minimo sono $(-1,1)$ e $(-1,-1)$ e il valore minimo di f è $f(-1,1) = f(-1,-1) = -2$.

Soluzione 6.2 La funzione data è continua e l'insieme è compatto, quindi il massimo e il minimo esistono di sicuro. Nella parte interna il gradiente si annulla in $(-1,-1)$ mentre la matrice Hessiana è data da

$$Hf(-1,-1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tale matrice ha autovalori pari a 1 e 3, quindi il punto $(-1,-1)$ è un punto di minimo con valore $f(-1,-1) = -1$. Sul bordo si trova che per $y = 0$ e $-3 < x < 0$, si ha un minimo per $x = -1/2$ con $f(-1/2, 0) = -1/4$, mentre per $x = 0$ e $-3 < y < 0$ analogamente esiste un minimo per $y = -1/2$ con $f(0, -1/2) = -1/4$ e per $y = -x - 3$ con $-3 < x < 0$ non si hanno punti critici, infine $f(-3,0) = 6$, $f(0,0) = 0$ e $f(0,-3) = 6$. In definitiva il massimo è assunto in $(-3,0)$ e $(0,-3)$ e il minimo in $(-1,-1)$ con valore -1.

Soluzione 6.3 Per quanto riguarda i punti interni, troviamo il punto $(1/11, 2/11)$ che è un punto di minimo con $f(1/11, 2/11) = -1/11$. Per quanto riguarda i bordi, per $y = 0$ e $0 < x < 1$ non si hanno punti critici, mentre per $x = 1$ e $0 < y < 1$ si ha un punto critico in $y = 1/3$ e $f(1, 1/3) = 2/3$; per $x = 0$ e $0 < y < 1$ si ha un punto critico in $y = 1/6$ con $f(0, 1/6) = -1/12$, mentre per $y = 1$ con $0 < x < 1$ si ha un minimo relativo in $x = 1/2$ con $f(1/2, 1) = 7/4$. Infine si ha che $f(0,0) = 0$, $f(1,0) = 1$, $f(1,1) = 2$ e $f(0,1) = 2$. Quindi la funzione ammette massimo in $(1,1)$ e minimo in $(1/11, 2/11)$.

Soluzione 6.4 Il gradiente della funzione data non si annulla mai, quindi in particolare non si annullerà sulla parte interna di E. È facile inoltre convincersi che sui bordi unidimensionali non ci sono massimi o minimi (eventualmente fare i calcoli), mentre nei vertici si ha $f(3,-2) = 5$, $f(3,2) = 9$ e $f(-1,2) = -3$; quindi il massimo è assunto in $(3,2)$ e il minimo in $(-1,2)$.

Soluzione 6.5 Il gradiente della funzione si annulla in $(0,0)$, che è interno ad E ma è un punto di sella (si può già dedurre questo dal fatto che la funzione è positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$, $y^2 < -\sqrt{x^3}$ e $f(0,0) = 0$). Per verificare rigorosamente che $(0,0)$ è un punto di sella, si calcoli la matrice Hessiana e una volta notato che un autovalore è nullo mentre il secondo è positivo, provare a fare le sezioni lungo gli autovettori, che in questo caso altro non sono che le sezioni fatte lungo gli assi coordinati. Quindi il massimo e il minimo della funzione vanno ricercati sul bordo di E.

Proviamo ad applicare vari metodi per trovare il massimo e il minimo sul bordo; si può ad esempio parametrizzare il bordo tramite la trasformazione

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\cos\theta \\[2ex] y = \sin\theta \end{cases}$$

con $\theta \in [0, 2\pi)$. Otteniamo quindi la funzione di una variabile

$$g(\theta) = \frac{\cos^3\theta}{8} + \sin^2\theta,$$

che ha derivata nulla per $\theta = 0 + k\pi/2$, $k = 0, 1, 2, 3$. con $g(0) = 1/8$, $g(\pi/2) = 1$, $g(\pi) = -1/8$ e $g(3\pi/2) = 1$. Quindi il massimo vale 1 ed è assunto nei punti $(0, 1)$ e $(0, -1)$, mentre il minimo è $-1/8$ assunto in $(-1, 0)$.

Applicando la teoria dei moltiplicatori di Lagrange, otteniamo la funzione

$$\phi(x, y, \lambda) = x^3 + y^2 - \lambda(4x^2 + y^2 - 1)$$

da cui il sistema

$$\begin{cases} 3x^2 - 8\lambda x = 0 \\ 2y - 2\lambda y = 0 \\ 4x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono date da

$$\begin{array}{ccc} \lambda = 1 & x = 0 & y = \pm 1 \\ \lambda = \mp\dfrac{3}{16} & x = \pm\frac{1}{2} & y = 0, \end{array}$$

che sono gli stessi punti trovati precedentemente.

C'è un altro metodo per trovare tali punti; si potrebbe notare che la funzione nella variabile y dipende solo da y^2 e che il vincolo è dato da $y^2 = 1 - 4x^2$. Se si ragiona in questo modo e si sostituisce $y^2 = 1 - 4x^2$, si trova la funzione di una sola variabile

$$g(x) = x^3 - 4x^2 + 1$$

con la condizione $-1/2 < x < 1/2$. Tale funzione ha solo il punto $x = 0$ come punto stazionario, in corrispondenza di $y = \pm 1$. Ci si potrebbe chiedere come mai troviamo solo due punti in questo modo, mentre prima ne trovavamo quattro. Il problema è che porre $y^2 = 1 - 4x^2$ significa in realtà fare le parametrizzazioni $y = \pm\sqrt{1 - 4x^2}$; queste sono due parametrizzazioni che sono definite e derivabili per $-1/2 < x < 1/2$, mentre il punto $x = -1/2$ e il punto $x = 1/2$ non vengono considerati (non sono punti di derivabilità per la parametrizzazione). Di conseguenza, quando si cerca di sostituire l'equazione del vincolo all'interno della funzione, bisogna fare molta attenzione.

Soluzione 6.6 Il gradiente della funzione si annulla all'interno di E nei punti $(1/4, \pm\sqrt{3}/4)$; dallo studio della matrice Hessiana si trova che tali punti sono punti di sella. Quindi i massimi e minimi vanno cercati sul bordo. Utilizzando la parametrizzazione

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$$

si trova la funzione

$$g(\theta) = 1 - \frac{\cos\theta}{2} - \sin^2\theta,$$

i cui punti stazionari sono dati da $\theta = 0, \arccos(1/4), \pi, 2\pi - \arccos(1/4)$, che corrispondono ai punti $(1, 0)$, $(1/4, \sqrt{15}/4)$, $(-1, 0)$ e $(1/4, -\sqrt{15}/4)$ in cui la funzione vale rispettivamente $1/2$, $-1/16$, $3/2$ e $-1/16$. Quindi il massimo è assunto in $(-1, 0)$ e il minimo in $(1/4, \sqrt{15}/4)$ e $(1/4, -\sqrt{15}/4)$.

Soluzione 6.7 Per quanto riguarda i punti interni, il gradiente si annulla in $(0,0)$ che è un punto di sella in quanto la funzione è nulla in $(0,0)$, positiva per $x, y > 0$ e $x, y < 0$ e negativa per $x > 0, y < 0$ e $x < 0, y > 0$. Per quanto riguarda i punti al bordo, utilizzando i moltiplicatori di Lagrange, otteniamo la funzione

$$\phi(x,y,\lambda) = xy - \lambda(x^2 - xy + y^2 - 1)$$

che conduce al sistema

$$\begin{cases} y = \lambda(2x - y) \\ x = \lambda(2y - x) \\ x^2 - xy + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Tale sistema ha le soluzioni

$$\begin{array}{rll} \lambda = 1 & x = \pm 1 & y = \pm 1 \\ \lambda = -\dfrac{1}{3} & x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} & y = \mp \dfrac{1}{\sqrt{3}}. \end{array}$$

Se ne ricava che si ha amssimo per $(1,1)$ e $(-1,-1)$ con valore 1 e minimo per $(1/3, -1/3)$ e $(-1/3, 1/3)$ con valore $-1/9$.

Soluzione 6.8 Il gradiente della funzione non si annulla mai, quindi i massimi e minimi vanno cercati sul bordo. Parametrizzando in coordinate polari, si trovano i punti stazionari $(4/5, 3/5)$ e $(-4/5, -3/5)$ che sono rispettivamente di minimo e di massimo.

Soluzione 6.9 L'ellisse data è centrata nell'origine; per trovare i semiassi, basta trovare dei punti molto particolari dell'ellisse, quello di minor distanza dall'origine e quello di maggior distanza (il semiasse minore e il semiasse maggiore). Si tratta quindi di trovare massimo e minimo della funzione distanza (o equivalentemente del quadrato della funzione distanza) sotto il vincolo di appartenere all'insieme E. Abbiamo quindi la funzione

$$\phi(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(5x^2 + 8xy + 5y^2 - 9),$$

che ha punti di massimo e minimo rispettivamente in $(\pm\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}/2)$, in cui il semiasse è pari a 1 e $(\pm 3\sqrt{2}/2, \mp 3\sqrt{2}/2)$, in cui il semiasse è pari a 3 (la funzione quadrato della distanza è pari a 9).

Soluzione 6.10 Il gradiente della funzione data si annulla in $(0,0,0)$, che non è interno a nessuno dei due insiemi in esame (il primo è un piano e il secondo una retta; entrambi hanno parte interna vuota). Nel primo caso, usando i moltiplicatori di Lagrange, si ottiene il punto $(2/7, 6/7, -4/7)$ in cui la funzione vale $8/7$. Per capire se si tratta di massimo o minimo o sella, dobbiamo notare che la funzione data è sempre positiva e che l'insieme E è illimitato; inoltre

$$\lim_{E \ni (x,y,z) \to \infty} (x^2 + y^2 + z^2) = +\infty.$$

Quindi la funzione non ammette massimo, mentre il punto trovato è un punto di minimo. Per quanto riguarda la seconda parte dell'esercizio, di nuovo la funzione non è limitata sull'insieme in considerazione, e col metodi dei moltiplicatori si trova il punto $(16/15, 1/3, -11/15)$ che è un punto di minimo.

Soluzione 6.11 Nel caso in cui, come nell'esercizio in questione, i vincoli siano due, si può a volte procedere come segue; si può fare una sostituzione, ad esempio $z = 4x + 4y$ (operazione lecita; perchè?), e poi minimizzare la funzione di due variabili

$$f(x, y) = x + 3y - 4x - 4y$$

con vincolo l'intersezione dei due vincoli, cioè l'insieme

$$E' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8\}.$$

Otteniamo quindi la funzione ausiliaria

$$\phi(x, y, \lambda) = -3x - y - \lambda((x - 2)^2 + (y - 2)^2 - 8),$$

che ha come punti stazionari i punti $(2 \pm 6\sqrt{5}, 2 \pm 2\sqrt{5})$. Il massimo è assunto per $(2 - 6\sqrt{5}, 2-2\sqrt{5})$ con valore $-8+20\sqrt{5}$, mentre il valore minimo è assunto per $(2+6\sqrt{5}, 2+2\sqrt{5})$ con valore $-8 - 20\sqrt{5}$.

Soluzione 6.12 L'insieme E è quello rappresentato nella Figura 6.2. All'interno il gradiente non si annulla mai (non si annulla mai da nessuna parte). Vediamo sul bordo. Iniziamo col parametrizzare la parte di cono descritta dall'equazione $z^2 = x^2 + y^2$. Si può considerare una funzione

$$\phi : \Omega_1 \to \mathbb{R}^3, \qquad \phi(s, t) = (s, t, \sqrt{s^2 + t^2})$$

dove $\Omega_1 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : s^2 + t^2 \leq 4, (s, t) \neq (0, 0)\}$. Il punto $(0, 0)$ non viene considerato perché non è possibile trovare una funzione differenziabile da un aperto di $\mathbb{R}^2$ alla porzione di cono in considerazione, che includa il vertice, come nel nostro caso. Allora la funzione

Figura 6.2:

$g(s, t) = f(\phi(s, t)) = s + t - s^2 - t^2$ ha derivate parziali

$$\nabla g(s, t) = (1 - 2s, 1 - 2t)$$

che si annullano per $(s, t) = (1/2, 1/2)$; per questi valori di s e t

$$\phi(1/2, 1/2) = (1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}).$$

Ora parametrizziamo il cerchio: considero la funzione $\psi : \Omega_2 \to \mathbb{R}^3$, $\psi(s, t) = (s, t, 2)$, dove $\Omega_2 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : s^2 + t^2 \leq 4\}$. La funzione $f \circ \psi(s, t) = s + t - 4$ non ha mai gradiente nullo. Ora passiamo alla circonferenza rappresentata dall'intersezione di $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ con il piano orizzontale $z = 2$. La parametrizzo con la funzione

$$\varphi(t) = (2\cos t, 2\mathrm{sen}t, 2)$$

e ottengo:

$$\frac{d}{dt}(f \circ \varphi)(t) = -2\mathrm{sen}t + 2\cos t,$$

che si annulla quando $\mathrm{sen}t = \cos t$, cioè per $t = \pi/4$ e $t = 5\pi/4$, valori corrispondenti ai due punti $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$ e $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2)$. Conclusione: valuto la funzione nei punti $(1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2)$ e $(0, 0, 0)$ che è un vertice. Il valore massimo è $1/2$ assunto nel punto $(1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$, il valore minimo $-2\sqrt{2} - 4$ assunto nel punto $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2)$.

Soluzione 6.13 Risolviamo l'esercizio in diversi modi. Prima di tutto trasformiamo il problema: la distanza di un generico punto in $\mathbb{R}^3$ dall'origine è data da

$$d\big((x, y, z), (0, 0, 0)\big) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Chiaramente minimizzare e massimizzare su un compatto questa funzione oppure il suo quadrato, cioè $x^2 + y^2 + z^2$, è equivalente (per convincersi della cosa si cominci a pensare in dimensione 1 alla funzione $f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ e $g(x) = x^2$). È quindi più conveniente utilizzare la funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ che è più semplice da derivare e regolare in ogni punto (mentre la funzione distanza non è differenziabile nell'origine). L'insieme E è dato dall'intersezione di un cilindro lungo l'asse z, a base ellittica, e il piano di equazione $z - x = 1$. Studiamo quindi la funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ su E: f è continua e E è compatto per cui esistono sia massimo che minimo. Il piano $z - y = 1$ può essere visto come un grafico ($z = y + 1$) e quindi la parametrizzazione più semplice risulta

$$\phi : D \to \mathbb{R}^3, \qquad \phi(u, v) = (u, v, v + 1),$$

dove $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + 2v^2 \le 3\}$. Definiamo la funzione

$$\tilde{f}(u, v) = f(\phi(u, v)) = u^2 + v^2 + (v + 1)^2 = u^2 + 2v^2 + 2v + 1.$$

Annullando le derivate parziali si ottiene

$$\nabla \tilde{f}(u, v) = (2u, 4v + 2) = 0$$

da cui l'unico punto stazionario è $(0, -1/2)$, che appartiene a D e corrisponde al punto $(0, -1/2, 1/2)$ dell'insieme E. Sul bordo parametrizzato con $\vartheta \mapsto (\sqrt{3}\cos\vartheta, \sqrt{3/2}\mathrm{sen}\vartheta)$ la funzione diventa

$$3\cos^2\vartheta + 3\mathrm{sen}^2\vartheta + 2\sqrt{\frac{3}{2}}\mathrm{sen}\vartheta + 1.$$

La sua derivata si annulla per $\cos\vartheta = 0$, cioè per $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ e $\vartheta = \frac{3\pi}{2}$, che corrispondono ai punti

$$(0, \sqrt{3/2}) \qquad \text{e} \qquad (0, \sqrt{3/2})$$

dell'insieme D e ai punti

$$\left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} + 1\right), \qquad \left(0, -\sqrt{\frac{3}{2}}, 1 - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

dell'insieme E. Valutando la funzione nei tre punti ottenuti si ha

$$\tilde{f}(0,-1/2)=\frac{1}{2},\qquad \tilde{f}(0,\sqrt{3/2})=4+2\sqrt{\frac{3}{2}},\qquad \tilde{f}(0,-\sqrt{3/2})=4-\sqrt{6}>\frac{1}{2},$$

per cui il punto $(0,-1/2,1/2)$ di E, che corrisponde a $(0,-1/2)$ di D, è il punto di minima distanza dall'origine, il punto $(0,\sqrt{3/2},\sqrt{3/2}+1)$ di E, che corrisponde a $(0,\sqrt{3/2})$ di D, è il punto di massima distanza dall'origine. Avremmo potuto studiare la natura del punto stazionario interno valutando la matrice hessiana:

$$H_{\tilde{f}}(u,v)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

che è definita positiva, per cui $(0,-1/2)$ è di minimo (locale, ma a posteriori anche assoluto). Studiando le curve di livello di $\tilde{f}$, vediamo come si può risolvere il problema. La quantità u^2+2v^2+2v+1 può essere riscritta

$$u^2+2\Big(v+\frac{1}{2}\Big)^2+\frac{1}{2}$$

per cui risolvere $\tilde{f}(u,v)=c$ con $c\in\mathbb{R}$ (cioè trovare l'insieme di livello c della funzione $\tilde{f}$) è equivalente a risolvere l'equazione

$$u^2+2\Big(v+\frac{1}{2}\Big)^2+\frac{1}{2}=c,\qquad \text{con } c\geq\frac{1}{2}.$$

Queste curve sono ellissi, come le curve tratteggiate in Figura 6.3 (l'ellisse in neretto rappresenta il bordo di D). Per $c<1/2$ l'insieme di livello c è l'insieme vuoto.

Figura 6.3:

Soluzione 6.14 L'insieme E è un cilindro infinito, in particolare non è compatto, quindi é possibile che massimo e minimo non esistano. Le tre derivate parziali poste uguali a zero

$$\nabla f(x,y,z)\left(\frac{2x}{1+z^2},\frac{2y}{1+z^2},(x^2-y^2)\frac{2z}{(1+z^2)^2}\right)=0$$

forniscono solo il punto $(0,0,0)$ interno ad E. All'infinito (per $|z|\to+\infty$) la funzione tende a 0, ma è facile vedere che assume sia valori positivi che negativi. Esaminiamo il comportamento sul bordo: dobbiamo parametrizzare la superficie $\partial E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$. Si può essere tentati dall'inserire nell'espressione di f la quantità $1 - x^2$ al posto di y^2 e considerare così

$$\tilde{f}(x, z) = \frac{2x^2 - 1}{1 + z^2}.$$

Questo corrisponde a considerare le due parametrizzazioni

$$\psi_1 : [-1, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad \psi_1(x, z) = (x, \sqrt{1 - x^2}, z)$$

e

$$\psi_2 : [-1, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad \psi_2(x, z) = (x, -\sqrt{1 - x^2}, z).$$

Annullando le derivate di $\tilde{f}$ si ottengono le soluzioni $x = 0$ e $z = 0$ che corrispondono ai due punti $(0, 1, 0)$ e $(0, -1, 0)$ (che risultano essere i punti di massimo per la funzione f). A questo punto però vanno anche considerati gli estremi -1 e 1 del dominio di ψ_1 e ψ_2 che corrispondono ai punti $(1, 0, 0)$, e $(-1, 0, 0)$ nei quali va valutata poi f. Se si considera la quantità $1 - y^2$ al posto di x^2 le due parametrizzazioni diventano

$$\eta_1 : [-1, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, , \qquad \eta_1(y, z) = (\sqrt{1 - y^2}, y, z),$$

e

$$\eta_2 : [-1, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad \eta_2(y, z) = (-\sqrt{1 - y^2}, y, z);$$

si considera $\hat{f}(y, z) = \frac{1-2y^2}{1+z^2}$ e annullando le derivate si trovano i due punti $(1, 0, 0)$ e $(-1, 0, 0)$ ai quali vanno aggiunti i punti corrispondenti agli estremi $\eta_1(-1) = \eta_2(-1) = (0, -1, 0)$ e $\eta_1(1) = \eta_2(1) = (0, 1, 0)$. Se parametrizziamo la superficie con

$$\varphi(\vartheta, z) = (\cos\vartheta, \mathrm{sen}\vartheta, z)$$

e consideriamo

$$h(\vartheta, z) = f(\varphi(\vartheta, z)) = \frac{\cos^2\vartheta - \mathrm{sen}^2\vartheta}{1 + z^2};$$

derivando si ottiene

$$\nabla h(\vartheta, z) = \left(\frac{4\cos\vartheta\mathrm{sen}\vartheta}{1 + z^2}, \frac{(\cos^2\vartheta - \mathrm{sen}^2\vartheta)2z}{1 + z^2} \right) = 0$$

per cui si hanno le soluzioni $\mathrm{sen}\vartheta = 0$ o $\cos\vartheta = 0$ e $z = 0$, che corrispondono ai punti quattro $(0, 1, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(1, 0, 0)$ e $(-1, 0, 0)$, due di massimo, due di minimo. Perché in questo modo abbiamo trovato quattro punti, mentre per $\tilde{f}$ e $\hat{f}$ solamente due?

Soluzione 6.15 Per calcolare i massimi e minimi della funzione si può utilizzare il metodo delle curve di livello; per funzione in considerazione, le curve di livello sono le rette

$$y = x \pm \frac{1}{\sqrt{c}}$$

con $c > 0$ il valore della funzione su tali curve (la funzione è sempre positiva). Nel primo insieme in esame, la circonferenza centrata in $(2, 0)$ e raggio $\sqrt{2}$, notiamo che la retta $y = x$ (che è in qualche modo la curva il cui livello è $+\infty$) è tangente alla circonferenza, come pure la retta $y = x - 4$ (cioè la curva associata al livello $c = 1/16$) è tangente alla circonferenza;

se ne deduce che la funzione non ammette massimo in quanto l'estremo superiore è $+\infty$, mentre assume minimo pari a $1/16$ nel punto $(3, -1)$.

Nel secondo insieme, ancora il sup della funzione sarà $+\infty$, in quanto la retta $y = x$ attraversa per l'insieme E e quindi non c'é massimo, mentre, per quanto riguarda il minimo, le rette $y = x \pm \sqrt{2}$ (associate al livello $c = 1/2$) sono tangenti all'insieme dato, e quindi il minimo è $1/2$ assunto nei punti $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

Nel terzo insieme, le rette che intersecano E sono le rette $y = x + b$ con $b \in [-3, -1]$; agli estremi, cioè con $b = -1$ e $b = -3$, avremo i livelli associati ai valori $c = 1$ e $c = 1/9$, da cui il massimo della funzione è 1 assunto nel punto $(1, 0)$ e il minimo é $1/9$ assunto in $(2, -1)$.

Nel quarto insieme, E è il triangolo di vertici $(1, 0)$, $(2, 1)$ e $(2, 0)$. Il valore massimo è 1 assunto su tutto il lato congiungente i vertici $(1, 0)$ con $(2, 1)$, mentre il minimo é $1/4$ assunto nel vertice $(2, 0)$.

Nell'ultimo insieme notiamo che E non è limitato e che le rette $y = x + b$ incontrano l'insieme se $b \leq -1$. Troviamo quindi che la funzione ha massimo pari a 1 assunto nel punto $(1, 0)$ (punto di tangenza tra la retta $y = x - 1$ con E), mentre non ha minimo, essendo

$$\inf_E f = 0$$

in quanto per $b \to -\infty$ il livello associato ha valore che tende a 0.

Soluzione 6.16 L'insieme E è metà di un'ellisse di semi–assi 2, 1 e 1; è un insieme compatto, quindi massimo e minimo esistono. Si noti che la funzione f dipende solamente da $t = x^2 + y^2 + z^2$, con $f(x, y, z) = g(t)$, $g(t) = e^t - t/2$. La funzione g è, per t, monotona crescente, quindi ha minimo per $t = 0$. La funzione f ha quindi minimo in $(0, 0, 0)$ con valore minimo $1/2$. Il massimo invece si ottiene quando $(x, y, z) \in E$ è il più distante possibile dall'origine; siccome E è una semi-ellisse allungata lungo l'asse x, il punto di massima distanza su E dall'origine è dato da $(2, 0, 0)$, che sarà quindi punto di massimo con valore massimo $e^4 - 2$.

Soluzione 6.17 L'insieme E è disegnato in Figura 6.4; la funzione f ha un unico punto stazionario dato da $(1/4, 0, 0)$ che è interno ad E. In corrispondenza di tale punto la funzione vale $-1/8$. Il bordo di E è costituito dalle due superfici calotta inferiore della sfera e

Figura 6.4: Calotta inferiore di una sfera con tronco di cono

superficie laterale del cono, dalla curva intersezione delle due superfici e dal vertice del cono

$(0,0,1)$ dove la funzione vale -1. Sulla superficie laterale della sfera possiamo usare la parametrizzazione $(x, y, -\sqrt{1-x^2-y^2})$, $x^2+y^2<1$, in modo da ottenere la funzione di due variabili

$$g(x,y) = 3x^2 - x - 1$$

che ha punti stazionari della forma $(1/6, y)$. In corrispondenza di tali punti la funzione vale $-13/12$. Sulla superficie laterale del cono abbiamo la parametrizzazione $(x, y, 1-\sqrt{x^2+y^2})$, $0 < x^2+y^2 < 1$, in modo da ottenere

$$h(x,y) = x^2 + 2\sqrt{x^2+y^2} - x - 1$$

che non ha punti stazionari. Resta infine da considerare il bordo uni–dimensionale; utilizziamo la parametrizzazione $(\cos t, \mathrm{sen} t, 0)$ per ottenere la funzione

$$r(t) = 2\cos^2 t - \mathrm{sen}^2 t - \cos t$$

che ha punti stazionari per $t=0$, $t=\pi$ e per $\cos t = 1/6$. In corrispondenza di tali punti la funzione vale 1, 3 e $-13/12$ rispettivamente. Si conclude quindi che il massimo della funzione è 3 assunto in $(-1,0,0)$, mentre il minimo è $-13/12$ assunto in tutti i punti $(1/6, y, -\sqrt{35/36-y^2})$, $y \in [-\sqrt{35}/6, \sqrt{35}/6]$.

Soluzione 6.18 L'insieme E, in Figura 6.5, non è compatto, quindi l'esistenza del massimo e del minimo non è garantita. Annullando le derivate si ottiene il punto critico $(0,1)$. Si vede facilmente che

$$f(x,y) \le f(0,1) \qquad \text{per ogni } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \tag{6.1}$$

(studiare l'hessiana per esercizio). All'infinito: poiché $y \le 1/|x|$ si ha che

Figura 6.5:

$$(y-1)^2 \le (1/|x|-1)^2$$

quindi

$$\frac{1}{1+x^2+(\frac{1}{|x|}-1)^2} \le \frac{1}{1+x^2+(y-1)^2} \le \frac{1}{1+x^2}.$$

Se si considera quindi il limite per $|(x,y)| \to +\infty$ in E si hanno due possibilità: o $|x| \to +\infty$ (e $y \to 0$) oppure $y \to +\infty$ (e in questo caso $|x| \to 0$). Nel primo dei due casi, dalla stima precedente si ottiene che $f(x,y) \to 0$. Nel secondo caso possiamo stimare la f come segue, visto che $|x| \le 1/y$:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{y^2}+(\frac{1}{|x|}-1)^2} \le \frac{1}{1+x^2+(y-1)^2} \le \frac{1}{1+(y-1)^2}.$$

Conlcusione: prendendo il limite per punti $(x,y) \in E$

$$\lim_{|(x,y)|\to+\infty} f(x,y) = 0$$

(in realtà si può dimostrare che $\lim_{|(x,y)|\to+\infty} f(x,y) = 0$). Poiché f è sempre positiva, il limite all'infinito è zero e inoltre dalla stima (6.1) si conclude che la funzione ha un punto di massimo assoluto in $(0,1)$ e non ha minimo.

Soluzione 6.19 Derivando la funzione f rispetto a x_k si ha:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{i,j=1}^N a_{ij}x_jx_i =& 2\sum_{j=1}^N a_{kj}x_j\\ \frac{\partial}{\partial x_k}(x_1^2+\cdots+x_N^2) =& 2x_k\end{aligned}$$

quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{2|x|^2\sum_{j=1}^N a_{kj}x_j - 2x_kAx\cdot x}{|x|^4} = \frac{2\sum_{j=1}^N a_{kj}x_j - 2x_kf(x)}{|x|^2}$$

per ogni $k = 1,\dots N$. Di conseguenza, annullando le derivate, si ha

$$\sum_{j=1}^N a_{kj}x_j - x_kf(x) = 0, \qquad \text{per ogni } k = 1,\dots N$$

e ciò equivale a dire che

$$Ax = f(x)x$$

cioè x è un autovettore e $f(x)$ è un autovalore. Senza bisogno di trovare le soluzioni x, sicuramente $f(x)$ è un autovalore, quindi il minimo valore assunto da f è il minimo autovalore di A e il massimo valore assunto da f è il massimo autovalore di A.

Volendo risolvere il problema con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si osservi innanzitutto che la funzione f può essere ridefinita sulla sfera di $\mathbb{R}^N$

$$\mathbb{S}^{N-1} = \partial B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| = 1\}$$

dato che

$$f(x) = \frac{Ax\cdot x}{|x|^2} = A\frac{x}{|x|}\cdot\frac{x}{|x|}$$

e quindi

$$f(\alpha x) = f(x), \qquad \text{per ogni } \alpha \ne 0.$$

Ci possiamo cosí limitare a considerare

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} x_j x_i$$

definita in $\mathbb{S}^{N-1}$. Si consideri la funzione

$$H(x, \lambda) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} x_j x_i + \lambda(x_1^2 + \ldots + x_N^2 - 1),$$

visto che cerchiamo i punti stazionari in $\mathbb{S}^{N-1}$ e $\|x\| = 1$ se e solo se $\|x\|^2 = 1$. Le derivate risultano essere (la matrice è simmetrica)

$$\frac{\partial H}{\partial x_k} = 2 \sum_{j=1}^{N} a_{kj} x_j + 2\lambda x_k = 0$$

per $k = 1, \ldots, N$,

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = x_1^2 + \ldots + x_N^2 - 1 = 0.$$

Dalle prime N equazioni si ricava che

$$A \cdot x + \lambda x = 0$$

il che significa che x deve essere un autovettore (e λ un autovalore). I punti stazionari di H in $\mathbb{R}^{N+1}$ sono quindi tutte le $(N+1)$-uple (x, λ) con x autovettore di norma 1 e λ autovalore di A. Si osservi come dalle equazioni precedenti si ricava

$$x_k(a_{kk} + \lambda) + \sum_{j=1}^{N} a_{kj} x_j = 0$$

dove la sommatoria viene effettuata per $j \neq k$; nel caso in cui A sia una matrice diagonale si puó dedurre che gli autovalori sono gli elementi della diagonale e gli autovettori sono del tipo $(0, \ldots 0, 1, 0 \ldots 0)$.

Soluzione 6.20 L'insieme E è quello in Figura 6.6, le parabole tratteggiate sono curve di livello. Risolveremo il problema senza fare calcoli, ma osservando gli insiemi di livello della funzione (si consiglia di svolgere per esercizio i calcoli, anche per confronto, studiando il gradiente, la matrice Hessiana e studiando il comportamento della funzione sul bordo come al solito). Fissiamo $c \in \mathbb{R}$ e determiniamo l'insieme $\Gamma_c = \{f(x, y) = c\}$: tale insieme é rappresentato dall'intersezione di E con la parabola di equazione (si veda anche la Figura 6.6)

$$y = x^2 + \sqrt[3]{c}$$

Chiaramente il valore massimo (rispettivamente il minimo) che assume f è il massimo c (rispettivamente il minimo c) per cui Γ_c non è vuoto (cioè il massimo c per cui la parabola $y = x^2 + \sqrt[3]{c}$ interseca l'insieme E). Concludendo: il minimo é assunto nel punto $(-2, 0)$ e il massimo nel punto $(0, 2)$. Per calcolare i valori basta valutare la funzione in questi due punti o trovare i valori di c per cui le parabole passano per questi punti (farlo per esercizio). I valori minimo e massimo sono rispettivamente -64 e 8.

Figura 6.6:

Soluzione 6.21 La funzione è continua su un compatto, quindi sicuramente ammette massimo e minimo. L'insieme su cui è definita f e tre suoi insiemi di livello sono disegnati in Figura 6.7 (le linee tratteggiate allo stesso modo fatto parte dello stesso insieme di livello). Si fissi $c \in \mathbb{R}$ e si denoti con $\Gamma_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ f(x, y) = c\}$. Chiaramente per $c < 0$

Figura 6.7:

l'insieme Γ_c è vuoto, per $c = 0$ si ha che $\Gamma_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x\}$, per $c > 0$

$$\Gamma_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x + \sqrt{c}\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x - \sqrt{c}\}.$$

Il minimo di f è 0 assunto in tutto l'insieme

$$\Gamma_0 \cap E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x, x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]\},$$

il massimo è assunto dove l'insieme di livello interseca E sul bordo e precisamente nei punti $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ (trovare le equazioni delle rette). Il valore massimo è

$$f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 8.$$

Soluzione 6.22 L'insieme E è una corona circolare e gli insiemi di livello sono delle ellissi (si veda Figura 6.8), come si può facilmente ricavare ponendo

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 = c, \qquad c \geq 0.$$

Figura 6.8:

Minore è il valore di c e minori sono i semiassi dell'ellisse, l'insieme sul quale la funzione assume il valore costante c. I punti di minimo sono $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ dove l'ellisse descritta da $x^2 + 2y^2 = 1$ interseca la parte di bordo di E data dal cerchio di raggio 1 (quindi il valore minimo è 1); i punti di massimo sono $(0, 2)$ e $(0, -2)$ dove l'ellisse descritta da $x^2 + 2y^2 = 8$ interseca la parte di bordo di E data dal cerchio di raggio 2 (quindi il valore massimo è 8).

Soluzione 6.23 L'insieme E è la porzione del piano $x+y+z = 1$ contenuta nel quadrante $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. Quindi E è una superficie con bordo dato dai segmenti $\{x = 0, 0 \leq y \leq 1, z = 1-y\}$, $\{y = 0, 0 \leq x \leq 1, z = 1-x\}$ e $\{z = 0, 0 \leq x \leq 1, y = 1-x\}$. Su tali segmenti la funzione si annulla; siccome $f \geq 0$ su E, se ne deduce che i tre segmenti sono punti di minimo per f su E; sui restanti punti di E la funzione è strettamente positiva, quindi ammetterà un massimo su

$$\Sigma = \{x + y + z = 1, x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

Utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per individuare il punto stazionario vincolato

$$\Phi(x, y, z, \lambda) = xyz - \lambda(x + y + z - 1);$$

dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} yz - \lambda = 0 \\ xz - \lambda = 0 \\ xy - \lambda = 0 \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

La soluzione è data da $(1/3, 1/3, 1/3)$ con $\lambda = 1/9$ e in tale punto la funzione vale $1/27$. Quindi

$$\max_E f = \frac{1}{27}, \qquad \text{assunto in } \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right),$$

$$\min_E f = 0, \qquad \text{assunto nei punti con } x = 0, y = 0, z = 0.$$

Per l'ultima parte dell'esercizio, si nota che se abbiamo tre numeri positivi x, y, z, denotata con $S = x+y+z$ la loro somma, possiamo considerare $u = x/S$, $v = y/S$ e $w = z/S$; quindi per quanto dimostrato sopra

$$uvw \leq \frac{1}{27},$$

con uguaglianza se e solo se $u = v = w = \frac{1}{3}$. Questo dice che

$$xyz \leq \frac{(x+y+z)^3}{27},$$

e cioè

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$$

con uguaglianza se e solo se $x = y = z$. Questo ragionamente si può generalizzare alla dimensione n generica considerando la funzione

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n,$$

vincolata all'insieme

$$E = \{x_1 + \ldots + x_n = 1, x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0\}.$$

Soluzione 6.24 Il volume è dato dal prodotto delle lunghezze dei tre lati. Indicando con x, y, z le tre lunghezze la funzione da massimizzare è allora $f(x, y, z) = xyz$. La superficie di ogni singola faccia è il prodotto delle lunghezze dei due lati che la determinano, per cui il vincolo è $2(xy + xz + yz) = S$. Uso il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: si consideri la funzione

$$H(x, y, z, \lambda) = xyz + 2\lambda(xy + xz + yz) - \lambda S$$

e le sue derivate parziali

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial x}(x, y, z, \lambda) =& yz + 2\lambda(y + z) = 0\\
\frac{\partial H}{\partial y}(x, y, z, \lambda) =& xz + 2\lambda(x + z) = 0\\
\frac{\partial H}{\partial z}(x, y, z, \lambda) =& xy + 2\lambda(x + y) = 0\\
\frac{\partial H}{\partial \lambda}(x, y, z, \lambda) =& 2(xy + xz + yz) - S = 0.
\end{aligned}$$

Dalla prima e dalla seconda equazione si ricava che

$$2\lambda = -\frac{yz}{y+z} = -\frac{xz}{x+z}$$

da cui (si ricordi che $x, y, z > 0$) $x = y$. Analogamente dalla prima e dalla terza si ricava $x = z$, per cui si conclude che $x = y = z$. Questa è la soluzione, che corrisponde a dire che se c'è un parallelepipedo di volume massimo questo deve essere un cubo. Vediamo si stabilire quanti punti verificano questa condizione: sappiamo che $2(xy+xz+yz) = S$ e d'altra parte che $x = y = z$. Quindi esiste solo un punto sul vincolo dato da $2(x^2 + x^2 + x^2) = S$, quindi $x = \sqrt{\frac{S}{6}}$. Il volume corrispondente a questo valore è

$$\left[\sqrt{\frac{S}{6}}\right]^3 = \left(\frac{S}{6}\right)^{3/2}.$$

Vediamo in due modi che $(\sqrt{S/6})^3$ è il massimo valore possibile per il volume. Si può utilizzare la formula che lega le medie geometrica e aritmetica. Infatti posti $a_1 = xy, a_2 = yz, a_3 = xz$ si ha

$$\sqrt[3]{xy \cdot yz \cdot xz} = (xyz)^{2/3} \leq \frac{xy + xz + yz}{3} = \frac{S}{6},$$

da cui

$$f(x, y, z) = xyz \leq \left[\frac{S}{6}\right]^{3/2}$$

ogniqualvolta la somma $2(xy+xz+yz) = S$. Un altro modo è il seguente: la funzione volume $f(x, y, z) = xyz$ è sempre positiva e ha un unico punto critico. Vediamo che all'infinito la funzione tende a zero (o equivalentemente che $1/f(x, y, z)$ tende a $+\infty$) quando $|(x, y, z)| \to +\infty$ sul vincolo:

$$\frac{S}{2}\frac{1}{xyz} = \frac{xy + yz + xz}{xyz} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

È chiaro che quando $|(x, y, z)| \to +\infty$ sul vincolo $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2(xy+yz+xz) = S\}$ non tutte le variabili possono andare a $+\infty$, e almeno una delle tre deve quindi convergere a 0. Calcolando il limite per punti $(x, y, z) \in M$,

$$\lim_{|(x,y,z)|\to+\infty} f(x, y, z) = +\infty.$$

Soluzione 6.25 L'insieme E è quello delimitato dalle curve in Figura 6.9 e dall'asse $y = 0$. Infatti abbiamo le seguenti limitazioni: $y \geq 0$ e $y \leq x+2/\sqrt[3]{5}$ che definiscono due semipiani.

Figura 6.9:

La terza $3x^5 + 5y^3 \leq 8$ può essere vista come

$$y \leq \left(\frac{8 - 3x^5}{5}\right)^{1/3}.$$

Le derivate parziali di f si annullano solo nell'origine, che non appartiene all'interno di E, quindi va scartato. Vediamo il bordo. Prima la parte in cui $y = 0$: chiaramente $f(x, 0) = 0$ (provare ad usare i moltiplicatori). La parte di bordo che appartiene alla retta si può parametrizzare con $\varphi(t) = (t, t + 2/\sqrt[3]{5})$ con $t \in (-2/\sqrt[3]{5}, 0)$. Si ottiene $f(\varphi(t)) = t^2 + t2/5^{1/3}$ la cui derivata è

$$2t + \frac{2}{5^{1/3}},$$

che si annulla per $t = -1/5^{1/3}$. Quindi il punto $\varphi(-1/5^{1/3}) = (-1/5^{1/3}, 1/5^{1/3})$ è un punto candidato. Sull'ultimo tratto di bordo usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: cerchiamo i punti stazionari (in $\mathbb{R}^3$) della funzione

$$H(x, y, \lambda) = xy + \lambda(3x^5 + 5y^3 - 8).$$

Derivando si ottiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial x}(x, y, \lambda) =& y + 15\lambda x^4 = 0 \\
\frac{\partial H}{\partial y}(x, y, \lambda) =& x + 15\lambda y^2 = 0 \\
\frac{\partial H}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) =& 3x^5 + 5y^3 - 8 = 0
\end{aligned}$$

Dalla prima e dalla seconda si ha che $15\lambda = -y/x^4 = -x/y^2$ da cui $y^3 = x^5$. Inserendo quest'informazione nella terza equazione si ricava $x = 1$ e $y = 1$. Valutando f nei punti $(-1/5^{1/3}, 1/5^{1/3})$, $(1, 1)$, $(x, 0) \in E$, e il vertice $(0, 2/5^{1/3})$ si ottiene

$$\begin{array}{rcl}
f(-1/5^{1/3}, 1/5^{1/3}) = & -\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}} & \text{minimo} \\
f(1, 1) = & 1 & \text{massimo} \\
f(x, 0) = & 0 & \\
f(0, 2/5^{1/3}) = & 0. &
\end{array}$$

Soluzione 6.26 Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si consideri la funzione

$$H(x, y, z, \lambda) = 2x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2yz - 1)$$

e annullando le sue derivate si ottiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial x}(x, y, z, \lambda) =& 4x + 2\lambda xyz = 0 \\
\frac{\partial H}{\partial y}(x, y, z, \lambda) =& 2y + \lambda x^2 z = 0 \\
\frac{\partial H}{\partial z}(x, y, z, \lambda) =& 2z + \lambda x^2 y = 0 \\
\frac{\partial H}{\partial \lambda}(x, y, z, \lambda) =& x^2yz - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Dalla seconda e dalla terza si ottiene

$$\lambda = -\frac{2y}{x^2 z} = -\frac{2z}{x^2 y},$$

e quindi $z^2 = y^2$. Dalla quarta equazione si ricava che $x^2 = 1/yz$ per cui yz è positivo (o sia y che z sono positivi, o entrambi sono negativi, quindi la possibilità $z = -y$ va scartata). Dalla prima equazione, sfruttando $y = z$ e $x^2 = 1/yz$, si ha

$$4x + 2\Big(-\frac{2y}{x^2 z}\Big)xyz = 4\Big(x - \frac{1}{x^3}\Big) = 0$$

da cui si ricava che $x = 1$ oppure $x = -1$. Per cui i punti trovati sono

$$P_1 = (1, 1, 1), P_2 = (1, -1, -1), P_3 = (-1, 1, 1), P_4 = (-1, -1, -1).$$

Si ha che $f(P_i) = 4$ per ogni i. Dalla risoluzione dell'Esercizio 6.23 sappiamo che se $y, z > 0$ e $x^2yz = 1$ allora $x^2+y+z \geq 3$ da cui $2x^2+2y+2z \geq 6$. Dalla disuguaglianza $a^2+b^2 \geq 2ab$ segue che:

$$2x^2 + (y^2 + 1) + (z^2 + 1) \geq 2x^2 + 2y + 2z \geq 6$$

da cui

$$2x^2 + y^2 + z^2 \geq 4.$$

Se $y, z < 0$ considero $-y$ e $-z$ che sono positivi e il cui prodotto è sempre yz e ripeto il ragionamento. Conclusione:

$$f(x, y, z) \geq 4 \qquad \text{sul vincolo,}$$

per cui P_i, $i = 1, 2, 3, 4$, sono tutti punti di minimo.

Soluzione 6.27 Con due vincoli considero la funzione

$$H(x, y, z, \lambda, \mu) = x + 3y - z - \lambda(x^2 + y^2 - z) - \mu(z - 2x - 4y).$$

Si trovano i punti

$$P_1 = (1 + \sqrt{5/2}, 2 + \sqrt{5/2}, 10 + 6\sqrt{5/2}), \quad P_2 = (1 - \sqrt{5/2}, 2 - \sqrt{5/2}, 10 - 6\sqrt{5/2})$$

che sono rispettivamente di minimo e di massimo.

Soluzione 6.28 L'insieme su cui si stanno cercando gli estremi è la regione illimitata del piano disegnata in Figura 6.10. Notiamo che la regione è illimitata ma se $\|(x, y)\| \to +\infty$, siccome $|x| \leq y \leq |x| + 1$, allora

$$\frac{2x - 2|x| - 1}{2x^2 + 2|x| + 2} \leq \frac{2x - 2y + 1}{x^2 + y^2 + 1} \leq \frac{2x - 2|x| + 1}{2x^2 + 1}$$

da cui il fatto che $f(x, y) \to 0$ se $\|(x, y)\| \to +\infty$. Cerchiamo ora i punti stazionari all'interno. Poniamo quindi $\nabla f(x, y) = 0$ per ottenere che esistono solo due punti stazionari,

Figura 6.10: Disegno dell'insieme E

$(-1, 1)$ e $(1/2, -1/2)$; nessuno di questi due punti è però interno all'insieme E. Studiamo ora il bordo; bisogna anzitutto considerare i due spigoli $(0, 0)$ e $(0, 1)$ dove la funzione vale 0 e $-1/2$ rispettivamente. Sul bordo $y = x$, $x > 0$, la funzione diventa

$$f(x, x) = \frac{1}{2x^2 + 1}$$

che è monotona decrescente. Su $y = x + 1$, $x > 0$, si ha invece

$$f(x, x+1) = -\frac{1}{2(x^2 + x + 1)}$$

che è ancora monotona ma crescente. Per $y = -x$, $x < 0$, si ottiene

$$f(x, -x) = \frac{4x + 1}{2x^2 + 1};$$

tale funzione ha un solo punto stazionario per $x < 0$ dato da $x = -1$ ed in tale punto la funzione vale -1. Infine, per $y = -x + 1$ si ottiene la funzione

$$f(x, -x+1) = \frac{4x - 1}{2(x^2 - x + 1)};$$

tale funzione è monotona per $x < 0$. Quindi il massimo della funzione è 1 assunto in $(0, 0)$, mentre il minimo è -1 assunto in $(-1, 1)$.

Soluzione 6.29 L'insieme E è illimitato (quello tratteggiato in Figura 6.11) e le derivate parziali non si annullano mai contemporaneamente su E. Infatti

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= e^{-xy}(1 - xy)\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -x^2 e^{-xy}\end{aligned}$$

e la derivata rispetto a y non è mai zero all'interno di E. Vediamo sul bordo: parametrizzando il bordo con le curve $t \mapsto (t, t)$ e $t \mapsto (t, 2t)$ con $t \in (0, +\infty)$ si ottiene prima

Figura 6.11:

$$\frac{d}{dt} f(t, t) = \frac{d}{dt} t e^{-t^2} = e^{-t^2}(1 - 2t^2)$$

che si annulla per $t = 1/\sqrt{2}$ che corrisponde al punto $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, poi

$$\frac{d}{dt} f(t, 2t) = \frac{d}{dt} t e^{-2t^2} = e^{-t^2}(1 - 4t^2)$$

che si annulla per $t = 1/2$, che corrisponde al punto $(1/2, 1)$. Vediamo all'infinito: poiché in E

$$x^2 \le xy \le 4x^2 \Rightarrow -4x^2 \le -xy \le -x^2$$

si ha che

$$xe^{-4x^2} \le f(x,y) \le xe^{-x^2}$$

per cui il seguente limite, calcolato per $(x,y) \in E$,

$$\lim_{|(x,y)|\to+\infty} f(x,y) = 0.$$

Esaminiamo i candidati, i due punti trovati e il vertice:

$$\begin{array}{rll} f(0,0) = & 0, & \text{minimo} \\ f(1/2,1) = & \frac{1}{2}e^{-1/2}, & \\ f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}. & \text{massimo} \end{array}$$

Soluzione 6.30 Presentiamo qui solo una traccia dello svolgimento. Il vincolo può essere visto come grafico per cui una delle parametrizzazioni possibili e più semplici è

$$(u,v) \mapsto \Big(u, v, \frac{1}{6}(2u + 4v + 5)\Big)$$

(ma anche $(u,v) \mapsto (\frac{1}{2}(6v - 4u - 5), u, v)$ e $(u,v) \mapsto (u, \frac{1}{4}(6v - 2u - 5), v)$ vanno bene). Ci si riduce così ad una funzione di due variabili

$$f\big(u, v, \frac{1}{6}(2u + 4v + 5)\big).$$

Soluzione 6.31 L'insieme dato è una retta nello spazio (si vede facilmente che il rango del sistema che definisce E è 2); quindi E è un insieme illimitato, cioè non c'è un punto di massima distanza su E. Per trovare il punto di minima distanza, consideriamo la funzione quadrato della distanza con i due vincoli

$$\Phi(x,y,z,\lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x + 2y + z - 1) - \mu(2x - y - 3z - 4).$$

Arriviamo quindi al sistema

$$\begin{cases} 2x - \lambda - 2\mu = 0 \\ 2y - 2\lambda + \mu = 0 \\ 2z - \lambda + 3\mu = 0 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x - y - 3z = 4 \end{cases}$$

che ha come soluzione il punto $(16/15, 1/3, -11/15)$, con $\lambda = 52/75$ e $\mu = 54/75$; in corrispondenza di tale punto la distanza vale $\sqrt{402}/15$.

Un modo alternativo per risolvere l'esercizio è trovare la parametrizzazione di E; ricavando $z = 1 - z - 2y$, sostituendo in $2x - y - 3z = 4$ e ponendo $x = t$, si trova la parametrizzazione

$$r(t) = \left(t, \frac{7}{5} - t, t - \frac{9}{5}\right) = \left(0, \frac{7}{5}, -\frac{9}{5}\right) + t(1, -1, 1).$$

A questo punto possiamo sia considerare la funzione

$$g(t) = \|r(t)\|^2$$

e minimizzare g cercando il punto stazionario libero per g, oppure notare che il punto di minima distanza è ortogonale ad E, cioè il punto di minima distanza è imndividuato da $t \in \mathbb{R}$ per cui

$$r(t) \cdot (1, -1, 1) = 0,$$

cioè $t = 16/15$ che definisce lo stesso punto trovato precedentemente.

Soluzione 6.32 L'insieme E è rappresentato in figura 6.12. La funzione da massimizzare

(a) L'insieme E, unione di due cilindri

(b) Intersezione dei due cilindri

Figura 6.12: Unione di due cilindri

e minimizzare è la funzione distanza o equivalentemente la funzione

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

La ricerca dei punti estremi è fatta sul bordo di E, che quindi non ha punti interni; tale bordo lo possiamo scrivere come unione di vari pezzi;

$$\partial E = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5 \cup B_6 \cup B_7 \cup B_8 \cup B_9 \cup B_{10} \cup B_{11},$$

con

$$\begin{gathered}
B_1 = \{z = 2, x^2 + y^2 < 1\}, \qquad B_2 = \{z = -2, x^2 + y^2 < 1\}, \\
B_3 = \{y = 2, x^2 + z^2 < 1\}, \qquad B_4 = \{y = -2, x^2 + z^2 < 1\}, \\
B_5 = \{x^2 + y^2 = 1, -2 < z < 2\} \setminus \{x^2 + z^2 \le 1, -2 \le y \le 2\} \\
B_6 = \{x^2 + z^2 = 1, -2 < y < 2\} \setminus \{x^2 + y^2 \le 1, -2 \le z \le 2\} \\
B_7 = \{z = 2, x^2 + y^2 = 1\}, \qquad B_8 = \{z = -2, x^2 + y^2 = 1\}, \\
B_9 = \{y = 2, x^2 + z^2 = 1\}, \qquad B_{10} = \{y = -2, x^2 + z^2 = 1\}, \\
B_{11} = \{x^2 + y^2 = 1, x^2 + z^2 = 1\}.
\end{gathered}$$

Grazie alla simmetria di f e dell'insieme E, possiamo considerare assieme i bordi B_1–B_4 trattando esclusivamente il bordo B_1; analogamente, tratteremo solo B_7 per i casi B_7–B_{10} ed infine B_5 e B_6 sono analoghi.

Iniziamo con B_1; se imponiamo la condizione $z = 2$, troviamo la funzione di due variabili

$$g_1(x, y) = f(x, y, 2) = x^2 + y^2 + 4$$

da studiare nell'insieme $\{x^2 + y^2 < 1\}$; il gradiente di g_1 si annulla esclusivamente in $(0, 0)$ in cui la funzione vale 4. In definitiva, nei bordi B_1–B_4 abbiamo i quattro candidati $(0, 0, 2)$, $(0, 0, -2)$, $(0, 2, 0)$ e $(0, -2, 0)$ a distanza 2 dall'origine.

Per quanto riguarda B_5 possiamo utilizzare la parametrizzazione $\phi : (-2, 2) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$,

$$\phi(t, \vartheta) = (\cos\vartheta, \mathrm{sen}\vartheta, t)$$

e considerare la funzione di due variabili

$$g_2(t, \vartheta) = f(\phi(t, \vartheta)) = 1 + t^2;$$

tale funzione non ha punti stazionari su B_5, in quanto il gradiente di g_2 si annulla per $t = 0$ e $\vartheta \in [0, 2\pi)$, ma questi punti non appartengono a B_5. Quindi su B_5 e B_6 non abbiamo punti stazionari vincolati. Lo studio su B_5 e B_6 si poteva affrontare anche considerando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange mediante la funzione

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

con $z \in (-2, 2)$ e $(x, y, z) \notin \{x^2 + z^2 \le 1, -2 \le y \le 2\}$.

Per quanto riguarda il bordo B_7, su tale bordo si ha $x^2 + y^2 = 1$ e $z = 2$, quindi la funzione f è costantemente uguale a 5, cioè tutti i punti di B_7–B_{10} sono punti stazionari vincolati a distanza $\sqrt{5}$ dall'origine.

Resta da considerare il bordo B_{11}; possiamo utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1) - \mu(x^2 + z^2 - 1).$$

Si tratta quindi di risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x(1 - \lambda - \mu) = 0 \\ 2y(1 - \lambda) = 0 \\ 2z(1 - \mu) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + z^2 = 1; \end{cases} \tag{6.2}$$

partendo dalla seconda equazione, possiamo prendere in considerazione il caso $y = 0$, da cui si arriva al sistema

$$\begin{cases} \mu = 1 - \lambda \\ y = 0 \\ x^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

cioè i punti $(1, 0, 0)$ e $(-1, 0, 0)$ con i moltiplicatori legati dalla relazione $\mu = 1 - \lambda$. Se invece nella seconda equazione di (6.2) consideriamo il caso $\lambda = 1$, arriviamo al sistema

$$\begin{cases} x\mu = 0 \\ \lambda = 1 \\ z(1 - \mu) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

La prima equazione ha le due possibilità $x = 0$ e $\mu = 0$; nel primo caso si trovano i quattro punti $(0, 1, 1)$, $(0, 1, -1)$, $(0, -1, 1)$ e $(0, -1, -1)$ con i moltiplicatori dati da $\lambda = 1$, $\mu = 1$, mentre nel secondo caso si trovano i due punti $(1, 0, 0)$ e $(-1, 0, 0)$ con moltiplicatori $\lambda = 1$, $\mu = 0$. I primi quattro punti distano tutti $\sqrt{2}$ dall'origine, mentre gli altri due distano 1 dall'origine, che quindi sono i punti di minima distanza dall'origine.

Chiudiamo con una osservazione sul metodo dei moltiplicatori di Lagrange; si noti che l'insieme B_{11} non è una curva parametrizzata, ma unione di due curve parametrizzate che si intersecano nei punti $(\pm 1, 0, 0)$. In tali punti non si può applicare il teorema della funzione implicita per dedurre che B_{11} sia una curva, in quanto la funzione $h(x, y, z) = (x^2+y^2-1, x^2+z^2-1)$ ha Jacobiana con rango 1 in tali punti. Ciononostante, il metodo dei moltiplicatori funziona ugualmente ed individua tali punti come punti stazionari vincolati. La ragione risiede nel fatto che la condizione per essere punto estremale vincolato equivale a richiedere che la restrizione della funzione ad ogni curva contenuta nel vincolo abbia in tali punti un punto stazionario. Nel nostro caso il vincolo può essere parametrizzato dalle curve

$$r_1(t) = (\cos t, \sin t, \sin t), \qquad r_2(t) = (\cos t, \sin t, -\sin t),$$

che si incrociano nei due punti $(\pm 1, 0, 0)$. I vettori tangenti alle due curve r_1 e r_2 sono linearmente indipendenti in tali punti, quindi l'ortogonale alle due curve ha ivi dimensiona 1, ed è quindi indistintamente generato da uno dei due vettori che definiscono la matrice Jacobiana di h, i gradienti delle componenti di h.

Soluzione 6.33 L'esercizio chiede di risolvere l'equazione $\nabla f(x, y) = 0$.

1. L'equazione diventa il seguente sistema:

$$\begin{cases} 3x^2 + 4y = 0 \\ 8y + 4x = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x(3x - 2) = 0 \\ y = -\frac{1}{2}x. \end{cases}$$

   Le soluzioni del sistema sono $(0, 0)$ e $(2/3, -1/3)$, che sono quindi gli unici due punti stazionari.

2. Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2} = 0 \\ -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x} = 0, \end{cases}$$

   cioè l'equazione $x^2 = y^2$ che ha per soluzione tutti i punti (x, x) e $(x, -x)$ con $x \neq 0$. In definitiva, tutti i punti appartenenti alle due rette $y = x$ e $y = -x$ con $x \neq 0$ sono stazionari.

3. Ottteniamo il sistema

$$\begin{cases} y^2 - x^2 - 2xy + 2x = 0 \\ x^2 - y^2 - 2xy + 2y = 0. \end{cases}$$

   Sommando e sottraendo le due equazioni si ha:

$$\begin{cases} (x - y)(1 - x - y) = 0 \\ -4xy + 2x + 2y = 0. \end{cases}$$

   La prima equazione ha le due soluzioni: $y = x$ e $y = 1 - x$. Si ottengono quindi i due sistemi

$$\begin{cases} y = x \\ x(1 - x) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 1 - x \\ 2x^2 - 2x + 1 = 0. \end{cases}$$

Il primo sistema ha soluzione per $(0,0)$ e $(1,1)$ (il primo punto va però scartato in quanto la funzione non è ivi definita), mentre il secondo non ha soluzione. Abbiamo in definitiva un solo punto stazionario: $(1,1)$.

4. Dobbiamo risolvere il sistema
$$\begin{cases} 2-4x^2-2xy=0 \\ 1-y(4x+2y)=0, \end{cases}$$
che é equivalente al sistema
$$\begin{cases} y=\frac{1-2x^2}{x} \\ 5x^2-2=0. \end{cases}$$
Ne segue che $y=\pm\frac{\sqrt{10}}{10}$ e $x=\pm\sqrt{\frac{2}{5}}$.

5. Dobbiamo risolvere il sistema
$$\begin{cases} y(\ln(xy^2)+1+2x)=0 \\ x(\ln(xy^2)+2+x)=0. \end{cases}$$
Possiamo dividere per y la prima equazione e per x la seconda in quanto, grazie alla presenza del logaritmo, x e y devono essere non nulli; il sistema ha quindi per soluzione i punti $(1, e^{-3/2}$ e $(1,-e^{-3/2})$.

6. Dobbiamo risolvere il sistema
$$\begin{cases} \cos(2x)=0 \\ \cos(2y)=0; \end{cases}$$
si ottengono quindi infiniti punti stazionari, tutti e soli i punti
$$(x,y)=\left(\frac{\pi}{4}+\frac{h\pi}{2},\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right), \qquad h,k\in\mathbb{Z}.$$

Soluzione 6.34 La funzione $\operatorname{senh} t=(e^t-e^{-t})/2$ è strettamente crescente per cui i punti critici, e la loro natura, sono gli stessi per la funzione
$$g(x,y)=x^4+y^3-4x^2-3y^2.$$
A questo punto è possibile studiare la funzione g anziché f perché $\operatorname{senh} t$ è strettamente crescente e quindi la sua derivata è sempre diversa da zero, se fosse solamente crescente (non decrescente) ciò non sarebbe possibile. Un'altra osservazione: nel caso di una funzione strettamente decrescente il ragionamento può essere applicato comunque, con l'attenzione che la natura dei punti viene mutata, un punto di massimo per g sarebbe un minimo per f e viceversa. Vediamo ora di capire com'è fatto l'insieme E. La disequazione $|x|(1+(y-2)^2)-2<0$ è equivalente a
$$|x|<\frac{2}{1+(y-2)^2},$$
per cui E è un insieme illimitato come quello in Figura 6.13. Per ricavarlo si noti che la diseguaglianza denota la parte interna alle due curve di equazione $x=\frac{2}{1+(y-2)^2}$ e $x=-\frac{2}{1+(y-2)^2}$. Svolgiamo ai calcoli: posto il gradiente di g uguale a $(0,0)$ si trovano i punti $(0,0)$, $(0,2)$, $(\sqrt{2},0)$, $(\sqrt{2},2)$, $(-\sqrt{2},0)$, $(-\sqrt{2},2)$. I punti $(-\sqrt{2},0)$ e $(\sqrt{2},0)$ non appartengono ad E,

Figura 6.13:

per cui non ci interessano. Calcolando le derivate seconde si ottiene che la matrice Hessiana è

$$H_g(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 8 & 0 \\ 0 & 6y - 6 \end{pmatrix}$$

Questo è il caso più fortunato: la matrice è diagonale per cui conosciamo già gli autovalori il cui segno ci fornisce le informazioni sulla natura dei punti:

$$\begin{aligned}
H_g(0,0) &= \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}, && \text{punto di massimo locale} \\
H_g(0,2) &= \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} && \text{punto di sella} \\
H_g(\pm\sqrt{2},0) &= \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} && \text{punti di sella} \\
H_g(\pm\sqrt{2},2) &= \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, && \text{punti di minimo locale}
\end{aligned}$$

La funzione f non ammette massimo e minimo assoluto su $\mathbb{R}^2$; infatti

$$\lim_{|x|\to+\infty} g(x,0) = +\infty, \qquad \lim_{y\to-\infty} g(0,y) = -\infty,$$

per cui poiché il seno iperbolico va a $-\infty$ a $-\infty$ e a $+\infty$ a $+\infty$ anche f risulta illimitata sia dal basso che dall'alto.

Soluzione 6.35 Annullando il gradiente si arriva alle equazioni

$$\begin{cases} x^3 = y \\ y^3 = x \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x^9 = x \\ y^3 = x \end{cases} \implies \begin{cases} x(x^8 - 1) = 0 \\ y^3 = x \end{cases}$$

per cui le soluzioni sono $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$. La matrice Hessiana è

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo il punto $(0,0)$:

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Valutiamo il segno degli autovalori: anche se Δ_1, il determinante del minore principale 1×1 (di fatto il termine $[H_f(0,0)]_{11}$ della matrice) è nullo, si ha che $\Delta_2 = -16$ è anche il determinante della matrice nonché il prodotto degli autovalori: ne deduciamo che necessariamente uno è positivo e l'altro negativo per cui $(0,0)$ è un punto di sella. Per quanto riguarda il punto $(1,1)$ si ha che

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}.$$

Si può verificare che questa matrice é definita positiva, per cui $(1,1)$ è un punto di minimo locale stretto. Si può calcolare anche il suo determinante, che è positivo; quindi il prodotto dei due autovalori è positivo $(144 - 16)$. Si potrebbero avere due autovalori positivi o due autovalori negativi. Un altro invariante è la traccia, la somma degli elementi sulla diagonale, che è anche la somma degli autovalori. La traccia è 24 per cui se la somma degli autovalori è positiva deduciamo che il segno dei due autovalori non può essere altro che positivo. Lo stesso vale per il punto $(-1,-1)$. Per concludere calcoliamo il limite

$$\lim_{|(x,y)| \to +\infty} f(x,y) = +\infty,$$

per cui la funzione non ammette massimo e ammette due punti di minimo assoluto.

Soluzione 6.36 Annullando il gradiente si ottiene

$$\begin{cases} 4x^3 - 4(x-y) = 0 \\ 4y^3 + 4(x-y) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 4x^3 + 4y^3 = 0 \\ 4y^3 + 4(x-y) = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava che $x = -y$ e quindi dalla seconda $4y(y^2 - 2) = 0$. Per cui le soluzioni sono $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. La matrice Hessiana è

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo

$$H_f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = H_f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}.$$

che è definita positiva, per cui i due punti sono di minimo locale, ma

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

ha determinante 0 e quindi almeno uno dei due autovalori è 0 (la traccia in questo caso non aiuta). Per stabilire la natura del punto $(0,0)$, si può studiare il segno di f per capire se il punto in questione è di sella: si osservi che

$$f(x,x) = 2x^4 + 2$$

e quindi $(0,0)$ risulta di minimo per f ristretta alla retta $x = y$, mentre risulta di massimo per f ristretta alla retta $x = -y$. Infatti

$$f(x,-x) = 2x^4 - 8x^2 + 2,$$

che ha un massimo in $x = 0$ ($\frac{d}{dx}(2x^4 - 8x^2 + 2)|_{x=0} = 0$, $\frac{d^2}{dx^2}(2x^4 - 8x^2 + 2)|_{x=0} = -16$). Si conclude che $(0,0)$ è un punto di sella per f.

Soluzione 6.37 La funzione data è di classe C^1 e il suo gradiente è dato da

$$\nabla f(x,y) = ((y^2 - y)(2x-1)e^{x^2-x}, (2y-1)e^{x^2-x});$$

quindi di punti stazionari, soluzioni di $\nabla f(x,y) = 0$, c'è solo il punto $(1/2, 1/2)$. Per classificarlo, scriviamo la matrice Hesiana di f

$$Hf(x,y) = e^{x^2-x} \begin{pmatrix} (y^2-y)(2+(2x-1)^2) & 2y-1 \\ 2y-1 & 2 \end{pmatrix}$$

che nel punto stazionario diventa

$$Hf(1/2,1/2) = e^{-1/4} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};$$

dato che i due autovalori di tale matrice sono dati da $-\frac{1}{2}e^{-1/4}$ e $2e^{-1/4}$, se ne deduce che il punto stazionario è un punto di sella.

Soluzione 6.38 La funzione data è di classe C^1 sull'insieme

$$E = \mathbb{R}^3 \setminus (\{x=0\} \cup \{y=0\} \cup \{z=0\})$$

che è $\mathbb{R}^3$ privato dei tre assi cartesiani; il gradiente della funzione è dato da

$$\nabla f(x,y,z) = \left(-\frac{1}{x^2} + yz, -\frac{1}{y^2} + xz, -\frac{1}{z^2} + xy\right).$$

Il sistema $\nabla f(x,y,z) = 0$ ha come soluzione i due punti $(1,1,1)$ e $(-1,-1,-1)$. Per la classificazione, calcoliamo la matrice Hessiana

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & z & y \\ z & \frac{2}{y^3} & x \\ y & x & \frac{2}{z^3} \end{pmatrix}.$$

In $(1,1,1)$ tale matrice diventa

$$A = Hf(1,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

dato che $A_1 = 2 > 0$, $\det A_2 = 3 > 0$ e $\det A = 4 > 0$, se ne deduce che A è definita positiva e quindi il punto $(1,1,1)$ è un punto di minimo locale stretto. Per quanto riguarda il punto $(-1,-1,-1)$ si ha che $Hf(-1,-1,-1) = -A$, e quindi la matrice è definita negativa, da cui il fatto che $(-1,-1,-1)$ è un punto di massimo locale stretto.

Soluzione 6.39 Al solito si devono calcolare le derivate parziali e le si annullano. Si ottiene

$$\begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ 4y^3 + 2y = 0 \\ 3z^2 - 2x \end{cases}$$

da cui si ottengono i punti $(0,0,0)$ e $(2/3, 0, 2/3)$. La matrice hessiana è data da

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 12y^2 + 2 & 0 \\ -2 & 0 & 6z \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$H_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Valutiamo i determinanti dei minori pricipali: $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 4$, $\Delta_3 = -8$. La matrice non è definita positiva e il prodotto degli autovalori (Δ_3) è negativo: gli autovalori potrebbero essere tutti negativi oppure due positivi e uno negativo. Ma $\Delta_1 > 0$ e $\Delta_2 > 0$, per cui due autovalori sono positivi (un altro invariante è la traccia della matrice, ossia la somma degli elementi sulla diagonale che corrisponde alla somma degli autovalori: poiché la somma è 4 anche da ciò si può dedurre che i tre autovalori non possono essere tutti negativi). Conclusione: $(0,0,0)$ non è né di massimo, né di minimo. I minori principali di

$$H_f(2/3, 0, 2/3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

hanno determinanti $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 4$, $\Delta_3 = 8$, per cui il punto $(2/3, 0, 2/3)$ è di minimo locale stretto.

Soluzione 6.40 Le derivate prime di f sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -24x^2 + 24xy + 2x - 2y - 6y^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 2y - 2x + 3y^2 - 12xy + 12x^2.$$

Esse si annullano in $(0,0)$, unico punto critico. Studiamo le derivate seconde. La matrice hessiana in $(0,0)$ è

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$

che ha determinante nullo: almeno uno dei due autovalori è nullo. In realtà solo uno degli autovalori é nullo visto che la traccia è positiva, ma questo non ci aiuta a capire la natura del punto. Gli autovalori dovrebbero essere 0 e 4 dato che il determinante è 0 e la traccia 4, ma in dimensione più alta non è possibile determinare gli autovalori in questo modo (se conosco la somma e il prodotto di n numeri posso determinare gli n numeri solo se $n = 2$). Calcoliamo allora il polinomio caratteristico e le sue radici:

$$P(\lambda) = (2 - \lambda)(2 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 4\lambda.$$

Le radici sono 0 e 4. Gli autospazi: relativamente a $\lambda = 0$ si ha:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

che fornisce la retta $y = x$. Non è importante calcolare l'altro, perché l'autovalore è positivo e la funzione ristretta all'autospazio relativo all'autovalore 4 é convessa. Bisogna capire che cosa succede restringendo la funzione alla retta $y = x$; valutiamo

$$f(x, x) = -x^3$$

funzione non è convessa, per cui il punto $(0, 0)$ non è di minimo. Se la funzione fosse più complessa, si dovrebbe eseguire lo studio delle derivate successive di $f(x, x)$ per $x = 0$.

Soluzione 6.41 Derivando f si ottiene che l'unico punto critico è $(0, 0, 0)$. La matrice Hessiana in quel punto è data da

$$H_f(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 3/2 & 7 & 0 \\ 7 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che ha determinante nullo, per cui almeno uno degli autovalori è nullo. La traccia positiva, ma non possiamo determinare il segno dei due autovalori (potrebbero essere tutti e due positivi oppure uno positivo e l'altro nullo, non entrambi negativi). Il polinomio caratteristico è:

$$P(\lambda) = \lambda\big[(3/2 - \lambda)(16 - \lambda) - 49\big],$$

che si annulla per $\lambda = 0$ e per

$$\lambda = \frac{35 \pm \sqrt{1625}}{4};$$

abbiamo quindi un autovalore positivo e uno negativo. Concludiamo che lungo una direzione la funzione è concava, lungo un'altra è convessa e non c'è bisogno di verificare il comportamento della funzione lungo l'autospazio relativo all'autovalore nullo.

Capitolo 7

Campi; lavori e flussi

Esercizio 7.1 Date le funzioni

$$f(x, y, z) = 4x^2 y \cos(yz), \qquad F(x, y, z) = (2x^2, \sin y, e^{z^2}),$$

si determino le funzioni Δf, $\mathrm{rot}F$ e $\mathrm{div}F$.

Esercizio 7.2 Si calcolino divergenza e rotore per i seguenti campi vettoriali:

$$F(x, y, z) = (y, x, 0), \qquad F(x, y, z) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3}(x, y, z),$$

Esercizio 7.3 Calcolare l'integrale della funzione

$$f(x, y) = xy$$

lungo la curva $\gamma(t) = (t, t^2)$, $t \in [0, 1]$.

Esercizio 7.4 Calcolare l'integrale della funzione

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2$$

lungo la curva $\varrho = e^{2\theta}$ con $\theta \in (-\infty, 0]$.

Esercizio 7.5 Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\varphi f ds$$

per le seguenti funzioni e curve:

1. $f(x, y) = e^{x+y}$, $\varphi(t) = (t, t - 1)$, $t \in [1, 2]$;
2. $f(x, y) = xy$, $\varphi(t) = (t, t^2)$, $t \in [0, 1]$;

3. $f(x,y) = \frac{x}{1+y^2}$, $\varphi(t) = (\cos t, \text{sen} t)$, $t \in [0, \pi/2]$;
4. $f(x,y) = \sqrt{1+4x^2} + 3y$, $y = x^2$, $x \in [0,1]$;
5. $f(x,y) = x^2$, $y = x^2 + \ln x$, $x \in [1,2]$;
6. $f(x,y) = (x^2+y^2)^2$, $\varrho = e^{2\theta}$ con $\theta \in (-\infty, 0]$;
7. $f(x,y,z) = e^{2z}$, $\varphi(t) = (\cos \ln t, \text{sen} \ln t, \ln t)$, $t \in [1, e^2]$;
8. $f(x,y,z) = \sqrt{z}$, $\varphi(t) = (\cos t, \text{sen} t, t^2)$, $t \in [0, \pi]$.

Esercizio 7.6 Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\varphi F \cdot d\vec{s}$$

dove:

1. $F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ e $\varphi(t) = (\cos t, \text{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$;
2. $F(x,y,z) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{2y}{x^2+y^2+z^2} + 1, \frac{2z}{x^2+y^2+z^2} + 3\right)$, $\varphi(t) = (\cos t, \text{sen} t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$;
3. il campo del punto precedente ma con $\varphi(t) = (\cos t, \text{sen} t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Esercizio 7.7 Dato il campo

$$F(x,y,z) = (x - xe^z, -z, e^z),$$

si dica se è conservativo ed in caso affermativo se ne determini un potenziale.

Esercizio 7.8 Utilizzare il Teorema della divergenza per calcolare l'area della porzione di piano racchiusa dall'asteroide, cioé la curva $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ parametrizzata da

$$r(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t).$$

Esercizio 7.9 Utilizzare il Teorema della divergenza per calcolare l'area della porzione di piano racchiusa dall'asteroide, cioé la curva $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ parametrizzata da

$$r(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t).$$

Esercizio 7.10 Calcolare il flusso del campo $F(x,y,z) = (xy, xy, z)$ passante per la superficie

$$\Sigma = \{(x,y,z) : z = 1 - x^2 - y^2, z \geq 0\}.$$

Esercizio 7.11 Calcolare il flusso del campo

$$F(x,y,z) = (x,y,z)$$

uscente dalla superficie della sfera $\Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$.

Esercizio 7.12 Si determini il flusso del campo

$$F(x,y,z) = \frac{kq}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}(x,y,z), \qquad k,q>0$$

uscente dalla superficie $\Sigma = \{y = a, x^2 + z^2 \leq R^2\}$, $a > 0$.

Esercizio 7.13 Si determini il flusso del campo

$$F(x,y,z) = (y,z,-x)$$

uscente dalla superficie $\Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$.

Esercizio 7.14 Si determini il flusso del campo

$$F(x,y,z) = (x,-y,z)$$

uscente dalla superficie del cilindro $\Sigma = \partial E$ con $E = \{x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h\}$.

Esercizio 7.15 Dire se il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

è conservativo o meno e, in caso affermativo, calcolarne il potenziale.

Esercizio 7.16 Dire se il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{2x+y}{(x^2+xy)^{2/3}}, \frac{x}{(x^2+xy)^{2/3}} + 2y\right)$$

è conservativo o meno e, in caso affermativo, calcolarne il potenziale.

Esercizio 7.17 Dimostrare che il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(\frac{2xz-y}{x^2+y^2}, \frac{x+2yz}{x^2+y^2}, \log(x^2+y^2)\right)$$

non è conservativo ma è dotato di potenziali locali.

Esercizio 7.18 Verificare che il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{2y}{x^2+y^2+z^2} + 1, \frac{2z}{x^2+y^2+z^2} + 3\right)$$

è conservativo e determinarne i potenziali.

Esercizio 7.19 Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int_\Sigma \frac{z+y^2}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}} d\sigma$$

dove

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2, x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + 4y^2 \leq 4\}.$$

Esercizio 7.20 Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int_\Sigma \frac{x}{\sqrt{4z+1}} d\sigma$$

dove Σ è la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 - y \leq 0, y \geq 1/2, x \geq 0\}.$$

Esercizio 7.21 Calcolare il flusso del campo

$$F(x, y, z) = (x^3 e^{-z}, 3xz, 3x^2 e^{-z})$$

uscente dall'emisfero superiore della sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$.

Esercizio 7.22 Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (x^2, y, z)$$

uscente dal tetraedro $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$.

Esercizio 7.23 Calcolare il flusso del campo

$$F(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3}(x, y, z)$$

uscente da una qualsiasi superficie chiusa contenente all'interno l'origine (Legge di Gauss).

Esercizio 7.24 Calcolare il flusso del campo

$$F(x, y, z) = (x + y, z - y, x^3 y)$$

sulla superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 4\}$.

7.1 Soluzioni

Soluzione 7.1 Con un conto diretto troviamo che

$$\begin{aligned}
\Delta f(x, y, z) =& \operatorname{div} \nabla f(x, y, z) \\
=& \operatorname{div}(8xy \cos(yz), 4x^2 \cos(yz) - 4x^2 yz \sin(yz), -4x^2 y^2 \sin(yz)) \\
=& (8y - 4x^2 yz^2 - 4x^2 y^3) \cos(yz) - 8x^2 z \sin(yz),
\end{aligned}$$

mentre per il campo F si ha che

$$\operatorname{rot} F(x, y, z) = 0, \qquad \operatorname{div} F(x, y, z) = 4x + \cos y + 2ze^{z^2}.$$

Soluzione 7.2 Il primo campo è definito ed è regolare in tutto $\mathbb{R}^3$; per quanto riguarda la divergenza abbiamo

$$\mathrm{div}F(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}y + \frac{\partial}{\partial y}x + \frac{\partial}{\partial z}0 = 0,$$

mentre per quanto riguarda il rotore abbiamo

$$\mathrm{rot}F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y & x & 0 \end{pmatrix} = (0,0,1-1) = 0.$$

Quindi il campo ha sia divergenza che rotore nullo. Quest'ultimo fatto, unito al fatto che il dominio di F è semplicemente connesso, implica che il campo è conservativo; per cercare il potenziale di F, bisogna risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x} = F_1(x,y,z) = y \\ \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y} = F_2(x,y,z) = x \\ \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z} = F_3(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

Integrando la prima equazione si ottiene che

$$U(x,y,z) = yx + c,$$

dove c è una costante per x (cioè la derivata parziale rispetto ad x è nulla), ma in generale non per y e z; scriveremo quindi $c = c(y,z)$. Sostituendo l'espressione di U appena trovata nella seconda equazione, si trova

$$x + \frac{\partial c(y,z)}{\partial y} = x,$$

da cui $c(y,z) = c(z)$ in quanto la sua derivata parziale rispetto ad y si annulla. Infine, sostituendo nella terza equazione troveremo che $c(z) = c$, cioè c è una costante pura. Abbiamo quindi che il potenziale è dato da

$$U(x,y,z) = xy + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Per quanto riguarda il secondo campo, il suo dominio è $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$; la sua divergenza è data da

$$\mathrm{div}F(x,y,z) = -\frac{3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} + \frac{3x^2+3y^2+3z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^5} = 0,$$

mentre il rotore è dato da

$$\mathrm{rot}F(x,y,z) = \left(\frac{3yz-3zy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^5}, \frac{3xz-3zx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^5}, \frac{3yx-3xy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^5} \right) = 0,$$

quindi anche questo campo ha sia divergenza che rotore nullo. In particolare, siccome anche in questo caso il dominio del campo è semplicemente connesso, avremo che il campo è conservativo e il suo potenziale, come mostra un conto diretto, è dato da

$$U(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Soluzione 7.3 La curva è data da $\gamma(t) = (t, t^2)$, quindi $\gamma'(t) = (1, 2t)$, da cui

$$\int_\gamma f = \int_0^1 f(t,t^2)|\gamma'(t)|dt = \int_0^1 t^3\sqrt{1+4t^2}dt = \frac{5\sqrt{5}}{24} + \frac{1}{120}.$$

Soluzione 7.4 La curva in questione è data da $\gamma(\theta) = (e^{2\theta}\cos\theta, e^{2\theta}\sin\theta)$, e quindi l'integrale diventa

$$\int_\gamma f = \int_{-\infty}^0 e^{10\theta}\sqrt{5}d\theta = \frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

Soluzione 7.5

1. Si tratta semplicemente di usare la formula

$$\int_\varphi f ds = \int_1^2 f(\varphi(t))\|\varphi'(t)\|dt = \int_1^2 f(t,t-1)\|(1,1)\|dt = \sqrt{2}\int_1^2 e^{2t-1}dt = \frac{e(e^2-1)}{\sqrt{2}}.$$

2. La curva è data da $\varphi(t) = (t, t^2)$, quindi $\varphi'(t) = (1, 2t)$, da cui

$$\int_\varphi f = \int_0^1 f(t,t^2)\|\varphi'(t)\|dt = \int_0^1 t^3\sqrt{1+4t^2}dt = \frac{5\sqrt{5}}{24} + \frac{1}{120}.$$

3. Si ha che

$$\int_\varphi f ds = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{1+\mathrm{sen}^2 t}dt = [\arctan \mathrm{sen} t]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

4. Si ha che

$$\int_\varphi f ds = \int_0^1 (\sqrt{1+4x^2} + 3x^2)\sqrt{1+4x^2}dx = \frac{7}{3} + \frac{27\sqrt{5}}{32} - \frac{3\,\mathrm{arcsenh}\,2}{64}.$$

5. Si ottiene che

$$\int_\varphi f ds = \int_1^2 x^2\|(1, 2x+1/x)\|dx = \int_1^2 x\sqrt{4x^4+5x^2+1}dx =$$
$$= \frac{1}{128}\left(-52\sqrt{10} + 148\sqrt{85} + 9\ln(13+4\sqrt{10}) - 9\ln(37+4\sqrt{85})\right)$$

6. La curva in questione è data da $\varphi(\vartheta) = (e^{2\vartheta}\cos\vartheta, e^{2\vartheta}\mathrm{sen}\vartheta)$, e quindi l'integrale diventa

$$\int_\varphi f ds = \int_{-\infty}^0 e^{10\vartheta}\sqrt{5}d\vartheta = \frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

7. Si ha che

$$\int_\varphi f ds = \int_1^{e^2} e^{2\ln t}\left\|\left(-\frac{\mathrm{sen}\ln t}{t}, \frac{\cos\ln t}{t}, \frac{1}{t}\right)\right\|dt$$
$$= \int_1^{e^2} \sqrt{2}t dt = \frac{e^4-1}{\sqrt{2}}.$$

8. Si ottiene

$$\int_{\varphi} f ds = \int_0^{\pi} t\sqrt{1+4t^2} = \int_0^{\pi} t\sqrt{1+4t^2}dt = \frac{(1+4\pi^2)^{3/2}-1}{12}.$$

Soluzione 7.6

1. Dalla definizione di integrale curvilineo per campi vettoriali, si ottiene

$$\begin{aligned}\int_{\varphi} F\cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} F(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = \int_0^{2\pi} F(\cos t, \text{sen}t)\cdot(-\text{sen}t, \cos t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\text{sen}^2 t + \cos^2 t)dt = 2\pi.\end{aligned}$$

2. Si ottiene

$$\begin{aligned}\int_{\varphi} F\cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} F(\cos t, \text{sen}t, 0)\cdot(-\text{sen}t, \cos t, 0)dt \\ &= \int_0^{2\pi} (2\cos t, 2\text{sen}t+1, 3)\cdot(-\text{sen}t, \cos t, 0)dt = 0.\end{aligned}$$

3. Si ottiene

$$\begin{aligned}\int_{\varphi} F\cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} F(\cos t, \text{sen}t, t)\cdot(-\text{sen}t, \cos t, 1)dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{2\cos t}{1+t^2}, \frac{2\text{sen}t}{1+t^2}+1, \frac{2t}{1+t^2}+3\right)\cdot(-\text{sen}t, \cos t, 1)dt \\ &=. \int_0^{2\pi} \left(3+\cos t+\frac{2t}{1+t^2}\right)dt = 6\pi + \ln(1+4\pi^2).\end{aligned}$$

Soluzione 7.7 Per il campo dato si verifica che

$$\text{rot}F(x,y,z) = (-1, 1-xe^z, 0),$$

quindi la condizione necessaria affinchè il campo sia conservativo non è verificata, quindi il campo non può essere conservativo e di conseguenza non può ammettere potenziale.

Soluzione 7.8 Per il calcolo dell'area della regione E racchiusa dall'astroide utilizziamo la formula

$$\int_E \text{div}F(x,y)dxdy = \int_{\gamma} F\cdot\hat{n}d\gamma$$

dove $\gamma = \partial E$ e $\hat{n}$ é la normale a γ uscente da E. Per semplicitá, prendiamo come F il campo con divergenza 1 dato da $F(x,y) = (x,0)$; se utilizziamo la paremetrizzazione r data nel testo, la normale uscente dall'insieme sará data da

$$\hat{n}(t) = \frac{(3\sin^2 t\cos t, 3\cos^2 t\sin t)}{\|(3\sin^2 t\cos t, 3\cos^2 t\sin t)\|},$$

da cui, tenuto conto che $\|\hat{n}(t)\| = \|r'(t)\|$,

$$\begin{aligned}\text{Area}(E) &= \int_0^{2\pi} (\cos^3 t, 0) \cdot (3\sin^2 t \cos t, 3\cos^2 t \sin t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} 3\sin^2 t \cos^4 t dt = \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2(2t)\left(\frac{1+\cos(2t)}{2}\right) dt = \frac{3\pi}{8}.\end{aligned}$$

Soluzione 7.9 Il rotore del campo dato é $\text{rot}F(x, y, z) = (-1, 1, -1)$ e la superficie data é il grafico

$$z = \sqrt{R^2 - x^x - y^2}, \qquad (x, y) \in D = \{x^2 + y^2 \leq R^2\};$$

il flusso sará quindi dato da

$$\begin{aligned}\Phi(\text{rot}F, \Sigma) &= \int_\Sigma \text{rot}F \cdot \hat{n}_\Sigma d\Sigma = \int_D (-1, 1, -1) \cdot (-\nabla g(x, y), 1) dxdy \\ &= \int_D \left(-\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} + \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} - 1\right) dxdy = -\int_D dxdy \\ &= -\text{Area}(D) = -\pi R^2.\end{aligned}$$

Il conto si puó anche effettuare applicando il Teorema di Stokes, cioé

$$\int_\Sigma \text{rot}F \cdot \hat{n} d\Sigma = \int_\gamma F \cdot d\vec{s},$$

dove γ é la curva che descrive il bordo di Σ, con orientazione indotta dall'orientazione di Σ. Siccome Σ é orientata con la normale verso l'alto, γ é la circonferenza di raggio R contenuta nel piano $z = 0$ orientata in senso antiorario, cioé parametrizzata dalla solita funzione

$$r(t) = (R\cos t, R\sin t, 0).$$

Otteniamo quindi che

$$\begin{aligned}\int_\gamma F \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} F(R\cos t, R\sin t, 0) \cdot (-R\sin t, R\cos t, 0) dt \\ &= -\int_0^{2\pi} R^2 \sin^2 t dt = -\pi R^2.\end{aligned}$$

Soluzione 7.10 La superficie Σ è il grafico della funzione $g(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ sul dominio $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ (si ricava dalla condizione $z \geq 0$); per il calcolo del flusso, possiamo quindi utilizzare la parametrizzazione cartesiana $(x, y, g(x, y))$ e, non essendo specificata l'orientazione di Σ, scegliamo l'orientazione per la quale ν_Σ punti verso l'alto. Troveremo quindi che

$$\begin{aligned}\Phi(F, \Sigma) &= \int_D F(x, y, g(x, y)) \cdot (-\nabla g(x, y), 1) dxdy \\ &= \int_D (xy, xy, 1 - x^2 - y^2) \cdot (2x, 2y, 1) dxdy \\ &= \int_D (2x^y + 2xy^2 + 1 - x^2 - y^2) dxdy = \int_D (1 - x^2 - y^2) dxdy \\ &= 2\pi \int_0^2 (1 - \varrho^2) \varrho d\varrho = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Soluzione 7.11 Il flusso può essere calcolato in due modi; il primo è mediante la definizione

$$\Phi(F,\Sigma) = \int_\Sigma F \cdot \hat{n}_\Sigma d\Sigma = \int_\Sigma (x,y,z) \cdot \frac{1}{R}(x,y,z) d\Sigma = R\text{Area}(\Sigma) = 4\pi R^3,$$

dove si è tenuto conto che il vettore

$$\hat{n}_\Sigma(x,y,z) = \frac{1}{R}(x,y,z)$$

descrive il versore normale a Σ nel punto $(x,y,z) \in \Sigma$ in quanto $\|(x,y,z)\| = R$. Il secondo metodo è utilizzare il Teorema della divergenza e scrivere

$$\Phi(F,\Sigma) = \int_{B_R(0)} \text{div}F(x,y,z)dxdydz = 3\text{Vol}(B_R(0)) = 4\pi R^3$$

in quanto $\text{div}F(x,y,z) = 3$.

Soluzione 7.12 Calcoliamo il flusso usando la definizione (in questo caso, la superficie Σ non è un bordo di un insieme, quindi non possiamo usare il Teorema della divergenza);

$$\Phi(F,\Sigma) = \int_\Sigma F \cdot \hat{n}_\Sigma d\Sigma.$$

Come normale alla superficie Σ, in quanto quest'ultima è contenuta nel piano $y = a$, possiamo prendere $\hat{n}_\Sigma(x,y,z) = (0,1,0)$; in questo modo stiamo considerando la parametrizzazione

$$r(x,z) = (x,a,z), \qquad x^2 + z^2 \le R^2.$$

L'integrale di superficie diventa quindi

$$\begin{aligned}\Phi(F,\Sigma) = &\int_{\{x^2+z^2 \le R^2\}} \frac{kqa}{\sqrt{x^2+z^2+a^2}^3} dxdz = kqa \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^R \frac{\varrho}{\sqrt{a^2+\varrho^2}^3} d\varrho \\ =&2\pi kq \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}\right).\end{aligned}$$

Soluzione 7.13 Anche in questo caso, la superficie non è il bordo di un insieme e quindi utilizziamo direttamente la definizione di flusso:

$$\Phi(F,\Sigma) = \int_\Sigma (y,z,-x) \cdot \frac{1}{R}(x,y,z) d\Sigma = \frac{1}{R} \int_\Sigma (yx + yz - xz) d\Sigma.$$

Per il calcolo di quest'ultimo integrale, possiamo passare alle coordinate sferiche oppure vedere Σ come il grafico della funzione $z = g(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$; utilizzeremo questo secondo approccio.

$$\begin{aligned}\Phi(F,\Sigma) =&\frac{1}{R} \int_{\{x^2+y^2 \le R^2\}} \left(yx + (y-x)\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right) \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dxdy \\ =& \int_{\{x^2+y^2 \le R^2\}} \left(\frac{xy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} + y - x\right) dxdy = 0\end{aligned}$$

in quanto le funzioni da integrare sono dispari sia rispetto ad x che rispetto a y.

Il conto precedente poteva essere semplificato come segue; se è vero che Σ non è il bordo di un insieme, è però vero che è parte del bordo dell'insieme $E = \{x^2+y^2+z^2 = R^2, z \geq 0\}$; l'atra parte del bordo di E è costituito dalla superficie $S = \{x^2 + y^2 \leq R^2, z = 0\}$, e quindi dal teorema della divergenza

$$\int_{\Sigma \cup S} F \cdot \hat{n} d\Sigma = \int_E \mathrm{div} F(x, y, z) dxdydz = 0$$

in quanto $\mathrm{div}F = 0$, e quindi, tenendo presente che S è contenuta nel piano $z = 0$ e che $(0, 0, 1)$ è un vettore normale ad S ma entrante in E (e non uscente), se ne deduce che

$$\Phi(F, \Sigma) = \int_S F \cdot (0, 0, 1) dxdy = -\int_S x dxdy = 0.$$

Soluzione 7.14 Possiamo calcolare l'integrale più semplicemente utilizzando il Teorema della divergenza, in quanto

$$\Phi(F, \Sigma) = \int_E \mathrm{div} F(x, y, z) dxdydz = \mathrm{Vol}(E) = \pi h R^2$$

in quanto $\mathrm{div}F = 1$. Verifichiamo tale identità calcolando l'integrale di superficie dividento $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$ con

$$\Sigma_1 = \{x^2 + y^2 = R^2, 0 \leq z \leq h\}, \qquad \Sigma_2 = \{x^2 + y^2 \leq R^2, z = 0\},$$

$$\Sigma_3 = \{x^2 + y^2 \leq R^2, z = h\}.$$

Su Σ_1 utilizzeremo il campo $\hat{n}_\Sigma = \frac{1}{R}(x, y, 0)$, mentre su Σ_2 il campo $\hat{n}_\Sigma = (0, 0, -1)$ e infine su Σ_3 il campo $\hat{n}_\Sigma = (0, 0, 1)$. Otteniamo quindi che

$$\begin{aligned}
\Phi(F, \Sigma) =& \int_{\Sigma_1} F \cdot \frac{1}{R}(x, y, 0) d\Sigma + \int_{\Sigma_2} F \cdot (0, 0, -1)\Sigma + \int_{\Sigma_3} F \cdot (0, 0, 1) d\Sigma \\
=& \frac{1}{R} \int_{\Sigma_1} (x^2 - y^2) d\Sigma - \int_{\Sigma_2} z d\Sigma + \int_{\Sigma_3} z d\Sigma \\
=& \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^h (R^2 \cos^2\vartheta - R^2 \mathrm{sen}^2\vartheta) dt + \pi h R^2 = \pi h R^2.
\end{aligned}$$

Per il calcolo dell'integrale su Σ_1 abbiamo utilizzato la parametrizzazione

$$r(\vartheta, t) = (R\cos\vartheta, R\mathrm{sen}\vartheta, t), \qquad \vartheta \in [0, 2\pi), t \in [0, h],$$

per la quale si ha che $\|r_\vartheta \times r_t\| = R$.

Soluzione 7.15 Se si considera il cammino chiuso $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, si ottiene che

$$\int_\gamma \langle F, ds \rangle = 2\pi,$$

e quindi il campo risulta non essere conservativo. Otteniamo però che $\text{rot}F = 0$, quindi F ammette potenziale locale U; per calcolare tale potenziale bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2+y^2} \\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{cases}$$

che ha per soluzione, integrando la prima rispetto a x e sostituendo nella seconda, la funzione

$$U(x,y) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + c.$$

Il campo ammette quindi potenziale locale, ma il dominio è dato da $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ che non è semplicemente connesso; per rendere il campo conservativo, dovremmo rendere il dominio semplicemente connesso, cosa che può essere fatta se consideriamo ad esempio il dominio

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\}.$$

Soluzione 7.16 Notare che il dominio del campo è dato da

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : x = 0 \text{ o } y = -x\},$$

che è semplicemente connesso anche se non connesso. Quindi per vedere se il campo è conservativo basta e serve che si abbia $\text{rot}F = 0$, cosa facilmente verificata. Per trovare il potenziale U, bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{2x+y}{(x^2+xy)^{2/3}} \\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{x}{(x^2+xy)^{2/3}} + 2y \end{cases}$$

che ammette per soluzione la funzione

$$U(x,y) = 3(x^2+xy)^{2/3} + y^2 + c$$

con la costante c che può assumere valori diversi su ogni componente connessa.

Soluzione 7.17 Si noti che preso il cammino chiuso $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ si ha

$$\int_\gamma \langle F, ds \rangle = 2\pi,$$

e quindi il campo non è conservativo. Però si ha che $\text{rot}F = 0$, e quindi il campo ammette potenzile locale, che si ricava essere

$$U(x,y,z) = z\ln(x^2+y^2) - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + c.$$

Soluzione 7.18 Il dominio è semplicemente connesso e rot$F = 0$, quindi il campo è conservativo. Il potenziale infine è dato dalla funzione

$$U(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2) + y + 3z + c.$$

Soluzione 7.19 L'integrale che si vuole calcolare è l'integrale della funzione

$$f(x, y, z) = \frac{z + y^2}{\sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}}$$

sulla superficie, data come grafico della funzione

$$z = g(x, y) = x^2 - y^2$$

sul dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + 4y^2 \leq 4\}.$$

Usando quindi la definizione di integrale superficiale, si ottiene che

$$d\sigma = \sqrt{1 + |\nabla g(x, y)|^2} dxdy = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dxdy,$$

da cui

$$\begin{aligned} \int_\Sigma \frac{z + y^2}{\sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}} d\sigma &= \int_D \frac{x^2 - y^2 + y^2}{\sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}} \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dxdy \\ &= \int_D x^2 dxdy = \frac{7}{4}\pi. \end{aligned}$$

Soluzione 7.20 La superficie sulla quale si vuole calcolare l'integrale è dato dal grafico della funzione

$$z = g(x, y) = x^2 + y^2$$

con $(x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - y \leq 0\,,\ y \geq 1/2\,,\ x \geq 0\}$. Quindi otteniamo che

$$d\sigma = \sqrt{1 + |\nabla g(x, y)|} dxdy = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dxdy$$

e l'integrale di superficie diventa quindi

$$\int_D \frac{x}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dxdy = \int_D x dxdy = \frac{1}{24}.$$

Soluzione 7.21 Per calcolare il flusso di tale campo si puó procedere in due modi, o scrivendo l'integrale di superficie, oppure cercare di applicare il Teorema della divergenza in $\mathbb{R}^3$. Lasciamo il primo caso come esercizio e vediamo come procedere nel secondo caso. Per poter applicare il Teorema dalla divergenza dobbiamo avere a che fare con superfici chiuse, quindi, siccome nel nostro caso abbiamo solo l'emisfero superiore E della sfera $x^2+y^2+z^2 = 16$, dobbiamo prima di tutto chiudere tale superficie; il modo più semplice per fare ciò è considerare l'insieme

$$S = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 16\}.$$

A questo punto abbiamo che, se

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 16\},$$

allora $\partial A = E \cup S$ e quindi

$$\int_{E\cup S} F \cdot \nu d\sigma = \int_{\partial A} F \cdot \nu d\sigma = \int_A \mathrm{div} F dxdydz.$$

Quindi, dato che $\mathrm{div} F = 0$,

$$\int_E F \cdot \nu d\sigma = -\int_S F \cdot \nu d\sigma.$$

Ma su S si ha che $F(x, y, 0) = (x^3, 0, 3x^2)$, $\nu = (0, 0, -1)$ e $d\sigma = dxdy$, quindi

$$\int_S F \cdot \nu d\sigma = -\int_{x^2+y^2\leq 16} 3x^2 dxdy = -192\pi;$$

in definitiva abbiamo trovato che

$$\int_E F \cdot \nu d\sigma = -192\pi.$$

Soluzione 7.22 Utilizzando il Teorema della divergenza, tenendo presente che

$$\mathrm{div} F(x, y, z) = 2x + 2,$$

otteniamo che

$$\begin{aligned} \int_{\partial T} F \cdot \nu d\sigma &= \int_T \mathrm{div} F dxdydz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (2x + 2) dz = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

Per controllare che tale risultato sia giusto, si potrebbe calcolare l'integrale di superficie del campo vettoriale F.

Soluzione 7.23 Notiamo anzitutto che il campo dato ha la proprietà che $\mathrm{div} F(x, y, z) = 0$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Questo vuol dire che se T è un qualsiasi dominio che non contiene l'origine, si ha che

$$\int_{\partial T} F \cdot \nu d\sigma = 0.$$

A questo punto, se $\Sigma = \partial A$ è una qualsiasi superficie chiusa che contiene al suo interno l'origine, non possiamo concludere che il flusso sia nullo in quanto la singolarità del campo F cade proprio nella porzione di spazio racchiusa dalla superficie Σ. Siccome l'origine è un punto interno a Σ, esisterà un raggio R tale che la palla $B_R(0)$ è tutta contenuta all'interno di Σ consideriamo quindi la porzione di spazio $T = A \setminus B_R(0)$, abbiamo che $\partial T = \Sigma \cup \partial B_R(0)$ e a questo punto l'origine non è più all'interno di T, quindi

$$0 = \int_T \mathrm{div} F dxdydz = \int_\Sigma F \cdot \nu d\sigma - \int_{\partial B_R(0)} F \cdot \nu d\sigma$$

dove il segno meno nell'ultimo integrale tiene conto che ν è la normale esterna alla palla $B_R(0)$ che però rappresenta in tali punti la normale entrante nella regione T. Quindi

$$\int_\Sigma F \cdot \nu d\sigma = \int_{\partial B_R(0)} F \cdot \nu d\sigma;$$

su $\partial B_R(0)$ abbiamo che il campo si scrive

$$F(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{R^3}$$

mentre la normale uscente da $B_R(0)$ si scrive come

$$\nu(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{R}.$$

Per calcolare l'integrale utilizziamo le coordinate polari e tenendo presente che

$$d\sigma = R^2 \mathrm{sen}\varphi d\varphi d\vartheta,$$

otteniamo che

$$\int_{\partial B_R(0)} F \cdot \nu d\sigma = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2} R^2 \mathrm{sen}\varphi d\vartheta = 4\pi.$$

Soluzione 7.24 Notiamo anzitutto che $\mathrm{div}F = 0$, quindi possiamo provare ad applicare il Teorema della divergenza; per fare questo dobbiamo considerare una superficie chiusa, dobbiamo cioè chiudere la superficie data. Per fare questo possiamo ad esempio considerare la superficie

$$S = \{(x,y,4) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 4\}.$$

Se poniamo

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 4, x^2 + y^2 \le 4\}$$

abbiamo che $\partial A = S \cup \Sigma$, e quindi dalla condizione $\mathrm{div}F = 0$ si ricava che

$$\int_\Sigma F \cdot \nu d\sigma = -\int_S F \cdot \nu d\sigma.$$

Ma su S la normale uscente è data dal vettore $(0,0,1)$ e $d\sigma = dxdy$, quindi

$$\int_\Sigma F \cdot \nu d\sigma = \int_{x^2+y^2 \le 4} x^3 y dxdy = 0.$$

Capitolo 8

Successioni e serie di funzioni

8.1 Successioni di funzioni

Esercizio 8.1 Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{nx}{n^2 + x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 8.2 Studiare convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \chi_{[0,n]}(x) + \frac{2n}{n+x}\chi_{(n,+\infty)}(x), \qquad x \in [0, +\infty).$$

Esercizio 8.3 Studiare convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 8.4 Studiare convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n^2}\right), \qquad x \in [0, +\infty).$$

Esercizio 8.5 Studiare convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \arctan(nx), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 8.6 Studiare convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{x+n}{x^2+n}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 8.7 Si studi la convergenza puntuale ed uniforme in $[-1, 1]$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = n \log\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

Esercizio 8.8 Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^2}{x+n} \sin nx dx.$$

8.2 Serie di funzioni

Esercizio 8.9 Studiare convergenza puntuale, uniforme e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \log\left(1 + \frac{x}{n^2}\right), \quad x \geq 0.$$

Esercizio 8.10 Studiare la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k}.$$

Esercizio 8.11 Studiare convergenza puntuale, uniforme e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+x}{n^3x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 8.12 Studiare convergenza puntuale, uniforme e totale delle serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^x} \qquad x \geq 0.$$

Esercizio 8.13 Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+n^2}{x^2+n^4}.$$

Esercizio 8.14 Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+n}{x^2+n^4+\log n}.$$

Esercizio 8.15 Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n+x^2)}.$$

Esercizio 8.16 Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1+|x|^n n^2}.$$

Esercizio 8.17 Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{sen} x + n}{n^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 8.18 Studiare convergenza puntuale, uniforme e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} e^{-nx}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

8.3 Serie di potenze

Esercizio 8.19 Studiare convergenza puntuale, uniforme e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}.$$

Calcolarne quindi la somma.

Esercizio 8.20 Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}.$$

Esercizio 8.21 Studiare la convergenza della seguente serie e calcolarne la somma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n-3)\left(\frac{x+1}{x}\right)^n.$$

Esercizio 8.22 Studiare la convergenza e, ove converge, calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}\frac{x^n}{(1+x^2)^n}.$$

Esercizio 8.23 Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}x^n.$$

Esercizio 8.24 Studiare la convergenza e calcolare la somma di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right)x^n.$$

Esercizio 8.25 Studiare la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n}\right)x^n.$$

8.4 Serie di Taylor

Esercizio 8.26 Sviluppare in serie di Taylor in $x = 0$ la funzione $f(x) = \arctan x$ e studiarne la convergenza.

Esercizio 8.27 Calcolare lo sviluppo di Taylor nel punto $x = 1$ della funzione $\log x$ e calcolare il valore della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}.$$

Esercizio 8.28 Calcolare lo sviluppo in serie di Taylor intorno al punto $x = 0$ della funzione

$$f(x) = \log\Big(\frac{2+x}{1+x^2}\Big)$$

precisandone l'insieme di convergenza.

Esercizio 8.29 Scrivere lo sviluppo in serie di Taylor intorno al punto $x = 0$ della funzione

$$f(x) = (1+x)^{\alpha}.$$

Esercizio 8.30 Calcolare lo sviluppo in serie di Taylor intorno al punto $x = 0$ della funzione

$$f(x) = \frac{4-x}{x^2-5x+6}.$$

Esercizio 8.31 Trovare una serie di potenze la cui somma, in un opportuno intervallo, sia $\log(1+x-2x^2)$.

Esercizio 8.32 Mostrare che

$$\log\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Esercizio 8.33 Sfruttando l'identità

$$\frac{1}{1-e^{-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt},$$

dimostrare che la funzione $t^3/(e^t-1)$ è assolutamente integrabile in senso generalizzato in $[0,+\infty)$ e mostrare che

$$\int_0^{\infty}\frac{t^3}{e^t-1}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{6}{(n+1)^4}.$$

Esercizio 8.34 Dimostrare che la funzione $\frac{\log(1+t)}{t}$ è assolutamente integrabile in $[0,1]$ e calcolare

$$\int_0^1 \frac{\log(1+t)}{t}dt.$$

8.5 Serie di Fourier

Esercizio 8.35 Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier della funzione 2π-periodica definita in $[0, 2\pi]$ da

$$f(x) = x.$$

Esercizio 8.36 Calcolare lo sviluppo di Fourier della funzione $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = -\chi_{(-\pi,0]}(x) + \chi_{(0,\pi]}(x).$$

Studiarne le convergenze puntuale ed uniforme. Calcolare poi lo sviluppo di Fourier della funzione $g : (-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$.

Esercizio 8.37 Scrivere la serie di Fourier della funzione $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ e studiarne la convergenza.

Esercizio 8.38 Calcolare lo sviluppo di Fourier della funzione $f(x) = x^2$ con $x \in (-\pi, \pi]$. Studiarne le convergenze puntuale ed uniforme. Calcolare poi il valore della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Esercizio 8.39 Calcolare lo sviluppo di Fourier della funzione $f : (-1.1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x\chi_{[0,1]}(x)$$

e studiarne la convergenza. Calcolare poi la somma delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}.$$

Esercizio 8.40 Calcolare lo sviluppo di Fourier della funzione $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x\chi_{[0,\pi)}(x) - (x - 2\pi)\chi_{[\pi,2\pi)}(x)$$

studiarne la convergenza e calcolare il valore delle serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}.$$

Sfruttando lo sviluppo trovato, si scriva anche lo sviluppo in serie di Fourier della funzione

$$g(x) = -\chi_{(-\pi,0]}(x) + \chi_{(0,\pi]}(x).$$

Infine, scrivere uno sviluppo della stessa funzione f in soli seni.

Esercizio 8.41 Determinare lo sviluppo in serie di Fourier della funzione

$$f(x) = 1 - \frac{2|x|}{\pi}, \qquad x \in (-\pi, \pi].$$

Studiarne la convergenza puntuale e uniforme in $(-\pi, \pi]$ e calcolare la somma delle serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

Esercizio 8.42 Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier di soli coseni della funzione 2π–periodica definita in $[0, \pi]$ da

$$f(x) = x^2 - \pi x.$$

Esercizio 8.43 Scrivere le serie di Fourier in soli seni e in soli coseni della funzione $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ e discuterne la convergenza. Si utilizzi lo sviluppo in soli coseni per determinare le somme delle seguenti serie numeriche;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Dedurre da questo il valore dell'integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{t^3}{e^t - 1} dt.$$

8.6 Soluzioni

Soluzione 8.1 Iniziamo col notare che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{n^2 + x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x/n}{1 + x^2/n^2} = 0;$$

il limite puntuale è dato quindi dalla funzione $f \equiv 0$. Per controllare la convergenza uniforme, consideriamo la seguente successione di funzioni

$$g_n(x) = f_n(x) - f(x), \quad x \in I.$$

La verifica della convergenza uniforme si riduce quindi nel verificare che

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |g_n(x)| = 0.$$

Pertanto basta studiare la funzione g_n per ogni $n \in \mathbb{N}$, trovare gli estremi superiore e inferiore di tali funzioni,

$$S_n = \sup_{x\in I} g_n(x), \quad I_n = \inf_{x\in I} g_n(x),$$

tener presente che

$$\sup_{x\in I} |g_n(x)| = \max\{|I_n|, |S_n|\},$$

e verificare che questi tendano a zero per n che tende a infinito. Nel nostro caso essendo la funzione limite $f \equiv 0$, abbiamo $g_n = f_n$ e, siccome

$$\lim_{x\to\pm\infty} g_n(x) = 0^{\pm},$$

gli estremi superiore e inferiore saranno massimi e minimi, che potranno essere calcolati cercando gli zeri della derivata della funzione g_n (tali funzioni sono tutte derivabili). La derivata è data da

$$g_n'(x) = \frac{n(n^2-x^2)}{(n^2+x^2)^2},$$

che si annulla per $x = \pm n$; in tali punti si ha

$$g_n(-n) = -\frac{1}{2}, \quad g_n(n) = \frac{1}{2}.$$

Abbiamo quindi trovato che $S_n = 1/2$ e $I_n = -1/2$, e quindi

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x)| = \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

da cui si ricava che non ci può essere convergenza uniforme, almeno su tutto $\mathbb{R}$. Possiamo cercare di vedere se esistono sottoinsiemi non banali di $\mathbb{R}$ sui quali si abbia convergenza uniforme. Si nota che nel nostro caso il massimo e il minimo delle g_n vengono assunti nei punti $x = \pm n$, che tendono a $\pm\infty$; possiamo quindi provare a chiederci se per caso si ha convergenza uniforme sui sottoinsiemi limitati di $\mathbb{R}$, ad esempio su intervalli del tipo $[-a, a]$ con $a > 0$ (nel nostro esempio il fatto che stiamo cercando di vedere la convergenza uniforme su di un intervallo simmetrico rispetto all'origine non è un caso, ma è suggerito dal fatto che la successione delle f_n è costituita da funzioni dispari). Quindi, se $x \in [-a, a]$, abbiamo che

$$\left|\frac{nx}{n^2+x^2}\right| \le \frac{|x|}{n} \le \frac{a}{n}$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-a,a]} |g_n(x)| \le \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0,$$

da cui la convergenza uniforme sugli intervalli compatti di $\mathbb{R}$.

Soluzione 8.2 Nello studio della successione data si noti che $\forall x \in [0, +\infty)$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $n_0 \ge x$. Quindi, fissato tale $n_0 \in \mathbb{N}$, si ha che $f_n(x) = 1$ per ogni $n \ge n_0$, da cui la convergenza puntuale ad 1. Per quanto riguarda la convergenza uniforme, posto

$$g_n(x) = f_n(x) - 1 = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le n \\ \dfrac{n-x}{n+x} & x \ge n, \end{cases}$$

si ha che

$$\lim_{x\to+\infty} g_n(x) = -1,$$

mentre per $x > n$ abbiamo

$$g_n'(x) = -\frac{2n}{(n+x)^2} < 0,$$

da cui
$$S_n = \sup_{x\in[0,+\infty)} g_n(x) = 0, \quad I_n = \inf_{x\in[0,+\infty)} g_n(x) = -1$$
e quindi non si ha convergenza uniforme su $[0,+\infty)$. Ancora, si può provare a vedere se si ha convergenza uniforme sui sottoinsiemi limitati; consideriamo quindi l'intervallo $[0,a]$ con $a > 0$. Posto $n_0 = [a]+1$, si ha che per ogni $n \geq n_0$ e per ogni $x \in [0,a]$, $f_n(x) = 1$ e quindi $g_n(x) = 0$, da cui la convergenza uniforme su $[0,a]$.

Soluzione 8.3 Abbiamo anzitutto che per ogni $x \in \mathbb{R}$
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0,$$
e quindi la successione data converge puntualmente alla funzione $f \equiv 0$. Per quanto riguarda la convergenza uniforme, posto
$$g_n(x) = f_n(x) - f(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2},$$
abbiamo che
$$\lim_{x\to\pm\infty} g_n(x) = 0^\pm$$
mentre la derivata di g_n si annulla per $x = \pm 1/n$ e in corrispondenza di tali punti si ha $g(-1/n) = -1/2$, $g(1/n) = 1/2$; quindi non si può avere convergenza uniforme su tutto $\mathbb{R}$. Notiamo però che i punti di massimo e minimo per g_n sono assunti in punti sempre più vicini a 0. Possiamo vedere quindi se si ha convergenza uniforme sugli insieme della forma $A = (-\infty,-a] \cup [a,+\infty)$ con $a > 0$ (ancora una volta la simmetria dell'insieme è suggerita dalla disparità della funzione g_n); si nota quindi che su tali insiemi, se $1/n < a$ (quindi per n sufficientemente grande), si ha che g_n è monotona decrescente. Quindi
$$S_n = \sup_{x\in A} g_n(x) = g_n(a), \quad I_n = \inf_{x\in A} g_n(x) = g_n(-a).$$
Si vede facilmente poi che $S_n, I_n \to 0$ per $n \to +\infty$, da cui la convergenza uniforme su A. Osserviamo infine che i risultati del presente esercizio potevano essere ricavati da quelli dell'esercizio 1. effettuando la sostituzione $x = 1/y$.

Soluzione 8.4 Per quanto riguarda la convergenza puntuale si noti che $\forall x \in [0,+\infty)$
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n^2}\right) = 1,$$
da cui, per la continuità della funzione logaritmo,
$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n^2}\right) = 0$$
e quindi il limite puntuale è dato da $f \equiv 0$. Per quanto riguarda la convergenza uniforme, si noti che $\forall n \in \mathbb{N}$
$$\sup_{x\in[0,+\infty)}\left|\ln\left(1+\frac{x}{n^2}\right)\right| = +\infty$$

e quindi niente convergenza uniforme su $[0, +\infty)$. Ancora, proviamo a vedere se c'è convergenza uniforme sui sottointervalli compatti di $[0, +\infty)$, cioè sugli insiemi del tipo $[0, a]$ con $a > 0$. Siccome si ha la relazione $\ln(1 + y) \le y$ per ogni $y \ge 0$, otteniamo che

$$\left|\ln\left(1 + \frac{x}{n^2}\right)\right| \le \frac{x}{n^2} \le \frac{a}{n^2},$$

da cui la convergenza uniforme su $[0, a]$.

Soluzione 8.5 Notiamo che se $x = 0$, allora $f_n(0) = 0$, mentre se $x > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2},$$

e se $x < 0$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Quindi la successione data converge puntualmente alla funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & x > 0. \end{cases}$$

Chiaramente non può esserci convergenza uniforme su tutto $\mathbb{R}$ in quanto la funzione limite è discontinua. Vediamo se c'è convergenza uniforme sugli intervalli del tipo $A = (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$ con $a > 0$ (ancora una volta la simmetria dell'insieme è dettata dalla disparità delle funzioni della sucessione). Siccome le funzioni sono monotone crescenti e dispari, otteniamo che

$$\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = \frac{\pi}{2} - \arctan(na) \to 0, \qquad \text{per } n \to +\infty,$$

da cui la convergenza uniforme.

Soluzione 8.6 Il limite puntuale è $f \equiv 1$ su tutto $\mathbb{R}$. Prima di tutto si osservi che (si vedano alcuni grafici in Figura 8.1)

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} f_n(x) = 0$$

e anche che

$$f_n(x) = 0 \qquad \text{per } x_n = -n.$$

Per ognuna di queste ragioni

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \ge 1$$

e quindi non vi può essere convergenza uniforme su tutto $\mathbb{R}$ e nemmeno su semirette. Vediamo che succede se consideriamo un compatto $[a, b]$. Calcoliamo la derivata e poniamola uguale a zero. Si ha

$$f_n'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + 2n - n = 0$$

che ha come soluzioni $x_n = -n + \sqrt{n^2+n}$ e $y_n = -n - \sqrt{n^2+n}$. Si osservi che $x_n \to 1/2$ mentre $y_n \to -\infty$, quindi, qualunque sia $[a,b]$, y_n definitivamente non appartiene ad $[a,b]$. Se $1/2 \in (a,b)$ allora x_n definitivamente appartiene ad $[a,b]$. In $[a,b]$ quindi o non ci sono punti stazionari o c'è solamente x_n, nel quale f_n assume il suo valore massimo che vale

$$f_n(x_n) = \frac{\sqrt{n^2+n}}{2n(n+1-\sqrt{n^2+n})} = \frac{n+\sqrt{n^2+n}}{2n} \to 1.$$

Si osservi che il massimo di $|f_n - f|$ non è detto sia assunto in x_n. Infatti si ha

$$f_n(x) - f(x) = \frac{x(1-x)}{x^2+n}$$

che è positiva per $x \in (0,1)$ e negativa altrimenti. Quindi

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{-x(1-x)}{x^2+n}\chi_{[a,0)}(x) + \frac{x(1-x)}{x^2+n}\chi_{[0,1]}(x) - \frac{x(1-x)}{x^2+n}\chi_{(1,b]}(x).$$

Per cui l'estremo superiore, che è un massimo, è sicuramente assunto in $x = a$ o $x = b$

Figura 8.1:

oppure $x = x_n$. Per cui

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \le \max\{f_n(a) - 1, f_n(b) - 1, f_n(x_n) - 1\}.$$

Poiché tutti e tre i valori dell'insieme a destra convergono a zero si conclude che $\{f_n\}_n$ converge uniformemente sui compatti.

Soluzione 8.7 Proponiamo due svolgimenti. Il primo scrivendo $f_n(x)$ come $\log(1+x/n)^n$ e si ottiene che il limite puntuale è la funzione $f(x) = x$. Vediamo se tale convergenza è uniforme. Prendiamo in considerazione le funzioni $g_n(x) = (1+x/n)^n$. Sappiamo che $(1+x/n)^n$ è crescente in n per x positivo, mentre $(1+x/n)^n$ è decrescente in n per x

negativo e e converge alla funzione $g(x) = e^x$. Derivando si ottiene

$$g'(x) - g_n'(x) = e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} \begin{cases} > 0 & \text{se } x > 0 \\ = 0 & \text{se } x = 0 \\ < 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Si osservi però che $g_n(0) = g(0) = 1$ per cui $|g(x) - g_n(x)| > 0$ tranne che per $x = 0$ che risulta essere un punto di minimo. È chiaro che il massimo è assunto quindi per $x = -1$ oppure per $x = 1$ e si ha

$$\sup_{x \in [-1,1]} |g_n(x) - g(x)| \leq \max\{|g_n(-1) - e^{-1}|, |g_n(1) - e|\} \to 0.$$

Per cui $\{g_n\}$ converge uniformemente a g in $[-1, 1]$. Poiché la funzione $x \mapsto \log x$ è continua nell'intervallo $[e^{-1}, e]$ (nel quale assumono valori le g_n) e $\log g_n(x) = f_n(x)$, $\log g(x) = f(x)$, concludiamo che anche $\{f_n\}$ converge uniformemente a f in $[-1, 1]$.

Vediamo ora cosa succede in $[-1, +\infty)$. Il secondo svolgimento fa uso del seguente risultato, che è una versione un pó più generale di quanto visto a lezione. Se $(f_n)_n$ è una successione in $C^1([a, b])$ tale che

1) f_n' converge uniformemente ad una funzione g in $[a, b]$;

2) esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $f_n(x_0)$ converge.

Allora la successione $(f_n)_n$ converge uniformemente ad una funzione f. Inoltre $f \in C^1([a, b])$ e $f' = g$. Calcoliamo direttamente il limite uniforme di

$$f_n(x) = n \log(1 + x/n)$$

in $[-1, 1]$. Si ha che $f_n'(x) = \frac{n}{x+n}$ che converge uniformemente alla costante 1, inoltre $f_n(0)$ converge a 0. Per cui f_n converge uniformemente alla funzione f data da

$$f(x) = 0 + \int_0^x 1 dt = x$$

Soluzione 8.8 Ci sono due modi per svolgere tale esercizio; uno è provare a integrare la successione di funzioni data e quindi calcolare li limite (provare a farlo), oppure provare a utilizzare il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale. Per applicare tale teorema bisogna verificare la convergenza uniforme della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ data da

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x + n} \sin(nx)$$

ad una qualche funzione, sperabilmente facile da integrare. Ora, per $x \in [0, 1]$ si ha

$$0 \leq g_n(x) = \frac{x^2}{x + n} \leq \frac{x^2}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Quindi la successione di funzioni g_n converge uniformemente a 0; inoltre la successione di funzioni $h_n(x) = \sin(nx)$ è limitata e quindi

$$|f_n(x)| = |g_n(x)h_n(x)| \leq g_n(x) \leq \frac{1}{n},$$

da cui la convergenza uniforme della successione data a 0. Concludiamo quindi che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = 0.$$

Soluzione 8.9 Nello studio della convergenza di una serie di funzioni ci sono due tipi di convergenza ereditate dallo studio della convergenza delle successioni di funzioni (convergenza puntuale e convergenza uniforme) e una tipica delle serie di funzioni (la convergenza totale). Nel caso della convergenza puntuale si tratta di trovare per quali $x \geq 0$ esiste il seguente limite

$$s(x) = \lim_{N\to+\infty} s_N(x) = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{x}{n^2}\right).$$

Dalla stima

$$\ln(1+y) \leq y, \quad \forall y \geq 0, \tag{8.1}$$

segue la convergenza puntuale per ogni $x \geq 0$. Per quanto riguarda la convergenza uniforme, si tratta di dimostrare che

$$\lim_{N\to+\infty}\sup_{x\geq 0}|s_N(x) - s(x)| = 0.$$

Ora, siccome

$$s(x) - s_N(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty}\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{x}{n^2}\right) \geq \sqrt{N+1}\ln\left(1+\frac{x}{(N+1)^2}\right) \tag{8.2}$$

(i termini della serie sono tutti positivi), si ottiene che

$$\sup_{x\geq 0}|s_N(x) - s(x)| = +\infty$$

e quindi non si può avere convergenza uniforme sull'intervallo $[0, +\infty)$. D'altra parte, se si considera l'intervallo $[0, a]$ con $a > 0$, si ottiene, da (8.1), che

$$0 \leq s(x) - s_N(x) \leq a\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$$

da cui la convergenza uniforme su tutti gli insiemi compatti della forma $[0, a]$. Per quanto riguarda la convergenza totale, essa si potrà avere solo ancora sui sottoinsiemi compatti della forma $[0, a]$ (o su sottoinsiemi propri di tali insiemi); essa segue ancora dalla stima (8.1) in quanto i numeri

$$M_n = \sup_{x\in[0,a]}\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{x}{n^2}\right) \leq \frac{a}{n\sqrt{n}}$$

formano i termini di una serie numerica convergente.

Soluzione 8.10 La serie é definita per $x \geq 0$ e se poniamo $a_k = \frac{1}{x+k}$, notiamo che la successione $a_k \geq 0$ é monotona decrescente ed infinitesima. Quindi per il criterio di Leibniz, la serie converge semplicemente (ma non assolutamente) e vale la stima

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{x+k} \right| \leq \frac{1}{x+n+1} \to 0, \qquad n \to +\infty,$$

da cui si deduce la convergenza uniforme. Non si puó avere convergenza totale in nessun intervallo $I \subset \mathbb{R}$, in quanto posto $a = \inf I$ si ha che

$$\sup_{x \in I} \left| \frac{(-1)^k}{x+k} \right| = \frac{1}{a+k}$$

e la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a+k}$$

é divergente.

Soluzione 8.11 Notiamo anzitutto che per $x = 0$ si ottiene la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n$$

che è una serie divergente. Se invece $x \neq 0$, si ha che

$$\lim_{n \to +\infty} n^2 \frac{n+x}{n^3 x^2 + 1} = \frac{1}{x^2},$$

e quindi la serie è asintoticamente equivalente alla serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Quindi la serie converge puntualmente per $x \in A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Grazie all'osservazione 1.6(2) delle dispense, non si può avere convergenza uniforme su tutto A. Vediamo quindi su quali insiemi si ha convergenza uniforme; siccome il problema si verifica quando x è vicino a 0, proviamo a vedere se si ha convergenza uniforme sugli insiemi della forma $(-\infty, a] \cup [b, +\infty)$ con $a < 0 < b$. Verifichiamo direttamente se c'è convergenza totale su tali insiemi; la funzione

$$f_n(x) = \frac{n+x}{n^3 x^2 + 1}$$

ammette massimo e minimo nei punti

$$x_1^{(n)} = \sqrt{n^2 + 1/n^3} - n, \quad x_2^{(n)} = -\sqrt{n^2 + 1/n^3} - n.$$

Si ha inoltre che $x_1^{(n)} \to 0$ per $n \to +\infty$ e

$$f_n(x_1^{(n)}) \equiv n,$$

mentre il punto $x_2^{(n)}$ tende a 0 per n che tende a $+\infty$, mentre

$$f_n(x_2^{(n)}) \equiv \frac{1}{2n^4}$$

che formano i termini di una serie convergente. Inoltre la funzione è crescente per $x_2^{(n)} < x < x_1^{(n)}$ e $f_n(x) \to 0$ per $x \to \pm\infty$; questo argomento implica la convergenza totale sull'insieme considerato, e quindi anche la convergenza uniforme.

Soluzione 8.12 La prima serie data converge puntualmente per $x > 1$; per quanto riguarda la convergenza uniforme, non ci può essere su tutto l'insieme $(0, +\infty)$ in quanto

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^x} \geq \frac{1}{N^x}$$

e quindi

$$\sup_{x>0} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^x} \geq 1 \not\to 0, \qquad \text{per } N \to +\infty.$$

Invece se $a > 1$, allora per $x \in [a, +\infty)$ abbiamo che $1/n^x \leq 1/n^a$, da cui la convergenza totale e uniforme sugli insiemi della forma $[a, +\infty)$ per ogni $a > 1$.

La seconda serie converge puntualmente per $x > 0$; per quanto riguarda la convergenza uniforme, non ci può essere su tutto l'intervallo $(0, +\infty)$, mentre se $a > 0$ dal Teorema di Leibnitz si ha che

$$\left(\sum_{n=N}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^x} \right) \leq \frac{1}{(N+1)^x}$$

e quindi

$$\sup_{x \geq a} \left(\sum_{n=N}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^x} \right) \leq \frac{1}{(N+1)^a} \to 0.$$

Infine la convergenza totale si ottiene, come nell'esercizio precedente, sugli intervalli $[a, +\infty)$ con $a > 1$.

Soluzione 8.13 Si nota che la funzione $\frac{x+n}{x^2+n^4}$ ha due punti stazionari in $-n \pm n\sqrt{1+n^2}$ in cui vale

$$a_n = \pm \frac{\sqrt{1+n^2}}{2n^3 + 2n \mp \sqrt{1+n^2}}.$$

Dato che la funzione tende a 0 per $x \to \pm\infty$, tali punti stazionari sono di massimo e minimo. Notando infine che

$$|a_n| \sim \frac{1}{2n^2},$$

si conclude che la serie è totalmente convergente su tutto $\mathbb{R}$ e quindi uniformemente e puntualmente convergente.

Soluzione 8.14 Puntuale per ogni $x \in \mathbb{R}$ perché, ad esempio,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big| \frac{x+n}{x^2+n^4+\log n} \Big| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x+n|}{n^4}.$$

In generale vale, per $a, b > 0$, che $a^2+b^2 \ge 2ab$, per cui $2(a^2+b^2) \ge (a+b)^2$, da cui

$$\Big| \frac{x+n}{x^2+n^4+\log n} \Big| \le 2\frac{|x+n|}{2(x^2+n^4)} \le 2|x+n| \frac{(|x|+n^2)^2}{\le} \frac{2}{|x|+n^2} \le \frac{2}{n^2}$$

per cui la serie converge totalmente in $\mathbb{R}$.

Soluzione 8.15 Per ogni $x \in \mathbb{R}$ $1/\log(n+x^2)$ è decrescente in n per cui la serie è convergente per ogni x. La stima del resto

$$\Big| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n+x^2)} - \sum_{n=2}^{m-1} \frac{(-1)^n}{\log(n+x^2)} \Big| \le \frac{1}{\log(m+x^2)} \le \frac{1}{\log m} \to 0$$

quindi vi è convergenza uniforme su tutto $\mathbb{R}$. Ovviamente non vi è la totale: si ha che

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \Big| \frac{(-1)^n}{\log(n+x^2)} \Big| = \frac{1}{\log n}$$

(il massimo è assunto per $x = 0$, come si deduce calcolando la derivata) e la serie $\sum_n (\log n)^{-1}$ diverge. Non c'è convergenza totale nemmeno in nessun intervallo (a, b) (o $[a, b]$) poiché

$$\sup_{x\in(a,b)} \Big| \frac{(-1)^n}{\log(n+x^2)} \Big| = \max\Big\{ \frac{1}{\log(n+a^2)}, \frac{1}{\log(n+b^2)} \Big\}.$$

Soluzione 8.16 Per $x \ge 1$ si ha che

$$\frac{nx^n}{1+|x|^n n^2} \ge \frac{nx^n}{2|x|^n n^2} = \frac{1}{2n}$$

per cui la serie diverge. Per $x \in (-1, 1)$ si ha che

$$\Big| \frac{nx^n}{1+|x|^n n^2} \Big| \le n|x|^n$$

per cui vi è convergenza assoluta. Per $x \le -1$

$$\frac{nx^n}{1+|x|^n n^2} = (-1)^n \frac{n|x|^n}{1+|x|^n n^2}, \qquad \text{e} \qquad \frac{n|x|^n}{1+|x|^n n^2} \le \frac{1}{n}.$$

Verifichiamo che è monotona decrescente in n: mi chiedo se

$$\frac{(n+1)|x|^{n+1}}{1+|x|^{n+1}(n+1)^2} \le \frac{n|x|^n}{1+|x|^n n^2}$$

cioè se

$$n|x|^n + n(n+1)^2|x|^{2n+1} \ge (n+1)|x|^{n+1} + (n+1)n^2|x|^{2n+1}$$

il che è equivalente a

$$(n+1)|x| \leq n(n+1)|x|^{n+1} + n$$

che è vero per ogni $x \leq -1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$. Usando il criterio di Leibniz si conclude che la serie converge in $(-\infty, -1]$. Quindi converge puntualmente in $(-\infty, 1)$.

Dalla stima in $(-1, 1)$ si vede che vi è convergenza totale in $[0, a]$ per ogni $0 < a < 1$, ma non può esservi in $[0, 1)$. Infatti

$$\sup_{[0,1)} |\sum_{n=1}^{N} \frac{nx^n}{1+|x|^n n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1+|x|^n n^2}| = \sup_{[0,1)} |\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{nx^n}{1+|x|^n n^2}| = +\infty$$

in quanto le funzioni $\frac{nx^n}{1+|x|^n n^2}$ sono continue (anche in $x = 1$), ma la loro somma su n diverge a $+\infty$ in $x = 1$. Per x negativo si ha:

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1+|x|^n n^2} - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{nx^n}{1+|x|^n n^2}\Big| \leq \frac{m|x|^m}{1+|x|^m m^2} \leq \frac{1}{m} \to 0.$$

In conclusione, vi è convergenza puntuale in $(-\infty, 1)$, uniforme e totale su tutti gli insiemi del tipo $(-\infty, a]$ con $a < 1$.

Soluzione 8.17 Si nota che

$$\frac{n-1}{n^2} \leq \frac{\text{sen}x + n}{n^2} \leq \frac{n+1}{n^2},$$

da cui si deduce che

$$\frac{n-1}{n^2} \leq \sup_{x \in I} \left|\frac{\text{sen}x + n}{n^2}\right| \leq \frac{n+1}{n^2},$$

per ogni $I \subset \mathbb{R}$. Di conseguenza, non ci può essere convergenza totale in nessun sottoinsieme $I \subset \mathbb{R}$. Per quanto riguarda la convergenza semplice e uniforme, osserviamo che anzitutto $\text{sen}x + n \geq 0$ e che

$$\frac{\text{sen}x + n + 1}{(n+1)^2} \leq \frac{\text{sen}x + n}{n^2},$$

in quanto equivalente a

$$\left(2 + \frac{1}{n}\right) \text{sen}x + 2n + 1 \geq 0,$$

dal criterio di Leibniz si deduce la convergenza e la stima

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\text{sen}x + n}{n^2} - \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^n \frac{\text{sen}x + n}{n^2}\right| \leq \frac{\text{sen}x + N}{N^2},$$

da cui la convergenza uniforme su tutto $\mathbb{R}$.

Soluzione 8.18 Per $x < 0$ $\lim_{n\to\infty} xn^{-1}e^{-nx} = -\infty$ per cui la serie diverge. Per $x \geq 0$ la serie invece converge (per $x = 0$ è identicamente nulla, per $x > 0$ si può usare, ad esempio, il criterio del rapporto). Vediamo che in $[0, +\infty)$ la serie converge totalmente. Derivando si ottiene che il punto $x_n = 1/n$ è stazionario. Poiché $f_n(0) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ e $f_n \geq 0$ x_n risulta punto di massimo. Quindi

$$|f_n(x)| \leq f_n(1/n) = \frac{1}{n^2}\frac{1}{e} \to 0.$$

Soluzione 8.19 Mediante il cambio di variabili $y = x/2$ si ottiene una serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+1}}{n+1}.$$

Tale serie ha raggio di convergenza $R = 1$ in quanto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} = 1.$$

Quindi la serie converge per $y \in (-1,1)$, totalmente ed uniformemente negli intervalli $[a,b] \subset (-1,1)$. Per $y = 1$ e $y = -1$ si ottengono le due serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1},$$

e quindi la convergenza puntuale in $[-1,1)$. La convergenza non potrà essere uniforme in tutto $[-1,1)$, altrimenti si avrebbe convergenza anche per $y = 1$. Per quanto riguarda la convergenza uniforme nell'intervallo $[-1,0]$ possiamo utilizzare il criterio di Leibniz per ottenere la stima, per $y \in [-1,0]$,

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{N} \frac{y^{n+1}}{n+1} \right| \leq \frac{|y|^{N+2}}{N+2} \leq \frac{1}{N+2},$$

da cui si deduce la convergenza uniforme su $[-1,0]$. Quindi abbiamo convergenza puntuale in $[-1,1)$ e uniforme in $[-1,a]$ per ogni $a < 1$ alla funzione

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+1}}{n+1}.$$

Per il calcolo della somma, andiamo a considerare la serie delle derivate

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^n;$$

tale serie è convergente in $(-1,1)$; questa volta la convergenza uniforme e totale può essere solo sugli intervalli $[a,b] \subset (-1,1)$; questo implica la convergenza uniforme alla funzione

$$g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} y^n = \frac{1}{1-y}$$

della serie delle derivate, da cui il fatto che f è derivabile su ogni $[a,b] \subset (-1,1)$ e quindi $f \in C^1(-1,1)$

$$f'(y) = g(y) = \frac{1}{1-y}.$$

Se ne deduce che

$$f(y) = f(0) + \int_0^y g(t)dt = -\log(1-y) = \log\frac{1}{1-y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+1}}{n+1}.$$

Ripassando alla variabile $x = 2y$, si ottiene infine che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} = \log \frac{2}{2-x}.$$

Soluzione 8.20 Supponiamo per il momento di dover studiare semplicemente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x)^n}.$$

Ci si può ridurre a studiare la serie geometrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} y^n$$

pensando poi a sostituire a y $1/(1+x)$. Sappiamo che la serie geometrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n - 1, \qquad |q| < 1.$$

Di conseguenza la serie appena scritta converge alla funzione

$$\frac{y}{1-y}$$

puntualmente in $(-1, 1)$ ed uniformemente e totalmente solo nei compatti $[a, b] \subset (-1, 1)$. Infatti, se vi fosse convergenza uniforme in $[0, 1)$ o $(-1, 0]$, allora vi sarebbe convergenza uniforme (e quindi anche puntuale) anche in $[0, 1]$ o $[-1, 0]$.

Sugli insiemi compatti $[a, b] \subset (-1, 1)$ si ha convergenza totale per quanto visto a teoria sulle serie di potenze. Questo si traduce, per la serie considerata, ripassando a $x = \frac{1-y}{y}$, nella convergenza alla funzione

$$\frac{\frac{1}{1+x}}{1 - \frac{1}{1+x}} = \frac{1}{x}$$

puntualmente in $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ e uniformemente e totalmente negli insiemi $(-\infty, \alpha]$, $[\beta, +\infty)$ con $\alpha < -2$ e $\beta > 0$. Infatti la trasformazione $g(x) = 1/(1 + x)$ manda l'intervallo $[a, 0]$, con $-1 < a$, in $(-\infty, \frac{1-a}{a}]$, e l'intervallo $[0, b]$, con $b < 1$, in $[\frac{1-b}{b}, +\infty)$. Se, ad esempio, $a = -\frac{1}{1+\delta}$ con $\delta > 0$, cioè a compreso tra -1 e 0, si ottiene che $\frac{1-a}{a} = -2 - \delta$, cioè un numero strettamente minore di -2. Analogamente si vede che $\frac{1-b}{b}$ è strettamente positivo.

Veniamo ora all'esercizio proposto: poiché la serie data è il limite, per $N \to +\infty$, di $\sum_{n=1}^{N} \frac{x}{(1+x)^n}$ per le somme finite si ha

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{x}{(1+x)^n} = x \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(1+x)^n}.$$

Per cui l'insieme di convergenza puntuale contiene sicuramente l'insieme nel quale converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x)^n}$, cioè $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$. Si osservi però che la serie data converge anche per $x = 0$ (infatti ogni termine è identicamente nullo). Perciò l'insieme di convergenza puntuale è $(-\infty, -2) \cup [0, +\infty)$ e la funzione limite è

$$h(x) = \chi_{(-\infty,-2)}(x) + \chi_{(0,+\infty)}(x)$$

(poiché $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x)^n} = 1/x$). Per quanto riguarda le convergenze uniforme e totale si può ragionare come prima per ottenere che vi è convergenza negli insiemi del tipo $(-\infty, \alpha]$, $[\beta, +\infty)$ con $\alpha < -2$ e $\beta > 0$. Non può esservi convergenza uniforme, e di conseguenza nemmeno totale, nell'insieme $[0, +\infty)$ dal momento che la funzione limite è discontinua in tale insieme mentre le somme parziali sono ovviamente continue. Si provi come esercizio a vedere cosa succede con la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x)^n}.$$

Soluzione 8.21 Posso fare il cambio $y = (x+1)/x$ e studiare $\sum_{n=0}^{\infty}(n-3)y^n$. Il raggio di convergenza è 1, per cui la serie converge puntualmente per $y \in (-1, 1)$. La convergenza, al solito, è totale nei compatti $[a, b] \subset (-1, 1)$, ma non in $(-1, 1)$. Posso scrivere

$$(n-3)y^n = y^4(n-3)y^{n-4}$$

e vedere $(n-3)y^{n-4}$ come la derivata di y^{n-3}. Abbiamo

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n-3)y^n = -3 - 2y - y^2 + \sum_{n=4}^{\infty}(n-3)y^n = -3 - 2y - y^2 + \sum_{k=1}^{\infty} ky^{3+k}$$

e

$$y^4 \sum_{k=1}^{\infty} ky^{k-1} = y^4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dy} y^k = y^4 \frac{d}{dy} \sum_{k=1}^{\infty} y^k = y^4 \frac{d}{dy} \frac{y}{1-y} = \frac{y^4}{(1-y)^2}$$

In conclusione,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n-3)y^n = -3 - 2y - y^2 + \frac{y^4}{(1-y)^2}$$

dove la convergenza è puntuale per $y \in (-1, 1)$ e totale sui compatti $[a, b] \subset (-1, 1)$. La funzione $f(x) = (x+1)/x$ ha il grafico in Figura 8.2 per cui, tornando a considerare x, si ha che

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n-3)\Big(\frac{x+1}{x}\Big)^n = -3 - 2\frac{x+1}{x} - \Big(\frac{x+1}{x}\Big)^2 + \frac{(x+1)^4}{x^2}$$

dove la convergenza è puntuale per $x \in (-\infty, -1/2)$ e totale negli insiemi del tipo $[a, b] \subset (-\infty, -1/2)$. Infatti

$$\Big|\frac{x+1}{x}\Big| < 1, \qquad \text{per} x \in (-\infty, -1/2).$$

Soluzione 8.22 La serie dell'esercizio non è una serie di potenze. Tuttavia lo studio di tale serie può essere ricondotto allo studio di una serie di potenze. Innanzitutto si osservi che

$$\lim_n \Big[\frac{n}{n+2} \frac{|x|^n}{(1+x^2)^n}\Big]^{1/n} = \frac{|x|}{1+x^2}$$

Figura 8.2:

che è sempre minore di 1 (per esercizio vedere che $\frac{|x|}{1+x^2} \le 1/2$). Di conseguenza la serie converge assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$. Calcoliamo la somma della serie (per $|y| < 1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2} y^n.$$

Si ha che

$$\frac{n}{n+2} y^n = \frac{n+2-2}{n+2} y^n = \Big[1 - \frac{2}{n+2}\Big] y^n = y^n - \frac{2}{y^2} \frac{1}{n+2} y^{n+2}$$

A questo punto, osservando che $\lim_n (a_n + b_n) = \lim_n a_n + \lim_n b_n$, otteniamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2} y^n = \sum_{n=1}^{\infty} y^n - \frac{2}{y^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2} y^{n+2}.$$

Prendiamo in esame il secondo termine:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2} y^{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^y t^{n+1} dt = \int_0^y \Big(\sum_{n=1}^{\infty} t^{n+1}\Big) dt = \int_0^y \Big(\sum_{n=2}^{\infty} t^n\Big) dt = \int_0^y \frac{t^2}{1-t} dt$$

dove i passaggi precedenti sono leciti se la convergenza è uniforme, cosa che succede se y è fissato tra -1 e 1. Per integrare $\frac{t^2}{1-t}$ dividiamo t^2 per $1-t$ e scriviamo

$$t^2 = (1-t)(-1-t) + 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{t^2}{1-t} = -(1+t) + \frac{1}{1-t}$$

e quindi integrando

$$\int_0^y \frac{t^2}{1-t} dt = -y - \frac{y^2}{2} - \log(1-y).$$

Tirando le fila si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2} y^n = \frac{y}{1-y} - \frac{2}{y^2}\Big[-y - \frac{y^2}{2} - \log(1-y)\Big] = \frac{y}{1-y} + \frac{2}{y} + 1 + \frac{2}{y^2} \log(1-y).$$

Si osservi che questa funzione è regolare anche se sembra avere singolarità in $y = 0$. Infatti $\log(1 - y) = -y + y^2/2 + o(y^2)$ e quindi

$$\begin{aligned}\frac{y}{1-y} + \frac{2}{y} + 1 + \frac{2}{y^2}\log(1-y) =& \frac{1}{y^2}\Big[\frac{y^3}{1-y} + 2y + y^2 + 2\log(1-y)\Big] \\ =& \frac{1}{y^2}\Big[\frac{y^3}{1-y} + 2y + y^2 - 2y + y^2 + o(y^2)\Big]\end{aligned}$$

Tornando al nostro problema, poiché la quantità $\frac{x^n}{(1+x^2)^n}$ è sempre minore di 1 la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}\frac{x}{1+x^2}$$

converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$; converge pure uniformemente e totalmente su $\mathbb{R}$ poiché $\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$. Si conclude sostituendo nell'espressione di sopra $\frac{x}{1+x^2}$ al posto di y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}\frac{x^n}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{1+x^2-x} - \frac{x}{1+x^2} - \frac{x^2}{2(1+x^2)^2} - \log\frac{1+x^2-x}{1+x^2}.$$

Soluzione 8.23 Calcoliamo il raggio di convergenza studiando seguente limite

$$\lim_n \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!} = \lim_n \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n = \frac{1}{e}$$

quindi vi è convergenza puntuale in $(-e, e)$ e non vi è in $(-\infty, -e) \cup (e, +\infty)$. Vediamo gli estremi:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \qquad \text{quindi per } x = n \qquad e^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} \geq n^n n!$$

per cui

$$\frac{n!}{n^n} e^n \geq 1. \tag{8.3}$$

La serie quindi non converge per $x = -e$ e diverge a $+\infty$ per $x = e$. Ovviamente converge totalmente e uniformemente in tutti gli intervalli $[a, b] \subset (-e, e)$. Come al solito si ha che la serie non può convergere uniformemente in $(-e, e)$. Anziché la stima (8.3) si può usare, per studiare il comportamento della serie in $x = e$ la formula di Stirling

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\,\big(1 + O(1/n)\big).$$

Soluzione 8.24 Si ha che

$$\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)!}$$

per cui, usando il criterio del rapporto, si deduce che il raggio di convergenza è $+\infty$ dato che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)}{(n+2)!}\frac{(n+1)!}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n(n+2)} = 0.$$

La serie converge quindi per ogni $x \in \mathbb{R}$. Prima di studiare le convergenze uniforme e totale calcoliamo la somma della serie. Sappiamo che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Si ha che

$$\frac{n}{(n+1)!}x^n = x\frac{d}{dx}\Big[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{1}{x}\Big]$$

per cui, grazie alla convergenza uniforme posso invertire il segno di derivata con il limite e ottenere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x\frac{d}{dx}\Big[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{1}{x}\Big] = x\frac{d}{dx}\Big[\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\Big] = x\frac{d}{dx}\Big[\frac{1}{x}(e^x-1-x)\Big]$$
$$= x\Big[-\frac{1}{x^2}(e^x-1-x)+\frac{1}{x}(e^x-1)\Big] = e^x - \frac{1}{x}(e^x-1).$$

Vediamo la convergenza uniforme in $\mathbb{R}$:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\Big|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k+1)!}x^k - \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}x^k\Big| = \sup_{x\in\mathbb{R}}\Big|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k}{(k+1)!}x^k\Big| = +\infty$$

quindi non vi è convergenza uniforme in $\mathbb{R}$. Nemmeno se ci limitiamo a semirette $[a,+\infty)$, perché l'estremo superiore è $+\infty$ proprio perché consideriamo la semiretta fino a $+\infty$. Vediamo cosa succede se consideriamo $(-\infty,0]$;

$$\sup_{x\in(-\infty,0]}\Big|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k+1)!}x^k - \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}x^k\Big| = \sup_{x\in(-\infty,0]}\Big|e^x - \frac{1}{x}(e^x-1) - \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}x^k\Big| = +\infty$$

perché $f(x) = e^x - \frac{1}{x}(e^x-1)$ è limitata in $(-\infty,0]$. Per $x \in [-a,a]$ con a positivo

$$\Big|\frac{k}{(k+1)!}x^k\Big| \le \frac{k}{(k+1)!}a^k.$$

La serie $\sum_n \frac{na^n}{(n+1)!}$ converge per ogni a reale per cui si ha convergenza totale e uniforme in ogni compatto.

Soluzione 8.25 Si nota che dallo sviluppo di Taylor del logaritmo si ricava che

$$a_n = \frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n} = \frac{1}{n} - \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Quindi a_n è asintoticamente equivalente a $1/2n^2$. Se ne deduce che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

e quindi il raggio di convergenza della serie di potenze è 1; per $x = \pm 1$ si ottengono le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n.$$

Siccome gli a_n sono positivi e asintoticamente equivalenti a $1/(2n^2)$, la serie di potenze converge in $[-1,1]$ e la convergenza è totale in tale intervalle. Questo è un fatto generale delle serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$$

nal caso in cui i coefficienti c_n abbiano segno costante (cioè o tutti positivi o tutti negativi) o sono di segno alterno (cioè $c_n = (-1)^n|c_n|$ o $c_n = (-1)^{n+1}|c_n|$: se la convergenza è puntuale in $[x_0 - R, x_0 + R]$, allora sullo stesso intervallo la covergenza è totale in quanto

$$\sup_{[x_0-R,x_0+R]} |c_n(x-x_0)^n| = |c_n|R^n$$

questo ultimo termine coincide con $|c_n R^n|$ che altro non è che $|c_n(x-x_0)^n|$ quando $x-x_0 = \pm R$ e nelle ipotesi di cui sopra

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n\right| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|R^n$$

per $x - x_0 = \pm R$.

Soluzione 8.26 Sappiamo che la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \qquad \text{per } |q| < 1.$$

Possiamo allora concludere che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n \qquad \text{converge a} \qquad \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{per } |x| < 1.$$

Studiamo questa serie. Converge puntualmente in $(-1,1)$. Per $x = 1$ e per $x = -1$ ovviamente non converge. Al solito, la serie non convergerà uniformemente in $(-1,1)$, ma è facile vedere che converge totalmente in tutti i compatti $[a,b]$ contenuti in $(-1,1)$. Calcoliamo la derivata di $f(x) = \arctan x$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Integrando termine a termine si ha, posto $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}$, grazie alla convergenza uniforme

$$\lim_n \int_0^x f_n(t)dt = \int_0^x \lim_n f_n(t)dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan x.$$

Ora

$$\int_0^x (-1)^k t^{2k} dt = (-1)^k \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}$$

per cui

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

per ogni $x \in [-1,1]$ e la convergenza uniforme solo sui compatti contenuti in $(-1,1)$.

Soluzione 8.27 Calcoliamo lo sviluppo sfruttando il fatto che la derivata di $f(x) = \log x$ è data da

$$f'(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{1+(x-1)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$$

dove l'ultima identità è valida per $|x-1| < 1$. La serie è una serie geometrica centrata in $x = 1$ e con raggio di convergenza 1; quindi si ha convergenza totale e uniforme per ogni intervallo chiuso e limitato $[a, b] \subset (0, 2)$, ma non si potrà avere convergenza uniforme in $(0, 2)$. Per il teorema di integrazione per serie si ottiene quindi che

$$\log x = \int_1^x f'(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}. \tag{8.4}$$

Tale identità vale per ogni $x \in (0, 2)$. Si nota ora che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}.$$

converge in realtà anche in $(0, 2]$, con convergenza uniforme negli intervalli $(a, 2]$ per ogni $a > 0$ grazie al Teorema di Leibniz. Grazie alla continuità del logaritmo al fatto che si ha convergenza uniforme fino al punto 2, si ricava il fatto che l'identità (8.4) può essere estesa anche per $x = 2$, dal quale si ricava che

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Soluzione 8.28 Dalla soluzione dell'esercizio 8.27 abbiamo che per $y \in (-1, 1]$

$$\log(1+y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}y^n}{n}.$$

Otteniamo quindi che

$$\begin{aligned} f(x) &= \log\left(\frac{2+x}{1+x^2}\right) = \log 2 + \log\left(1+\frac{x}{2}\right) - \log(1+x^2) \\ &= \log 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}y^n}{n2^n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{n} \end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio è valido se sono contemporaneamente verificate le condizioni $x/2 \in (-1, 1]$ e $x^2 \in (-1, 1]$, cioè se $x \in [-1, 1]$. L'esercizio si conclude con l'osservazione che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{n}$$

è riconducibile ad una serie di potenze, ma è anche direttamente una serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n$$

dove i coefficienti b_n sono nulli se n è dispari mentre se n è pari, $n = 2k$, allora $b_n = (-1)^{k+1}/k$. Si ottiene in definitiva che

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

con

$$c_n = \begin{cases} \log 2 & n = 0 \\ \frac{(-1)^{n+1}}{n2^n} & n \text{ dispari} \\ \frac{(-1)^n}{n2^n} - \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1}2}{n} & n \text{ pari } \geq 2. \end{cases}$$

Soluzione 8.29 Se consideriamo la funzione

$$f(x) = (1+x)^\alpha,$$

calcolando le derivate di f e valutandole in $x = 0$ si trova che

$$f^{(k)}(0) = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - k + 1).$$

Definendo quindi il coefficiente binomiale per $\alpha \in \mathbb{R}$ come

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha \cdot \ldots \cdot (\alpha - k + 1)}{k!},$$

con l'estensione ad 1 nel caso $k = 0$, possiamo definire la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Studiamo la convergenza di tale serie; dal criterio del rapporto troviamo che

$$\frac{\binom{\alpha}{k+1}}{\binom{\alpha}{k}} = \frac{\alpha - k}{k+1} \to -1,$$

quindi la serie converge per $x \in (-1, 1)$, con convergenza uniforme in $[a, b] \subset (-1, 1)$. La serie quindi definisce in $(-1, 1)$ una funzione g di classe C^∞; resta da dimostrare che $g = f$; non possiamo utilizzare in questo esempio il criterio di sviluppabilità in quanto la stima $f^{(k)}(0) \leq ML^k$ fallisce per ogni scelta di $M, L > 0$. Possiamo però considerare la funzione

$h(x) = (1+x)^{-\alpha} g(x)$; derivando troviamo che

$$\begin{aligned}
h'(x) =& -\alpha(1+x)^{-\alpha-1} g(x) + (1+x)^{-\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} k \binom{\alpha}{k} x^{k-1} \\
=& \alpha(1+x)^{-\alpha-1} \left(-g(x) + (1+x) \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha-1}{k-1} x^{k-1} \right) \\
=& \alpha(1+x)^{-\alpha-1} \left(-\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{k} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha-1}{k-1} x^k \right) \\
=& \alpha(1+x)^{-\alpha-1} \left(-\binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha-1}{0} + \right. \\
& \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha-1}{k} + \binom{\alpha-1}{k-1} \right] x^k \right) = 0,
\end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che

$$k \binom{\alpha}{k} = \alpha \binom{\alpha-1}{k-1}$$

e l'identità, valida per $k \geq 1$,

$$-\binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha-1}{k} + \binom{\alpha-1}{k-1} = 0.$$

Quindi la funzione h è costante e dato che $h(0) = 1$, ne segue che

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Soluzione 8.30 Spezzando il polinomio $x^2 - 5x + 6$ come prodotto di $x-3$ e $x-2$ si ottiene che

$$f(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{2}{x-2}.$$

Sapendo che, per $|q| < 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ converge al valore $\frac{1}{1-q}$ si può scrivere

$$\frac{1}{x-3} = -\frac{1}{3-x} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{x}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n$$

che converge per $|\frac{x}{3}| < 1$, cioè per $|x| < 3$. L'altro termine:

$$-\frac{2}{x-2} = \frac{2}{2-x} = \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$$

che converge per $|\frac{x}{2}| < 1$, cioè per $|x| < 2$. Sarà possibile effettuare la somma solo dove convergono entrambe, quindi sicuramente per $x \in (-2, 2)$ si ha che

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^{n+1}} \right] x^n.$$

Soluzione 8.31 Si può fare seguendo la soluzione dell'Esercizio precedente osservando che $1 + x - 2x^2 = (2x + 1)(1 - x)$.

Soluzione 8.32 La funzione data è definita per $x \in (-1, 1)$ ed in tale intervallo abbiamo l'identità

$$\begin{aligned} f(x) &= \log \frac{1+x}{1-x} = \log(1+x) - \log(1-x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (-1)^k x^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} + 1}{k} x^k = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \end{aligned}$$

in quanto $(-1)^{k+1} + 1$ è nullo se k è pari, mentre vale 2 per k dispari.

Soluzione 8.33 Come suggerito, si nota che per ogni $t > 0$, in quanto $e^{-t} < 1$, vale l'indentità

$$\frac{t^3}{e^t - 1} = \frac{t^3 e^{-t}}{1 - e^{-t}} = t^3 e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} t^3 \sum_{n=0} e^{-(n+1)t}.$$

Per quanto visto sulla convergenza delle serie di potenze, la serie

$$\sum_{n=0} e^{-(n+1)t}$$

converge in $(0, +\infty)$, uniformemente sui chiusi $[a, +\infty) \subset (0, +\infty)$; notiamo inoltre che tale serie viene moltiplicata per t^3 e otteniamo quindi che la successione delle somme parziali è data da

$$f_k(t) = t^3 \sum_{n=0}^{k} e^{-(n+1)t} = \frac{t^3(e^{-t} - e^{-(k+2)t})}{1 - e^{-t}} = \frac{t^3(1 - e^{-(k+1)t})}{e^t - 1}$$

converge uniformemente su $[0, +\infty)$ ad

$$f(t) = \frac{t^3}{e^t - 1};$$

per vedere questo basta considerare la funzione

$$g_k(t) = f(t) - f_k(t) = \frac{t^3 e^{-(k+1)t}}{e^t - 1}$$

e studiarla in $(0, +\infty)$. Si nota che per ogni $a > 0$, in $[0, a)$ possiamo sfruttare il fatto che $e^t - t \geq t$ da cui

$$g_k(t) \leq t^2 < a^2,$$

da cui

$$\lim_{k\to+\infty} \sup_{[0,+\infty)} |g_k(t)| \leq a^2 + \lim_{k\to+\infty} \sup_{[a,+\infty)} |g_k(t)| = a^2$$

grazie alla convergenza uniforme in $[a, +\infty)$. Siccome $a > 0$ era arbitrario, se ne deduce la convergenza uniforme su tutto $[0, +\infty)$. Quindi ogni $R > 0$, si ha

$$\int_0^R \frac{t^3}{e^t - 1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^R t^3 e^{-(n+1)t} dt.$$

Si nota poi che

$$\int_0^R t^3 e^{-(n+1)t} dt = \frac{6}{(n+1)^4} - \left(\frac{R^3}{(n+1)} + \frac{3R^2}{(n+1)^2} + \frac{6R}{(n+1)^3} + \frac{6}{(n+1)^4} \right) e^{-(n+1)R}.$$

Passando alla serie, otteniamo che

$$\begin{aligned}\int_0^R \frac{t^3}{e^t - 1} dt =& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6}{(n+1)^4} + \\ & - e^{-R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R^3}{(n+1)} + \frac{3R^2}{(n+1)^2} + \frac{6R}{(n+1)^3} + \frac{6}{(n+1)^4} \right) e^{-nR}.\end{aligned}$$

Infine, dato che

$$\begin{aligned}0 \le& e^{-R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R^3}{(n+1)} + \frac{3R^2}{(n+1)^2} + \frac{6R}{(n+1)^3} + \frac{6}{(n+1)^4} \right) e^{-nR} \\ \le& e^{-R}(R^3 + 3R^2 + 6R + 6) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nR} = \frac{e^{-R}(R^3 + 3R^2 + 6R + 6)}{1 - e^{-R}} \overset{R \to +\infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

Questo dimostra che la funzione positiva $\frac{t^3}{e^t - 1}$ è integrabile in senso generalizzato su $[0, +\infty)$ e che

$$\int_o^{\infty} \frac{t^3}{e^t - 1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6}{(n+1)^4}.$$

Soluzione 8.34 Abbiamo già visto nella teoria che la funzione $\log(1 + t)$ è sviluppabile in serie di Taylor

$$\log(1 + t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n}$$

e che la convergenza è uniforme in $[0, 1]$. Quindi

$$\frac{\log(1 + t)}{t} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^{n-1}}{n}$$

con convergenza uniforme in $[0, 1]$; possiamo quindi integrare per serie e trovare che

$$\int_0^1 \frac{\log(1 + t)}{t} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

Soluzione 8.35 Con un calcolo diretto si ottiene che

$$\begin{aligned} a_0 &= 2\pi \\ a_n &= 0 \\ b_n &= -\frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Quindi la serie di Fourier sarà data da

$$F(x) = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx;$$

il fatto che i termini a_n sono tutti nulli si poteva anche dedurre dal fatto che la funzione $f(x)$ non è dispari, ma $g(x) = f(x) - \pi$ lo è e quindi tutti gli a_n di g sono nulli e concludere notando che traslare di una costante una funzione non si fa altro che modificare il coefficiente a_0 lasciando inalterati tutti i rimanenti coefficienti. Tale serie converge puntualmente su tutto $[0, 2\pi)$, non può convergere uniformemente su tutto $[0, 2\pi)$ ma solo sui compatti in esso contenuti (la funzione data è discontinua in 0) mentre non ci sarà convergenza totale in quanto i b_n sono i termini di una serie divergente.

Notiamo infine che applicando la formula di Parseval si ottiene l'identità

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Soluzione 8.36 Poiché la funzione è dispari lo sviluppo è di soli seni. Si ha

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\text{sen}nx dx = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ \dfrac{4}{\pi n} & n \text{ dispari,} \end{cases}$$

quindi lo sviluppo è

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)} \text{sen}(2n+1)x.$$

La media di f è nulla, per cui a_0 è nullo. Usando la formula che lega i coefficienti di Fourier di una funzione con quelli di una sua primitiva, si ha che lo sviluppo di

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)dt = |x| - \pi$$

è dato da

$$|x| - \pi = -\frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)^2} \cos(2n+1)x$$

dove $A_0 = \pi^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}[|x| - \pi]dx = -\pi^2/\pi = -\pi$. Per cui lo sviluppo di $|x|$ in $(-\pi, \pi]$ è

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)^2} \cos(2n+1)x.$$

Soluzione 8.37 La funzione data è definita su $[-\pi, \pi]$, simmetrico rispetto all'origine, e f è pari. Se tracciamo il grafico della sua estensione 2π–periodica, vediamo che l'estensione è continua; essa è inoltre regolare a tratti (la derivata è ± 1 con discontinuità nei punti $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$). Quindi la serie di Fourier converge totalmente, e quindi uniformemente su tutto $\mathbb{R}$ e quindi puntualmente ad $f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Per scrivere la serie, calcoliamo i coefficienti di f, considerando solo i coseni in quanto la funzione è pari;

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x dx = \pi,$$

mentre per $k \geq 1$

$$\begin{aligned} a_k =& \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos(kx)dx = \frac{2}{\pi k^2}\Big((-1)^k - 1\Big) \\ =& \begin{cases} 0 & \text{se } k = 2m \text{ pari} \\ -\dfrac{4}{\pi(2m+1)^2} & \text{se } k = 2m+1 \text{ dispari.} \end{cases} \end{aligned}$$

Se ne deduce che

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^\infty \frac{1}{(2m+1)^2}\cos((2m+1)x).$$

Soluzione 8.38 La funzione è pari, per cui il suo sviluppo è fatto di soli coseni. Si ha che $\int_{-\pi}^\pi x^2 dx = 2\pi^3/3$ e

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^\pi x^2\cos nx\; dx =& x^2\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\Big|_{-\pi}^\pi - \int_{-\pi}^\pi 2x\frac{\operatorname{sen} nx}{n}dx \\ =& 2x\frac{\cos nx}{n^2}\Big|_{-\pi}^\pi + \int_{-\pi}^\pi 2\frac{\cos nx}{n^2}dx = (-1)^n\frac{4\pi}{n^2} \end{aligned}$$

per cui lo sviluppo è dato da

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx.$$

Poiché l'estensione a tutto $\mathbb{R}$ è C^1 a tratti e continua si ha convergenza uniforme su tutto $\mathbb{R}$. In particolare per $x = \pi$ si ha

$$f(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n\frac{4}{n^2}(-1)^n = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^\infty \frac{4}{n^2}$$

da cui si ricava

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Soluzione 8.39 Il periodo T è 2, calcoliamo quindi i coefficienti:

$$a_0 = \int_{-1}^1 f(x)dx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned}
a_n =& \int_{-1}^{1} f(x) \cos nx\pi \; dx = \int_{0}^{1} x \cos nx\pi \; dx \\
=& x\Big(\frac{1}{n\pi} \mathrm{sen} n\pi x\Big)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{n\pi} \mathrm{sen} n\pi x \; dx \\
=& -\frac{1}{n\pi}\Big(-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\Big)\Big|_0^1 = \begin{cases} -\dfrac{2}{n^2\pi^2} & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n =& \int_{-1}^{1} f(x) \cos nx\pi \; dx = \int_{0}^{1} x \mathrm{sen} nx\pi \; dx \\
=& x\Big(-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\Big)\Big|_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{n\pi} \cos n\pi x \; dx \\
=& (-1)^{n+1}\frac{1}{n\pi} + \frac{1}{n\pi}\Big(\frac{1}{n\pi}\mathrm{sen} n\pi x\Big)\Big|_0^1 = (-1)^{n+1}\frac{1}{n\pi}
\end{aligned}$$

quindi lo svilupo è

$$\frac{1}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)^2\pi^2} \cos(2n+1)\pi x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n\pi} \mathrm{sen} n\pi x.$$

Converge puntualmente ad $f(x)$ per $x \in (-1,1)$, ad $\frac{1}{2}$ per $x = -1$ e $x = 1$. La convergenza uniforme c'è solo negli insiemi del tipo $[a,b] \subset (-1,1)$ visto che il limite non è continuo. Valutiamo ora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$. Per $x = 1$ la serie converge al valore $1/2$ per cui

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} =& \frac{1}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)^2\pi^2} \cos(2n+1)\pi + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n\pi} \mathrm{sen} n\pi \\
=& \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)^2} \pi^2
\end{aligned}$$

da cui

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Ora per la somma $\sum_n \frac{1}{(2n)^2}$ possiamo procedere in due modi: sfruttare l'esercizio precedente dal quale sappiamo che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ per cui otteniamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{24},$$

oppure, ignorando il risultato dell'esercizio precedente, osservare che $\sum_n \frac{1}{(2n)^2} = \sum_n \frac{1}{4n^2}$ per cui da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

dedurre che

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{4}\frac{4}{3}\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{24}.$$

Soluzione 8.40 Possiamo semplificare i calcoli tracciando il grafico della estensione periodica di f e notando che su $(-\pi,\pi]$ la funzione coincide con $|x|$ (si veda la Figura 8.3). Calcoleremo quindi

Figura 8.3:

$$\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx dx=2\int_{0}^{\pi}x\cos nx dx.$$

Quindi i coefficienti sono dati da:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|dx=\pi$$

e per $n>0$

$$\begin{aligned}a_n=&\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{n}\mathrm{sen} nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{1}{n}\mathrm{sen} nx dx\right]\\ =&\frac{2}{\pi}\left[0+\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}\right]=\frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n-1]\end{aligned}$$

per cui

$$a_n=\begin{cases}0 & \text{se } n \text{ pari}\\ -\dfrac{4}{\pi n^2} & \text{se } n \text{ dispari.}\end{cases}\tag{8.5}$$

Lo sviluppo risulta quindi essere

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=\frac{\pi}{2}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k+1)^2}\cos(2k+1)x.\tag{8.6}$$

La convergenza è puntuale e uniforme su tutto $\mathbb{R}$ (perché la funzione è continua e C^1 a tratti), in particolare sull'intervallo $[0, 2\pi]$ al quale eravamo interessati. Se valutiamo la serie per $x = 0$ questa convergerà al valore $f(0) = 0$, per cui si ha

$$\frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)^2} = 0, \qquad \text{da cui} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Per l'altra serie sfruttiamo l'uguaglianza di Parseval:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

Per cui da $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = 2\pi^3/3$ otteniamo

$$\frac{2\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(2k+1)^4}$$

e infine

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^2}{16} \Big(\frac{2\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{2} \Big) = \frac{\pi^4}{96}.$$

Ora valutiamo lo sviluppo della funzione g: si osservi che nell'intervallo $(-\pi, \pi]$ la funzione $f(x) = |x|$ è una primitiva della funzione g, e precisamente

$$f(x) = \pi + \int_{-\pi}^{x} g(t)dt, \qquad \text{cioè} \qquad f(x) - \pi = \int_{-\pi}^{x} g(t)dt.$$

Se denotiamo con α_n e β_n i coefficienti di g

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos nx dx, \qquad \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \mathrm{sen} nx dx$$

si ha che $\alpha_0 = 0$ e dalle formule che legano i coefficienti della funzione derivata a quelli della funzione si ricava

$$\beta_n = -n a_n, \qquad \alpha_n = n b_n$$

quindi, conoscendo a_n (si veda (8.5)) e b_n ($b_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$) si ricava immediatamente

$$\beta_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ pari} \\ \dfrac{4}{\pi n} & \text{se } n \text{ dispari.} \end{cases}$$

per cui

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} \mathrm{sen}(2k+1)x.$$

Infine, quando si chiede uno sviluppo in soli seni o in soli coseni, si sta sottointendendo che la funzione da sviluppare sia o dispari o pari. Se quindi la funzione è definita su di un intervallo del tipo $[0, T]$, si considererà prima l'estensione dispari o pari e quindi si calcoleranno i coefficienti di tale estensione. Ad esempio, se vogliamo lo sviluppo di soli coseni di una data funzione $h : [0, T] \to \mathbb{R}$, si considera $\tilde{h} : (-T, T]$

$$\tilde{h}(x) = h(x)\chi_{[0,T]}(x) + h(-x)\chi_{(-T,0)}(x)$$

ed estendendo poi per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ tale funzione. Poiché la funzione $\tilde{h}$ è pari il suo sviluppo sarà di soli coseni e

$$\int_{-T}^{T} \tilde{h}(x) \cos \frac{n\pi}{T} x dx = 2 \int_{0}^{T} h(x) \cos \frac{n\pi}{T} x.$$

Se vogliamo uno sviluppo di soli seni si considera

$$\tilde{h}(x) = h(x)\chi_{[0,T]} - h(-x)\chi_{(-T,0)}(x).$$

Nel nostro caso estendiamo la funzione nel modo seguente:

Figura 8.4:

$$\tilde{f}(x) = -(x + 2\pi)\chi_{(-2\pi,-\pi]}(x) + x\chi_{(-\pi,\pi]}(x) - (x - 2\pi)\chi_{(\pi,2\pi]}(x)$$

e poi estendo $\tilde{f}$ periodicamente su tutto $\mathbb{R}$ (a questo punto avremo una funzione periodica di periodo 4π). La restrizione di $\tilde{f}$ a $[0, 2\pi]$ è sempre la nostra f. La funzione estesa risulta essere dispari fornendo i coefficienti dei coseni nulli. Valutiamo i coefficienti:

$$\begin{aligned}
b_n =& \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} g(x) \text{sen} \frac{n\pi}{2\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} f(x) \text{sen} \frac{n}{2} x dx \\
=& \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \text{sen} \frac{n}{2} x dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} f(x) \text{sen} \frac{n}{2} x dx \\
=& \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \text{sen} \frac{n}{2} x dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} [-x + 2\pi] \text{sen} \frac{n}{2} x dx.
\end{aligned}$$

Abbiamo che

$$\int x \text{sen} \frac{n}{2} x dx = -\frac{2}{n} x \cos \frac{n}{2} x + \frac{4}{n^2} \text{sen} \frac{n}{2} x$$

per cui

$$
\begin{aligned}
&\text{tra } 0 \text{ e } \pi - \frac{2}{n}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi}\text{sen}\frac{n\pi}{2}\\
&\text{tra } \pi \text{ e } 2\pi \frac{1}{\pi}\Big[-\Big(-\frac{4\pi}{n}\cos n\pi + \frac{2\pi}{n}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2}\text{sen}n\pi - \frac{4}{n^2}\text{sen}\frac{n\pi}{2}\Big)+\\
&\qquad + 2\pi\Big(-\frac{2}{n}\cos n\pi + \frac{2}{n}\cos\frac{n\pi}{2}\Big)\Big].
\end{aligned}
$$

Sommando, poiché

$$
\text{sen}\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} & n \text{ dispari}\\ 0 & n \text{ pari,}\end{cases}
$$

si ha

$$
b_n = \frac{8}{n^2\pi}\text{sen}n\frac{\pi}{2} = \frac{8}{n^2\pi}\begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} & n \text{ dispari}\\ 0 & n \text{ pari,}\end{cases}
$$

La serie è data dalla somma dei seguenti termini

$$
\sum_{n \text{ dispari}} \frac{8}{n^2\pi}\text{sen}n\frac{\pi}{2}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{8}{(2n+1)^2\pi}\text{sen}\frac{2n+1}{2}x
$$

Lo sviluppo trovato è lo sviluppo in soli seni della funzione $\tilde{f}$, quello in (8.6) è lo sviluppo della funzione f: convergono entrmabi (uniformemente) alla funzione originale nell'intervallo $[0, 2\pi)$, ma a funzioni diverse nell'intervallo $(-2\pi, 0]$ (si vedano le Figura 8.3 e Figura 8.4).

Soluzione 8.41 La funzione

$$
f(x) = 1 - \frac{2|x|}{\pi}, \qquad x \in (-\pi, \pi].
$$

come si vede dal garfico, è una funzione pari per cui $b_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si verifica

Figura 8.5:

facilmente che anche $a_0 = 0$. Gli altri coefficienti sono dati ($n > 0$)

$$\begin{aligned}
a_n =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big[\cos nt - \frac{2}{\pi}|t|\cos nt\Big]dt \\
=& -\frac{2}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}|t|\cos nt\ dt = -\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi} t\cos nt\ dt = \\
=& -\frac{4}{\pi^2}\Big[\frac{t}{n}\mathrm{sen}nt\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{1}{n}\mathrm{sen}nt\ dt\Big] \\
=& -\frac{4}{\pi^2}\Big[-\frac{1}{n}\Big(-\frac{1}{n}\cos nt\Big)\Big]\Big|_0^{\pi} = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ \dfrac{8}{n^2\pi^2} & n \text{ dispari}\end{cases}
\end{aligned}$$

per cui la serie è data da

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{8}{(2n+1)^2\pi^2}\cos(2n+1)x$$

che converge uniformemente su tutto $\mathbb{R}$ (visto che il prolungamento periodico a tutto $\mathbb{R}$ di f è continuo e C^1 a tratti). La serie converge anche totalmente visto che

$$\sup_{x\in(-\pi,\pi]}\Big|\frac{8}{(2n+1)^2\pi^2}\cos(2n+1)x\Big| = \frac{8}{(2n+1)^2\pi^2}.$$

Per calcolare le due serie, si può valutare la funzione in $x = 0$ e usare l'uguaglianza di Parseval.

Soluzione 8.42 Richiedere lo sviluppo in serie di soli coseni significa voler scrivere

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

e quindi significa richiedere che la funzione assegnata deve essere pari. Nel testo la funzione viene assegnata su di un intervallo di ampiezza π e si richiede che deve essere 2π, quindi bisogna estendere tale funzione, e l'estensione che quindi si farà sarà l'estensione pari. Sfruttando la parità della funzione, abbiamo che

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = -\frac{\pi^2}{3} \\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{n^2}((-1)^n + 1) \\
b_n &= 0.
\end{aligned}$$

Quindi la serie di Fourier sarà totalmente convergente in quanto gli a_n sono i termini di una serie convergente, e quindi converge uniformemente su tutto $(-\pi, \pi]$.

Soluzione 8.43 Fare lo sviluppo in soli coseni significa estendere pari la funzione in $[-\pi, 0]$ e poi 2π–periodica su $\mathbb{R}$. Se si traccia il grafico della funzione estesa su tutto $\mathbb{R}$ si nota che la funzione risulta continua, da cui la convergenza totale della serie di Fourier e quindi puntuale ed uniforme ad f. I coefficienti che compaiono sono solo quelli del coseno, con

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^3 dx = \frac{\pi^3}{2}$$

mentre

$$\begin{aligned}a_k =&\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^3\cos(kx)dx = \frac{6\pi}{k^2}(-1)^k - \frac{12}{\pi k^4}\Big((-1)^k-1\Big)\\ =&\begin{cases}\frac{3\pi}{2m^2} & \text{se } k=2m \text{ pari}\\ \\ \frac{24}{\pi(2m+1)^4}-\frac{6\pi}{(2m+1)^2} & \text{se } k=2m+1 \text{ dispari}\end{cases}\end{aligned}$$

Ne deduciamo che

$$\begin{aligned}f(x) =&\frac{\pi^3}{2}+\frac{3\pi}{2}\sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m^2}\cos(2mx)+\\ &+\sum_{m=0}^\infty\left(\frac{24}{\pi(2m+1)^4}-\frac{6\pi}{(2m+1)^2}\right)\cos((2m+1)x).\end{aligned} \tag{8.7}$$

Se valutiamo i due membri per $x=0$ troviamo la relazione

$$0=\frac{\pi^3}{2}+\frac{3\pi}{2}\sum_{m=1}^\infty\frac{1}{m^2}-6\pi\sum_{m=0}^\infty\frac{1}{(2m+1)^2}+\frac{24}{\pi}\sum_{m=0}^\infty\frac{1}{(2m+1)^4}. \tag{8.8}$$

Sfruttiamo ora il fatto che

$$\sum_{m=1}^\infty\frac{1}{m^2}=\frac{\pi^2}{6};$$

inoltre la serie precedente può essere spezzata tra termini pari e termini dispari

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^\infty\frac{1}{m^2}=&\sum_{m=1}^\infty\frac{1}{2m^2}+\sum_{m=0}^\infty\frac{1}{(2m+1)^2}\\ =&\frac{1}{4}\sum_{m=1}^\infty\frac{1}{m^2}+\sum_{m=0}^\infty\frac{1}{(2m+1)^2}\\ =&\frac{\pi^2}{24}+\sum_{m=0}^\infty\frac{1}{(2m+1)^2}.\end{aligned}$$

sostituendo in (8.8) troviamo che

$$\sum_{m=0}^\infty\frac{1}{(2m+1)^4}=\frac{\pi^4}{16}$$

e quindi

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^4}=\frac{1}{16}\sum_{m=1}^\infty\frac{1}{m^4}+\sum_{m=0}^\infty\frac{1}{(2m+1)^4},$$

da cui

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{15}.$$

Capitolo 9

Equazioni differenziali

Esercizio 9.1 Dopo averne discussa esistenza ed unicità, si risolva il seguente Problema di Cauchy,

$$\begin{cases} ty'(t) + y(t) = 0 \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

Si dica inoltre su quale intervallo $I = (a, b)$ è definita la soluzione trovata e si calcolino i limiti

$$\lim_{t \to a^+} y(t), \qquad \lim_{t \to b^-} y(t).$$

Esercizio 9.2 Si risolta il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) + t - 1 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Per tale problema, si costruisca inoltre la successione di funzioni $(u_h(t))_{h \in \mathbb{N}}$ che si utilizza nella dimostrazione del Teorema di esistenza ed unicità, cioè la successione

$$u_0(t) \equiv 1, \qquad u_{h+1}(t) = 1 + \int_0^t (u_h(s) + s - 1)ds,$$

verificando la convergenza di u_h alla soluzione.

Esercizio 9.3 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + \tan(x)y(x) = \dfrac{\sin(x)}{1 + \sin(x)}, \\ \\ y(0) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Esercizio 9.4 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{1 + 2x}{\cos y} \\ \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

Esercizio 9.5 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (x + y'(x))^2 - x - y''(x) - 1; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

Esercizio 9.6 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$4y'(x) + y(x) = y^3(x)(x^3 - 4x).$$

Esercizio 9.7 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y^{(4)}(x) - 2y^{(3)}(x) + 2y^{(2)}(x) - 2y'(x) + y(x) = 0.$$

Esercizio 9.8 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y^{(3)}(x) = \frac{y^{(2)}(x)}{(x+1)^3}.$$

Esercizio 9.9 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y(x)y''(x) - (y'(x))^2 = y^4(x).$$

Esercizio 9.10 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$(1 + x^2)y'(x) + xy(x) = \frac{1}{(1 + x^2)}.$$

Esercizio 9.11 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{2}{x}y(x) + \frac{x+1}{x}.$$

Esercizio 9.12 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'(x)(1 - x^2) - xy(x) - xy^2(x) = 0.$$

Esercizio 9.13 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{6x} + \frac{x}{y^5(x)}.$$

Esercizio 9.14 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y(x)e^{2x} - (1 + e^{2x})y'(x) = 0.$$

Esercizio 9.15 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$e^{x+y(x)}y'(x) + x = 0.$$

Esercizio 9.16 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{x^3 + y^3(x)}{xy^2(x)}.$$

Esercizio 9.17 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{2x + y(x) - 1}{4x + 2y(x) + 5}.$$

Esercizio 9.18 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{4x - y(x) + 7}{2x + y(x) - 1}.$$

Esercizio 9.19 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = -\dfrac{x}{y'(x)} \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 9.20 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} (x+1)y''(x) - (x+2)y'(x) + x + 2 = 0 \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 9.21 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y(x)y''(x) = y^2(x)y'(x) + y'(x)^2 \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 9.22 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y(x)y''(x) - y'(x)(1 + y'(x)) = 0.$$

Esercizio 9.23 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2y'(x) + (y'(x)^2 - 6x)y''(x) = 0 \\ y'(2) = 2 \\ y(2) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 9.24 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} 1 + y(x)y''(x) - y'(x)^2 = 0 \\ y'(1) = 1 \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 9.25 Utilizzando il metodo delle variazioni delle costanti, risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy''(x) - xy'(x) = 3x^2 \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 9.26 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$2y''(x) - y'(x) - y(x) = 4xe^{2x}.$$

Esercizio 9.27 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y''(x) + y(x) = x \sin x.$$

Esercizio 9.28 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$\frac{y'(x) - y(x)}{y''(x)} = 3.$$

Esercizio 9.29 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = xe^x \cos 2x - x^2 e^x \sin 2x.$$

Esercizio 9.30 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + 4y(x) = \sin x \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 9.31 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y''(x) + y(x) = 2x \cos x \cos 2x.$$

Esercizio 9.32 Utilizzando il metodo della variazione delle costanti, risolvere la seguente equazione differenziale

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \frac{e^{-x}}{x}.$$

Esercizio 9.33 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y''(x) - 2y(x) = 4x^2 e^{x^2}.$$

Esercizio 9.34 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y^{(3)}(x) + y^{(2)}(x) = x^2 + 1 + 3xe^x.$$

Esercizio 9.35 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y^{(4)}(x) - 2y^{(3)}(x) + y^{(2)}(x) = x^3.$$

Esercizio 9.36 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{(3)}(x) + 2y^{(2)}(x) + 2y'(x) + y(x) = x \\ \\ y(0) = y'(0) = y^{(2)}(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 9.37 Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale;

$$y''(t) = (y'(t))^2 + 1.$$

Esercizio 9.38 Risolvere il seguente Problema di Cauchy;

$$\begin{cases} y''(t) = y'(t)(1 + y(t)) \\ \\ y(0) = 0 \\ \\ y'(0) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Esercizio 9.39 Risolvere il seguente Problema di Cauchy;

$$\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = (1 + t)e^t \cos(2t) \\ \\ y(0) = 1, \\ \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 9.40 Trovare l'integrale generale della seguente equazione differenziale;

$$y''(t) - y(t) = \frac{1}{1 + e^t}.$$

9.1 Soluzioni

Soluzione 9.1 L'equazione data può essere vista sia come equazione a variabili separabili, sia come equazione lineare del primo ordine; nel caso in cui la si vede come equazione a variabili separabili, abbiamo

$$y'(t) = -\frac{1}{t}y(t),$$

da cui si vede che $a(t) = -\frac{1}{t}$ e $b(y) = y$ definite per $a : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Siccome il dato iniziale viene dato in $t_0 = 1$, il problema va risolto in $(0, +\infty)$; inoltre, l'equazione $b(y) = 0$ è risolta solo per $y = 0$, che non soddisfa la condizione iniziale. Per trovare la soluzione scriviamo quindi, dato che abbiamo un problema ai valori iniziali,

$$\int_1^t \frac{y'(s)}{y(s)}ds = - \in_1^t \frac{1}{s}ds$$

e quindi la soluzione sarà data da

$$y(t) = \frac{2}{t}.$$

Tale funzione è definita su $y : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ e si nota che

$$\lim_{t\to 0} y(t) = +\infty, \qquad \lim_{t\to+\infty} y(t) = 0.$$

Soluzione 9.2 L'equazione data è un'equazione lineare con $a(t) = 1$ e $b(t) = t - 1$, definite su tutto $\mathbb{R}$. Dato che abbiamo un problema ai dati iniziali, possiamo considerare la funzione

$$A(t) = \int_0^t a(s)ds = t,$$

da cui la soluzione che sarà data da

$$y(t) = e^t\Big(1 + \int_0^t e^{-s}(s-1)ds\Big) = e^t - t.$$

Per la seconda parte dell'esercizio, partiamo con la funzione $u_0(t) = 1$ e costruiamo

$$u_1(t) = 1 + \int_0^t \Big(u_0(s) + s - 1\Big)ds = 1 + \int_0^t sds = 1 + \frac{t^2}{2},$$

così come

$$u_2(t) = 1 + \int_0^t \Big(u_1(s) + s - 1\Big)ds = 1 + \int_0^t \Big(s + \frac{s^2}{2}\Big)ds = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!}.$$

Iterando troveremo quindi che

$$u_{h+1}(t) = 1 + \int_0^t \Big(u_h(s) + s - 1\Big)ds = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \ldots + \frac{t^{h+2}}{(h+2)!}$$

Si riconosce quindi lo sviluppo dell'esponenziale a cui è stato tolto il termine contenente t; avremo quindi che

$$\lim_{h\to+\infty} u_h(t) = 1 + \sum_{h=2}^{\infty} \frac{t^h}{h!} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^h}{h!} - t = e^t - t.$$

Soluzione 9.3 L'equazione data è una equazione differenziale lineare a coefficienti non costanti; per trovare la soluzione usiamo quindi la formula risolutiva per questo tipo di equazione. Calcoliamo anzitutto

$$A(x) = \int \tan x dx = -\ln|\cos x|.$$

Una osservazione preliminare; la funzione $\tan x$ è definita per $x \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ Gli intervalli su cui è definita sono quindi della forma $(\pi/2 + k\pi, \pi/2 + (k+1)\pi)$ e l'unico tra questi intervalli che contiene il dato iniziale $x_0 = 0$ è $(-\pi/2, \pi/2)$. Su tale intervallo $|\cos x| = \cos x$, quindi $A(x) = -\ln \cos x$. L'integrale generale sarà quindi dato da

$$y(x) = \cos x \left(c + \int \frac{\mathrm{sen} x}{\cos x(1 + \mathrm{sen} x)} dx. \right).$$

Calcoliamo quest'ultimo integrale; utilizzando la sostituzione $t = \tan x/2$ e le formule parametriche, si ottiene

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{sen} x}{\cos x(1+\mathrm{sen} x)} dx &= \int \frac{4t}{(1-t)(1+t)^3} dt \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-t} dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+t} dt + \int \frac{1}{(1+t)^2} dt - 2 \int \frac{1}{(1+t)^3} dt \\
&= \ln \sqrt{\left| \frac{1+t}{1-t} \right|} - \frac{t}{(1+t)^2} \\
&= \ln \sqrt{\left| \frac{1+\tan x/2}{1-\tan x/2} \right|} - \frac{\tan x/2}{(1+\tan x/2)^2} \\
&= \ln \sqrt{\left| \frac{\cos x/2 + \mathrm{sen} x/2}{\cos x/2 - \mathrm{sen} x/2} \right|} - \frac{\mathrm{sen} x/2 \cos x.2}{(\cos x/2 + \mathrm{sen} x/2)^2}.
\end{aligned}$$

In definitiva la soluzione è data

$$y(x) = \frac{1}{2} \cos x \ln \frac{1 + \mathrm{sen} x}{\cos x} + \frac{1}{2} \frac{\cos x}{1 + \mathrm{sen} x}.$$

Soluzione 9.4 l'equazione proposta si presenta nella forma a variabili separabili, cioè

$$\cos y(x) y'(x) = 1 + 2x.$$

Integrando quindi ambo i membri tra 0 e x, si ottiene

$$\sin y(x) - \sin 0 = x + x^2,$$

da cui

$$y(x) = \arcsin(x + x^2).$$

Soluzione 9.5 Ponendo $z(x) = x + y'(x)$, l'equazione differenziale può essere riscritta nella forma

$$x + y' = (x + y')^2 - y'' - 1,$$

cioè
$$z = z^2 - z'.$$
Questa è una equazione differenziale del prim'ordine a variabili separabili, la cui soluzione è data da
$$\left|\frac{z(x)-1}{z(x)}\right| = \alpha e^{x-x_0}, \quad \alpha > 0;$$
se imponiamo le condizioni iniziali, notiamo che possiamo togliere il modulo e troviamo che $\alpha = 1/2$ e quindi
$$z(x) = \frac{2}{2-e^x}.$$
A questo punto il problema diventa
$$\begin{cases} x + y' = \frac{2}{2-e^x} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$
Tale problema ha per soluzione la funzione
$$y(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(2-e^x).$$

Soluzione 9.6 L'equazione proposta è una equazione di tipo Bernoulli; dividendo infatti l'equazione per y^3 (si noti che tale operazione è lecita se si cercano soluzioni non nulle), si ottiene
$$4y^{-3}y' + y^{-2} = x^3 - 4x,$$
da cui, ponendo $z = y^{-2}$, si ricava l'equazione
$$-2z' + z = x^3 - 4x.$$
Questa è una equazione differenziale lineare a coefficienti non costanti, la cui soluzione è data da
$$z(x) = ce^{x/2} + x^3 + 6x^2 + 20x + 40.$$
La soluzione del problema sarà quindi data da
$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{ce^{x/2} + x^3 + 6x^2 + 20x + 40}}.$$

Soluzione 9.7 L'equazione data è una equazione lineare a coefficienti costanti; le soluzioni le cerchiamo quindi nella forma $y = e^{\lambda x}$. Quindi tali funzioni sono soluzioni se e solo se λ è una radice del polinomio caratteristico
$$P(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0;$$
polinomio può essere riscritto nella forma
$$P(\lambda) = (\lambda^2+1)(\lambda-1)^2$$
e quindi le radici complesse sono date da $\lambda = 1$ (con molteplicità 2) e $\lambda = \pm i$. La soluzione generale sarà quindi data dalla funzione
$$y(x) = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{ix} + c_4e^{-ix}$$
con $c_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, 4$, oppure se si vogliono usare solo numeri reali
$$y(x) = c_1e^x + c_2xe^x + c_3\sin x + c_4\cos x, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

Soluzione 9.8 L'equazione di terzo grado assegnata può essere ridotta ad una equazione del primo ordine con la sostituzione $v = y''$, da cui

$$v' = \frac{v}{(x+1)^3}.$$

Tale equazione ha per soluzione

$$|v(x)| = \alpha e^{-1/2(x+1)^2}, \quad \alpha > 0,$$

e quindi la soluzione del problema originale diventa

$$y(x) = \pm\alpha \int_{x_0}^{t} \int_{x_0}^{\tau} e^{-1/2(\tau+1)^2} d\tau dt + c_1 + c_2.$$

Soluzione 9.9 Si noti che nell'equazione data non compare la dipendenza da x; in questo tipo di equazioni si cambia in qualche modo il punto di vista, e si vede la funzione y come variabile libera e si cerca di esprimere le varie derivate come derivate in funzione della variabile y. A tale scopo si introduce la funzione

$$z(y) = y'(x),$$

e si calcola la derivata rispetto a y di tale funzione in modo da ottenere

$$\frac{dz(y)}{dy} = \frac{dy'(x)}{dy} = \frac{dy'(x)}{dx}\frac{dx}{dy} = \frac{y''(x)}{y'(x)} = \frac{y''(x)}{z(y)},$$

e quindi si ottiene l'equazione differenziale

$$z\frac{dz}{dy} - \frac{z^2}{y} - y^3 = 0,$$

che può essere riscritta come

$$\frac{d(z^2)}{2dy} - \frac{z^2}{y} = y^3$$

otteniamo la soluzione

$$z^2(y) = y^2\left(c + y^2\right).$$

Si tratta quindi poi di risolvere l'equazione differenziale

$$(y'(x))^2 = y(x)^2\left(c + \frac{y^2}{2}\right).$$

Soluzione 9.10 L'equazione data è di tipo lineare a coefficienti non costanti, la cui soluzione è data da

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\left(c - \frac{1}{x^2 - x\sqrt{x^2+1} + 1}\right).$$

Soluzione 9.11 L'equazione data è una equazione lineare a coefficienti non costanti; applicando quindi la formula risolutiva si trova che

$$y(x) = cx^2 - \frac{2x+1}{2}.$$

Soluzione 9.12 l'equazione data è una equazione di tipo Bernoulli; con la sostituzione $z = y^{-1}$, si ottiene l'equazione lineare a coefficienti non costanti

$$z' = \frac{x}{x^2-1}z + \frac{x}{x^2-1},$$

che ha per soluzione

$$z(x) = \sqrt{|x^2-1|}\left(c + \int \frac{t}{(t^2-1)\sqrt{|t^2-1|}}dt\right),$$

che produce, a seconda dei dati iniziali, una delle seguenti due soluzioni

$$z(x) = c\sqrt{x^2-1} - 1$$

$$z(x) = c\sqrt{1-x^2} - 1.$$

Quindi la soluzione originale sarà una delle due tra

$$\frac{1}{c\sqrt{x^2-1}-1}$$

e

$$\frac{1}{c\sqrt{1-x^2}-1}$$

Soluzione 9.13 L'equazione data è di tipo Bernoulli, e quindi con la sostituzione $z = y^6$ si ottiene la soluzione

$$z(x) = \frac{1}{|x|}\left(c + \int 6t|t|dt\right).$$

Se cerchiamo la soluzione per $x > 0$, integrando e tornando alla funzione y, si ottiene

$$y(x) = \sqrt[6]{2x^2 + \frac{c}{|x|}}.$$

Soluzione 9.14 L'equazione data è a variabili separabili

$$\frac{y'}{y} = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}},$$

e quindi la soluzione è data da

$$|y(x)| = c\sqrt{e^{2x}+1}, \quad c > 0.$$

Soluzione 9.15 Riscrivendo l'equazione nella forma

$$y'e^y e^x = -x,$$

notiamo che siamo ricondotti ad una equazione a variabili separabili, la cui soluzione è data da

$$y(x) = \ln(c + (x+1)e^{-x}).$$

Soluzione 9.16 L'equazione data può essere ricondotta ad una equazione di tipo omogeneo

$$y' = \frac{1 + (y/x)^3}{(y/x)^2},$$

che con la sostituzione $y = xz$ si riconduce all'equazione a variabili separabili

$$z + xz' = \frac{1 + z^3}{z^2},$$

la cui soluzione è data da

$$z(x) = \sqrt[3]{c + 3\ln|x|}.$$

Si tratta quindi poi di porre

$$y'(x) = xz(x) = x\sqrt[3]{c + 3\ln|x|}.$$

Soluzione 9.17 Siamo in presenza di una equazione differenziale nella forma

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right);$$

per equazioni di questo tipo si procede come segue. Se $a\beta - b\alpha = 0$ (che vuol dire che le rette a numeratore e a denominatore sono parallele, eventualmente coincidenti), allora notando che, supponendo $a, b, \alpha, \beta \neq 0$

$$\alpha x + \beta y = \frac{\alpha}{a}\left(ax + \frac{a\beta}{\alpha}\right) = \frac{\alpha}{a}(ax + by),$$

ponendo $z = ax + by$, da cui $z' = a + by'$, si ottiene l'equazione a variabili separabili

$$\frac{z' - a}{b} = f\left(\frac{z + c}{(\alpha/az + \gamma)}\right).$$

Nel caso in cui $a\beta - b\alpha \neq 0$, significa che le due rette a numeratore e a denominatore si incontrano in un punto (x_0, y_0) dato come unica soluzione del sistema

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + c = 0 \\ \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma = 0 \end{cases}$$

(notare che la condizione data sui coefficienti implica l'invertibilità della matrice dei coefficienti di tale sistema). In tal caso si procede alla sostituzione

$$\begin{cases} \xi = x - x_0 \\ \eta = y - y_0 \end{cases}$$

e si cerca la soluzione $\eta(\xi)$ soluzione dell'equazione

$$\eta' = f\left(\frac{a\xi + b\eta}{\alpha\xi + \beta\eta}\right)$$

e questa è una equazione di tipo omogeneo.

Nel nostro caso siamo nella condizione $a\beta - b\alpha = 0$, quindi ponndo $z = 2x + y$, otteniamo l'equazione

$$z' - 2 = \frac{z-1}{2z+5}$$

la cui soluzione è data da

$$\frac{2z(x)}{5} + \frac{7}{25} \ln |5z(x) + 9| = x + c,$$

e quindi la soluzione è data nella forma implicita

$$\frac{2y(x)}{5} + \frac{7}{25} \ln |10x + 5y(x) + 9| = \frac{x}{5} + c.$$

Soluzione 9.18 Utilizzando la discussione dell'esercizio precedente, con il cambio di variabili

$$\begin{cases} \xi = x + 1 \\ \\ \eta = y - 3 \end{cases}$$

otteniamo l'equazione

$$\eta' = \frac{4\xi - \eta}{2\xi + \eta},$$

che, posto $\eta(\xi) = \xi w(\xi)$, si trova la soluzione

$$\left| \frac{w-1}{(4-w)^2} \right| = \alpha |\xi|, \quad \alpha > 0.$$

Tornando alla funzione η, abbiamo trovato che

$$|\eta(\xi) - \xi| = \alpha \left(4 - \frac{\eta(\xi)}{\xi} \right) \xi^2;$$

si ricava quindi la soluzione $y(x)$ tornando indietro con le sostituzioni.

Soluzione 9.19 L'equazione data può essere riscritta come

$$y'y'' = -x$$

o meglio ancora come

$$\frac{d(y')^2}{2dx} = -x.$$

Integrando quindi tra il punto iniziale $x_0 = 0$ e x, si ottiene che

$$\int_0^x \frac{d(y'(t))^2}{2dx} dt = -\int_0^x t dx,$$

da cui si ricava, tenendo presente che $y'(0) = 1 > 0$,

$$y'(x)^2 = 1 - x^2 \Rightarrow y'(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

La soluzione sarà quindi data da, tenendo presente che $y(0) = 1$,

$$y(x) = 1 + \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{2}.$$

Soluzione 9.20 Notando che nell'equazione non compare la y, si può porre $v = y'$ in modo da ottenere un'equazione lineare a coefficienti non costanti

$$\begin{cases} v' = \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) v - \frac{x+2}{x+1} \\ v(0) = 1 \end{cases}$$

la cui soluzione è data da

$$v(x) = 1.$$

La soluzione del problema iniziale sarà quindi data da

$$y(x) = x.$$

Soluzione 9.21 Nell'equazione data non compare la variabile x, quindi si può introdurre la funzione $z(y) = y'(x)$; con questa sostituzione otteniamo

$$\dot{z}(y) = \frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dy} = \frac{y''}{z},$$

si ottiene l'equazione

$$\begin{cases} \dot{z} = \frac{z}{y} + y, \\ z(1) = z(y(0)) = y'(0) = 1; \end{cases}$$

la soluzione di tale equazione è data da

$$z(y) = y^2.$$

Si tratta ora di risolvere il problema

$$\begin{cases} y'(x) = y(x)^2 \\ \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

la cui soluzione è data da

$$y(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Soluzione 9.22 Come nell'esercizio precedente, nell'equazione non compare la variabile x e quindi si pone $z(y) = y'$; si ottiene quindi che

$$|z(y) + 1| = c|y|, \quad c > 0,$$

e quindi il problema è risolto se si risolve l'equazione

$$|y' + 1| = c|y|,$$

dove la possibilità di togliere o meno il modulo dipenderà dai dati iniziali; avremo quindi le due possibili soluzioni

$$|cy(x) - 1| = \alpha e^{x}, \quad c, \alpha > 0$$

$$|cy(x) + 1| = \alpha e^{-x}, \quad c, \alpha > 0.$$

Soluzione 9.23 Siccome nell'equazione data non compare la variabile y, si può porre $v = y'$ in modo da ottenere l'equazione differenziale al prim'ordine

$$\begin{cases} v'(v^2 - 6x) + 2v = 0 \\ v(2) = 2 \end{cases}$$

Notiamo che se moltiplichiamo l'equazione per v (operazione lecita in quanto v non può annullarsi mai), allora otteniamo, ponendo $z = v^2$, l'equazione

$$\begin{cases} \frac{z'}{2}(z - 6x) + 2z = 0 \\ z(2) = 4 \end{cases}$$

che è una equazione omogenea la cui soluzione in forma inplicita è data

$$|z(x) - 2x|^2 = c|z|^3, \qquad c > 0.$$

Imponendo la condizione iniziale si trova $c = 0$, cioè $z(x) = 2x$, da cui $v(x) = \sqrt{2x}$. A questo punto dobbiamo risolvere $y'(x) = \sqrt{2x}$ con la condizione iniziale $y(2) = 0$, cioè

$$y(x) = \frac{1}{3}\Big(2x\sqrt{2x} - 8\Big).$$

Soluzione 9.24 Siccome nell'equazione non compare la variabile indipendente, poniamo $z(y) = y'(x)$, e quindi si ottiene l'equazione

$$\begin{cases} yzz'(y) = z^2(y) - 1 \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

Questa è un'equazione a variabili separabili con $a(y) = \frac{1}{y}$ e $b(z) = \frac{z^2-1}{z}$; la funzione b si annulla per $z = \pm 1$ e il dato iniziale è proprio $z(0) = 1$, quindi la soluzione è $z(y) = 1$. Questo porta all'equazione $y'(x) = 1$, cioè, tenendo presente che $y(0) = 0$, $y(x) = x$.

Soluzione 9.25 L'equazione può essere riscritta nella forma

$$y'' - y' = 3x;$$

la soluzione dell'omogenea è data da

$$y(x) = c_1 + c_2 e^x,$$

mentre per la soluzione particolare si trova la funzione

$$y_1(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 3x.$$

La soluzione, imponendo le condizioni iniziali, sarà quindi determinata da

$$y(x) = 4e^x - \frac{3}{2}x^2 - 3x - 3.$$

Soluzione 9.26 La soluzione dell'omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x/2};$$

per la determinazione della soluzione particolare otteniamo la funzione

$$y_1(x) = \left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}\right) e^{2x}.$$

La soluzione generale sarà quindi data da

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x/2} + \left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}\right) e^{2x}.$$

Soluzione 9.27 La soluzione dell'omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x;$$

per quanto riguarda la soluzione particolare si trova che

$$y_1(x) = \frac{x}{4}\sin x - \frac{x^2}{4}\cos x,$$

e quindi la soluzione generale è data da

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x + \frac{x}{4}\sin x - \frac{x^2}{4}\cos x.$$

Soluzione 9.28 L'equazione differenziale può essere riscritta nella forma

$$3y'' - y' + y = 0,$$

e quindi si tratta di una equazione differenziale del secondo ordine lineare omogenea a coefficienti costanti. Il suo polinomio caratteristico è dato da

$$P(\lambda) = 3\lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda - 1/6 - i\sqrt{11}/6)(\lambda - 1/6 + i\sqrt{11}/6);$$

la soluzione generale sarà quindi data da

$$y(x) = e^{x/6}\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{11}}{6}x + c_2 \sin\frac{\sqrt{11}}{6}x\right).$$

Soluzione 9.29 La soluzione dell'equazione omogenea è data da

$$y_0(x) = e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x).$$

La soluzione particolare è data da

$$y_1(x) = xe^x\left((ax^2 + bx + c)\cos 2x + (dx^2 + ex + f)\sin 2x\right).$$

La soluzione generale sarà data dalla somma delle due.

Soluzione 9.30 La soluzione dell'equazione omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x;$$

per quanto riguarda la soluzione particolare, si ottiene

$$y_1(x) = \frac{1}{3} \sin x.$$

A questo punto, imponendo le condizioni iniziali, si ottiene la soluzione

$$y(x) = \frac{1}{3} \sin 2x + \cos 2x + \frac{1}{3} \sin x.$$

Soluzione 9.31 La soluzione dell'omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x;$$

per calcolare la soluzione particolare scriviamo

$$2x \cos x \cos 2x = x \cos 3x + x \cos x,$$

e quindi applicando il principio di sovrapposizione, cioè tenendo conto che la soluzione particolare di una somma di funzioni è data dalla somma delle soluzioni particolari, si ricava che le soluzioni particolari sono date da

$$y_1(x) = \frac{x}{4} \cos x + \frac{x^2}{4} \sin x,$$

$$y_2(x) = \frac{3}{32} \sin 3x - \frac{x}{8} \cos 3x.$$

La soluzione generale sarà quindi data da

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x + \frac{x}{4} \cos x + \frac{x^2}{4} \sin x + \frac{3}{32} \sin 3x - \frac{x}{8} \cos 3x.$$

Soluzione 9.32 La soluzione dell'omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x};$$

per calcolare la soluzione generale si applica il metodo della variazione delle costanti, per ottenere la soluzione

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + x e^{-x} \ln |x| - x e^{-x}.$$

Soluzione 9.33 La soluzione dell'equazione omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x};$$

per quanto riguarda la soluzione particolare, usando il metodo della variazioni delle costanti, si trova che la soluzione generale è data da

$$y(x) = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x} + e^{x^2}.$$

Soluzione 9.34 La soluzione dell'equazione omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x},$$

mentre per il calcolo della soluzione particolare usiamo il principio di sovrapposizione delle soluzioni, e cioè utilizziamo il fatto che quando il termine forzante, la parte non omogenea dell'equazione differenziale, è somma di più funzioni, allora la soluzione particolare può essere determinata sommando le varie soluzioni particolari. Utilizzando questo principio, abbiamo che associata a x^2+1 la soluzione particolare è data da

$$y_1(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2,$$

mentre associata a $3xe^x$ la soluzione particolare è data da

$$y_2(x) = e^x\left(\frac{3}{2}x - \frac{15}{4}\right).$$

La soluzione generale sarà quindi data da

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + e^x\left(\frac{3}{2}x - \frac{15}{4}\right).$$

Soluzione 9.35 La soluzione dell'equazione omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 x e^x,$$

mentre una soluzione particolare, sarà data da

$$y_1(x) = \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + 3x^3 + 12x^2;$$

la soluzione generale sarà quindi data da

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 x e^x + \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + 3x^3 + 12x^2.$$

Soluzione 9.36 La soluzione dell'equazione omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 e^{-x} + e^{-x/2}\left(c_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

mentre la soluzione particolare è data da $y_1 = x - 2$. Imponendo infine le condizioni iniziali, si trova che la soluzione è data dalla funzione

$$y(x) = e^{-x} + e^{-x/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + x - 2.$$

Soluzione 9.37 L'equazione data non dipende esplicitamente da y (in realtà neanche da t); possiamo quindi ridurre la complessità ponendo $v(t) = y'(t)$ in modo da ottenere l'equazione del primo ordine

$$v'(t) = v(t)^2 + 1,$$

la cui soluzione generale, in forma implicita, è data da

$$\arctan v(t) = t + c_1.$$

Tale soluzione è definita fin tanto che $t + c_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$ ed è data, esplicitamente, da

$$v(t) = \tan(t + c_1).$$

Ricordando che $v(t) = y'(t)$, integrando la soluzione trovata, ricaviamo che

$$y(t) = -\log|\cos(t + c_1)| + c_2, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Soluzione 9.38 L'equazione data è di tipo autonomo in quanto non compare la variabile indipendente t; possiamo quindi porre

$$z(y) := y'(t),$$

da cui, dato che $y''(t) = \frac{d}{dt}z(y(t)) = \frac{d}{dy}z(y)y'(t) = \frac{d}{dy}z(y)z(y)$, si giunge all'equazione del primo ordine

$$\begin{cases} z(y)\frac{d}{dy}z(y) = z(y)(1+y) \\ \\ z(0) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

dove il dato iniziale è stato ricavato ponendo $\frac{1}{2} = y'(0) = z(y(0)) = z(0)$. Siccome $z \equiv 0$ non è soluzione del problema ai valori iniziali, possiamo dividere per z ed integrare per ottenere che

$$z(y) = \frac{y^2 + 2y + 1}{2} = \frac{(y+1)^2}{2}.$$

Risolviamo ora il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{(y(t)+1)^2}{2} \\ \\ y(0) = 0; \end{cases}$$

tale problema ha per soluzione la funzione

$$y(t) = \frac{t}{2-t}$$

che sarà quindi la soluzione cercata.

Soluzione 9.39 Per risolvere il problema dato, risolviamo prima l'equazione omogenea considerando il polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5;$$

tale polinomio ha due radici complesse coniugate $1 \pm 2i$, da cui la soluzione generale dell'omogenea che è data da

$$y_H(t) = e^t\Big(c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t)\Big).$$

Per la ricerca della soluzione particolare, notiamo anzitutto che possiamo scrivere il termine forzante come

$$(1+t)e^t\cos(2t) = e^{1\cdot t}\Big((1+t)\cos(2\cdot t) + 0\cdot\sin(2\cdot t)\Big)$$

in cui riconosciamo la possibilità di poter applicare il metodo per somiglianza. Abbiamo $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $p_1(t) = 1+t$ polinomio di grado 1 e $q_1(t) = 0$ polinomio di grado 0. Siccome $\lambda = \alpha + i\beta = 1 + 2i$ è radice, con molteplicità 1, del polinomio caratteristico, la soluzione particolare va cercata nella forma

$$y_P(t) = te^t\Big((at+b)\cos(2t) + (ct+d)\sin(2t)\Big) = e^t\Big((at^2+bt)\cos(2t) + (ct^2+dt)\sin(2t)\Big);$$

siccome

$$\begin{aligned} y_P'(t) = e^t \Big[&\cos(2t)\Big((a+2c)t^2 + (2a+b+2d)t + b\Big) + \\ &+ \sin(2t)\Big((c-2a)t^2 + (2c-2b+d)t + d\Big)\Big], \end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned} y_P''(t) = e^t \Big[&\cos(2t)\Big((4c-3a)t^2 + (4a-3b+8c+4d)t + 2a + 2b + 4d\Big) + \\ &+ \sin(2t)\Big(-(4a+3c)t^2 - (8a+4b-4c+3d)t - 4b + 2c + 2d\Big)\Big] \end{aligned}$$

Imponendo l'equazione

$$y_P''(t) - 2y_P'(t) + 5y_P(t) = (1+t)e^t\cos(2t),$$

arriviamo all'equazione

$$e^t\Big[\cos(2t)\Big(8ct + 2a + 4d\Big) + \sin(2t)\Big(-8at - 4b + 2c\Big)\Big] = e^t(1+t)\cos(2t)$$

da cui il sistema

$$\begin{cases} 8c = 1 \\ 2a + 4d = 1 \\ -8a = 0 \\ -4b + 2c = 0 \end{cases}$$

Otteniamo quindi che una soluzione particolare è data da

$$y_P(t) = e^t\left[\frac{t}{16}\cos(2t) + \Big(\frac{t^2}{8} + \frac{t}{4}\Big)\sin(2t)\right]$$

Quindi la soluzioni generale dell'equazione omogenea è data da

$$y(t) = e^t\Big(c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t)\Big) + e^t\left[\frac{t}{16}\cos(2t) + \Big(\frac{t^2}{8} + \frac{t}{4}\Big)\sin(2t)\right].$$

Infine, imponendo le condizioni iniziali, si ottengono i valori $c_1 = 1$ e $c_2 = -\frac{1}{32}$; in definitiva la soluzione del Problema di Cauchy è data da

$$y(t) = e^t\left[\Big(1 + \frac{t}{16}\Big)\cos(2t) + \Big(-\frac{1}{32} + \frac{t^2}{8} + \frac{t}{4}\Big)\sin(2t)\right].$$

Soluzione 9.40 Il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata è dato da $\lambda^2 - 1$, quindi la soluzione generale dell'omogenea è data da

$$y_H(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}.$$

Per trovare la soluzione particolare, applichiamo il metodo della variazione delle costanti; supponiamo quindi che

$$y(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)e^{-t};$$

derivando otteniamo che

$$y'(t) = c_1'(t)e^t + c_2'(t)e^{-t} + c_1(t)e^t - c_2(t)e^{-t}.$$

Poniamo quindi la condizione

$$c_1'(t)e^t + c_2'(t)e^{-t} = 0$$

e deriviamo una seconda volta, ottenendo

$$y''(t) = c_1'(t)e^t - c_2'(t)e^{-t} + c_1(t)e^t + c_2(t)e^{-t}.$$

Impondi quindi la condizione

$$y''(t) - y(t) = \frac{1}{1+e^t}$$

si arriva all'equazione

$$c_1'(t)e^t - c_2'(t)e^{-t} = \frac{1}{1+e^t}.$$

Dobbiamo quindi risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} c_1'(t)e^t + c_2'(t)e^{-t} = 0 \\[2ex] c_1'(t)e^t - c_2'(t)e^{-t} = \dfrac{1}{1+e^t} \end{cases}$$

che ha come soluzioni

$$\begin{cases} c_1'(t) = \dfrac{1}{2e^t(1+e^t)} \\[2ex] c_2'(t) = -\dfrac{e^t}{2(1+e^t)}. \end{cases}$$

Integrando otteniamo

$$\begin{cases} c_1(t) = c_1 - \dfrac{t}{2} - \dfrac{e^{-t}}{2} + \dfrac{1}{2}\log(1+e^t) \\[2ex] c_2(t) = c_2 - \dfrac{1}{2}\log(1+e^t). \end{cases}$$

da cui la soluzione generale dell'equazione data

$$\begin{aligned} y(t) =& c_1 e^t + c_2 e^{-t} - \frac{1}{2} - \frac{te^t}{2} + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)\log(1+e^t) \\ =& c_1 e^t + c_2 e^{-t} - \frac{1}{2} - \frac{te^t}{2} + \sinh(t)\log(1+e^t). \end{aligned}$$

Appendice A

Numeri complessi

Esercizio A.1 Scrivere nelle varie forme i seguenti numeri complessi

$$1+i, \quad 6e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad 8e^{-i\frac{\pi}{3}}, \quad (1+i\sqrt{3})^5.$$

Esercizio A.2 Utilizzare la formula di De Moivre per $(\cos\vartheta + i\text{sen}\vartheta)^3$ per calcolare $\cos 3\vartheta$ e $\text{sen}3\vartheta$.

Esercizio A.3 Calcolare il modulo dei seguenti numeri complessi

$$1+i-\frac{i}{1-2i}, \qquad \frac{3-i}{(1+i)^2}-\frac{i}{1-i}.$$

Esercizio A.4 Scrivere in forma algebrica, cartesiana, polare ed esponenziale i seguenti numeri complessi

$$\frac{1}{1+i}, \quad -1+i, \quad -1-i\sqrt{3}, \quad \Big(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\Big)^2.$$

Esercizio A.5 Determinare parte reale e parte immaginaria dei seguenti numeri complessi

$$\frac{(-1/2+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}, \quad \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}.$$

Esercizio A.6 Provare la seguente identità;

$$1+e^{i\pi}=0.$$

Esercizio A.7 Dato il numero complesso $z=a+ib$, scrivere, qualora sia possibile, parte reale e parte immaginaria dei numeri

$$\frac{1}{z}, \quad ,\frac{z-1}{z+1}, \quad \frac{1}{z^2}.$$

Esercizio A.8 Determinare tutti i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ che soddisfano la seguente equazione

$$|z - 3 + 4i| = 5.$$

Esercizio A.9 Trovare le radici del polinomio

$$p(z) = z^2 - 5z + 7.$$

Esercizio A.10 Trovare le soluzioni complesse dell'equazione

$$z^2 + (1 - i)z - 2 - 2i = 0$$

ed esprimerle in forma algebrica.

Esercizio A.11 Risolvere in campo complesso la seguente equazione

$$|z|^2 z - 4i\bar{z} = 0.$$

Esercizio A.12 Risolvere in campo complesso la seguente equazione

$$(z + i)^2 = (\sqrt{3} + i)^2.$$

Esercizio A.13 Risolvere in campo complesso la seguente equazione

$$z^3 = |z|^2.$$

Esercizio A.14 Risolvere in campo complesso la seguente equazione

$$z^2 + i\bar{z} = 1.$$

Esercizio A.15 Risolvere in campo complesso la seguente equazione

$$z^2 + i\sqrt{5}|z| + 6 = 0.$$

Esercizio A.16 Risolvere in campo complesso la seguente equazione

$$|z|^2 + 5z + 10i = 0.$$

Esercizio A.17 Trovare le radici seste del numero complesso

$$w = (\sqrt{3} + i)^9.$$

Esercizio A.18 Calcolare le radici quarte del numero $2 - i\sqrt{12}$.

Esercizio A.19 Risolvere l'equazione $(z - 2)^3 = -i$.

Esercizio A.20 Dopo aver scritto il numero complesso

$$w = \frac{(1+2i)(2-3i)}{(2-i)(3+2i)}$$

in forma algebrica e polare/esponenziale, si determino le soluzioni complesse dell'equazione $z^8 = w$.

Esercizio A.21 Dimostrare che la somma delle radici n–esime dell'unità è pari ad 0.

Esercizio A.22 Mostrare che se z è una radice n–esima di w, allora tutte le altre radici sono date da $z\omega_k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, con $\omega_0 = 1, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ le radici n–esime dell'unità. In particolare, le radici n–esima saranno della forma $z\omega_1^k$, $k = 0, \ldots, n-1$.

Esercizio A.23 Calcolare le soluzioni complesse di

$$|z|^2 - 6z + 1 = 0.$$

Esercizio A.24 Calcolare le soluzioni complesse di

$$z^4 + 6z^2 - 5 = 0.$$

Esercizio A.25 Calcolare le soluzioni complesse di

$$z^4 + 4 = 0.$$

Esercizio A.26 Dato il polinomio

$$p(z) = z^4 - 4z^3 + 4z^2 - 4z + 3,$$

calcolare $p(i)$ e trovare tutte le radici del polinomio.

Esercizio A.27 Calcolare le soluzioni complesse di

$$z^3 + 3z^2 + 3z + 1 = 8i.$$

Esercizio A.28 Trovare le soluzioni complesse di

$$z^2 + iz + i\frac{\sqrt{3}}{4} = 0.$$

Esercizio A.29 Trovare le soluzioni complesse di

$$z|z|^2 - (1 + 4\sqrt{3})i\bar{z} = 0.$$

Esercizio A.30 Dato $w \in \mathbb{C}$, trovare i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$|z - w| = |z + w|.$$

A.1 Soluzioni

Soluzione A.1 Si ottengono le seguenti espressioni

$$\begin{aligned}1+i=&(1,1)=\sqrt{2}\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)\\=&\sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4}+i\mathrm{sen}\frac{\pi}{4}\Big)=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}},\end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned}6e^{i\frac{\pi}{6}}=&6\Big(\cos\frac{\pi}{6}+i\mathrm{sen}\frac{\pi}{6}\Big)=6\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\Big)\\=&3\sqrt{3}+3i=(3\sqrt{3},3),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}8e^{-i\frac{\pi}{3}}=&8e^{i\frac{5\pi}{3}}==8\Big(\cos\frac{5\pi}{3}+i\mathrm{sen}\frac{5\pi}{3}\Big)\\=&8\Big(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)=4-4i\sqrt{3}=(4,-4\sqrt{3}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1+i\sqrt{3})^5=&32\Big(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^5=32(e^{i\frac{\pi}{3}})^5\\=&32e^{i\frac{5\pi}{3}}=16-16i\sqrt{3}=(16,-16\sqrt{3}).\end{aligned}$$

Soluzione A.2 Notiamo che

$$(\cos\vartheta+i\mathrm{sen}\vartheta)^3=e^{3i\vartheta}=\cos 3\vartheta+i\mathrm{sen}3\vartheta,$$

mentre analogamente con lo sviluppo del cubo di un binomio, si ottiene

$$(\cos\vartheta+i\mathrm{sen}\vartheta)^3=\cos^3\vartheta-3\cos\vartheta\mathrm{sen}^2\vartheta+i(3\cos^2\vartheta\mathrm{sen}\vartheta-\mathrm{sen}^3\vartheta)$$

da cui

$$\cos 3\vartheta=\cos^3\vartheta-3\cos\vartheta\mathrm{sen}^2\vartheta,\qquad \mathrm{sen}3\vartheta=3\cos^2\vartheta\mathrm{sen}\vartheta-\mathrm{sen}^3\vartheta$$

Soluzione A.3 Notiamo che

$$\Big|1+i-\frac{i}{1-2i}\Big|=\Big|\frac{1+i-2i+2-i}{1-2i}\Big|=\frac{|3-2i|}{|1-2i|}=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}},$$

e analogamente

$$\Big|\frac{3-i}{(1+i)^2}-\frac{i}{1-i}\Big|=\Big|\frac{(3-i)(1-i)-i(1+i)^2}{(1+i)^2(1-i)}\Big|=\frac{|4-4i|}{|1+i|^2|1-i|}=\frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=2.$$

Soluzione A.4 Usando la formula

$$\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

e tenendo presente che $|1+i|^2 = 1+1 = 2$, si ottiene che

$$\frac{1}{1+i} \quad = \quad \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Se ne deduce che $|1/(1+i)| = \sqrt{2}/2$ e $\arg(1/(1+i)) = -\pi/4$, da cui

$$\frac{1}{1+i} = \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(\cos\Big(-\frac{\pi}{4}\Big) + i\text{sen}\Big(-\frac{\pi}{4}\Big)\Big) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

In definitiva, si ha che

$$\frac{1}{1+i} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) & \text{(forma cartesiana)} \\ \frac{1}{2} - i\frac{1}{2} & \text{(forma algebrica)} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\text{sen}\frac{-\pi}{4}\right) & \text{(forma polare)} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} & \text{(forma esponenziale).} \end{cases}$$

Per gli altri numeri abbiamo che

$$-1+i = (-1,1) = \sqrt{2}\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = \sqrt{2}\Big(\cos\frac{3\pi}{4} + i\text{sen}\frac{3\pi}{4}\Big) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}},$$

$$-1 - i\sqrt{3} = (-1, -\sqrt{3}) = 2\Big(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = 2\Big(\cos\frac{4\pi}{3} + i\text{sen}\frac{4\pi}{3}\Big) = 2e^{i\frac{4\pi}{3}},$$

$$\begin{aligned}\Big(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\Big)^2 &= \Big(\frac{2(1/2 + i\sqrt{3}/2)}{\sqrt{2}(1/\sqrt{2} - i/\sqrt{2})}\Big)^2 = \Big(\frac{2(\cos\frac{\pi}{3} + i\text{sen}\frac{\pi}{3})}{\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\text{sen}\frac{7\pi}{4})}\Big)^2 \\ &= \Big(\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}}\Big)^2 = \Big(\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{7\pi}{4}\right)}\Big)^2 \\ &= 2e^{-i\frac{17\pi}{6}} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = 2(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}) = -\sqrt{3} - i\end{aligned}$$

Soluzione A.5 Abbiamo che

$$\begin{aligned}\frac{(-1/2+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2} &= \frac{1/4 - 4 - 2i - 1 + 3i + 3 - i}{27 + 54i - 36 - 8i - 4 + 1 - 4i} = \frac{-7/4}{-12+42i} = \frac{-7}{12}\frac{1}{-4+14i} \\ &= \frac{(-7/12)(-4-14i)}{212} = \frac{14+49i}{1272}.\end{aligned}$$

mentre

$$\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7} = \frac{\sqrt{2}^9 e^{i\frac{9\pi}{4}}}{\sqrt{2}^7 e^{-i\frac{7\pi}{4}}} = 2e^{i4\pi} = 2.$$

Soluzione A.6 Dalla definizione di esponenziale immaginario, si ricava che

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\mathrm{sen}\pi = -1,$$

da cui segue l'identità.

Soluzione A.7 In questo esercizio utilizzeremo la formula

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2};$$

quindi, nel primo caso avremo

$$\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}$$

che ha senso per $z \neq 0$; quindi

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Per quanto riguarda il secondo caso, avremo $z - 1 = (a - 1) + ib$ e $z + 1 = (a + 1) + ib$, da cui

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{(z-1)\overline{(z+1)}}{|z+1|^2} = \frac{a^2 + b^2 - 1}{a^2 + b^2 + 2a + 1} + i\frac{2b}{a^2 + b^2 + 2a + 1}$$

che ha senso per $z \neq -1$; quindi

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{a^2 + b^2 - 1}{a^2 + b^2 + 2a + 1}, \quad \mathrm{Im}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{2b}{a^2 + b^2 + 2a + 1}.$$

Infine

$$\frac{1}{z^2} = \frac{\overline{z}^2}{|z|^4} = \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2} - i\frac{2ab}{(a^2 + b^2)^2},$$

e quindi

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z^2}\right) = \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2}, \quad \mathrm{Im}\left(\frac{1}{z^2}\right) = -\frac{2ab}{(a^2 + b^2)^2}.$$

Soluzione A.8 Ci sono due modi per risolvere l'esercizio; il primo, più rapido, sta nel notare che cercare i punti che soddisfano $|z - 3 + 4i| = 5$ significa cercare i numeri complessi z che distano 5 dal punto $3 - 4i$, quindi la soluzione è la circonferenza di raggio 5 centrata in $3 - 4i$.

Altrimenti, si tratta di scrivere $z = a + ib$ e tradurre, elevando al quadrato, l'equazione data nell'espressione

$$25 = |a + ib - 3 + 4i|^2 = |(a - 3) + i(b + 4)|^2 = (a - 3)^2 + (b + 4)^2,$$

da cui si riconosce la circonferenza nel piano di raggio 5 centrata nel punto $(3, -4)$.

Soluzione A.9 Le radici di un polinomio complesso di secondo grado si trovano nello stesso modo in cui si trovano quelle di un polinomio reale, cioè tramite la formula risolutiva. Quindi

$$p(z) = z^2 - 5z + 7 = 0$$

se e solo se

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{25-28}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{-3}}{2};$$

l'unica cosa da osservare è che la radice quadrata da calcolare in questo caso va fatta in campo complesso; tenendo presente che in campo complesso la radice quadrata ha due soluzioni, il $\pm$ può essere omesso (deriverà dal fatto che le due soluzioni complesse differiscono per un angolo di π, e quindi sono una l'opposta dell'altra. Avremo quindi che le soluzioni sono date da

$$z = \frac{5}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Si noti infine che le due soluzioni sono una coniugata dell'altra; questo dovevamo aspettarcelo in quanto il polinomio considerato era a coefficienti reali.

Soluzione A.10 Anche in questo caso applichiamo la formula risolutiva per i polinomi di secondo grado e troviamo che le soluzioni dell'equazione

$$z^2 + (1-i)z - 2 - 2i = 0$$

sono date da

$$z = \frac{-1 + i \pm \sqrt{(1-i)^2 + 4(2+2i)}}{2}.$$

Per calcolare la radice in questa espressione, conviene scrivere in forma esponenziale il numero

$$(1-i)^2 + 4(2+2i) = 8 + 6i;$$

Ma $|8 + 6i| = 10$, e quindi

$$8 + 6i = 10\left(\frac{4}{5} + i\frac{3}{5}\right);$$

indichiamo con ϕ l'angolo il cui coseno vale $4/5$ e il cui seno vale $3/5$ (non essendo un angolo noto, conviene individuarlo in questo modo), e quindi le soluzioni della nostra equazione saranno date da

$$z = \frac{i-1}{2} \pm \frac{\sqrt{10}}{2}e^{i\frac{\phi}{2}} = \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{10}}{2}\cos\frac{\phi}{2}\right) + i\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{10}}{2}\operatorname{sen}\frac{\phi}{2}\right).$$

Questa espressione può essere semplificata utilizzando le formule di bisezione per seno e coseno, tenendo presente che l'angolo ϕ che stiamo considerando verifica $0 < \phi < \pi/2$ dato che sia seno che coseno sono positivi;

$$\cos\frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\phi}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \operatorname{sen}\frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\phi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

In definitiva le soluzioni sono date da

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = -2.$$

Soluzione A.11 Notando che $|z|^2 = z\overline{z}$, l'equazione data può essere riscritta come

$$\overline{z}(z^2 - 4i);$$

avremo quindi che $z_0 = 0$ è una soluzione. Altre soluzioni vengono dall'equazione

$$z^2 - 4i = 0,$$

cioè dalle due radici quadrate del numero $4i = 4e^{i\pi/2}$; tali soluzioni saranno date da

$$z_{1,2} = \pm 2e^{i\frac{\pi}{4}} = \pm\sqrt{2}(1+i).$$

Soluzione A.12 Dobbiamo risolvere l'equazione

$$(z+i)^2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}};$$

troviamo quindi le radici quadrate del membro di destra e poi sottraiamo i, cioè le soluzioni sono date da

$$z_{1,2} = -i + \sqrt{2}e^{i\vartheta_{1,2}}$$

con

$$\vartheta_1 = \frac{\pi}{6}, \qquad \vartheta_2 = \frac{7\pi}{6}.$$

Soluzione A.13 Passando alla forma esopnenziale $z = \varrho e^{i\vartheta}$, l'equazione diventa

$$\varrho^3 e^{i3\vartheta} = \varrho^2,$$

da cui $\varrho^3 = \varrho^2$, cioè $\varrho = 0$ o $\varrho = 1$, mentre $3\vartheta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, cioé $\vartheta = \frac{2k\pi}{3}$ (valori di ϑ compresi in $[0, 2\pi)$ sono dati da 0, $2\pi/3$, $4\pi/3$).

Soluzione A.14 Scriviamo $z = a + ib$ e si ottiene l'equazione

$$a^2 - b^2 + 2iab + i(a - ib) = 1$$

cioè

$$a^2 - b^2 + b + i(2ab + a) = 1$$

che si riduce al sistema

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + b = 1 \\ a(2b+1) = 0. \end{cases}$$

La seconda equazione ha soluzione per $a = 0$ o per $b = -1/2$; nel primo caso la prima equazione diventa

$$b^2 - b + 1 = 0$$

che non ha soluzioni reali, mentre nel secondo caso si ottiene

$$a^2 = \frac{7}{4},$$

cioè $a = \pm\sqrt{7}/2$; l'equazione data ha quindi le due soluzioni

$$z = \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{i}{2}, \qquad z = -\frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{i}{2}.$$

Soluzione A.15 Ponendo $z = a + ib$, si trova

$$a^2 - b^2 + 2iab + i\sqrt{5(a^2+b^2)} + 6 = 0$$

che si riduce al sistema

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + 6 = 0 \\ 2ab + \sqrt{5a^2+5b^2} = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ottiene che

$$-2ab = \sqrt{5}\sqrt{a^2+b^2}$$

da cui $ab \leq 0$, cioè a e b hanno segni discordi. Elevando al quadrato si ottiene

$$4a^2b^2 = 5a^2 + 5b^2$$

cioè

$$b^2(4a^2-5) = 5a^2.$$

Siccome non si può essere $a^2 = 5/4$, dividendo si ricava

$$b^2 = \frac{5a^2}{4a^2-5}.$$

Sostituendo questo nella prima equazione si ottiene

$$a^2 - \frac{5a^2}{4a^2-5} + 6 = 0,$$

o equivalentemente

$$\frac{4a^4 + 14a^2 - 30}{4a^2-5} = 0,$$

cioè $a^2 = 6$, da cui $a = \pm\sqrt{6}$. In definitiva le soluzioni dell'equazione data sono

$$z_1 = \sqrt{6} - i\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{19}}, \qquad z_2 = -\sqrt{6} + i\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{19}}.$$

Soluzione A.16 Ponendo $z = a + ib$ si ottiene l'equazione

$$a^2 + b^2 + 5a + 5ib + 10i = 0,$$

cioè $b = -2$ e $a^2 + 5a + 4 = 0$, che significa $a = -1$ o $a = -4$. Quindi l'equazione data ha due soluzioni

$$z = -1 - 2i, \qquad z = -4 - 2i.$$

Soluzione A.17 Si tratta di risolvere l'equazione

$$z^6 = w;$$

per fare questo, scriviamo il numero w in coordinate polari; partiamo quindi dal numero complesso

$$w_0 = \sqrt{3} + i.$$

Calcolando modulo e argomento si trova

$$w_0 = 2(\cos \pi/6 + i\text{sen}\pi/6).$$

Dalle formule di De Moivre otterremo quindi che

$$w = 2^9 e^{i3\pi/2}.$$

Le radici saranno quindi date dalla formula

$$z_k = 2\sqrt{2}(\cos \theta_k + i\text{sen}\theta_k),$$

con

$$\theta_k = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Soluzione A.18 Scriviamo il numero dato in forma esponenziale;

$$2 - i\sqrt{12} = 2 - 2i\sqrt{3} = 4\Big(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\Big) = 4e^{i\frac{5\pi}{3}},$$

e quindi le radici quarte sono date da

$$z_k = \sqrt{2}e^{i\vartheta_k}, \qquad \vartheta_k = \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Soluzione A.19 Facendo la sostituzione $w = z - 2$, si tratta di risolvere l'equazione

$$w^3 = -i;$$

dobbiamo quindi trovare le tre radici cubiche del numero complesso $-i$, che ha mudulo 1 e argomento pari a $3\pi/2$. Quindi le soluzioni saranno

$$w_k = (\cos \theta_k + i\text{sen}\theta_k), \quad \theta_k = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3}, k = 0, 1, 2.$$

In definitiva, la soluzione dell'esercizio sarà data dai tre numeri complessi

$$z_k = (2 + \cos \theta_k + i\text{sen}\theta_k), \quad \theta_k = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3}, k = 0, 1, 2.$$

Soluzione A.20 Anche qui abbiamo due modi; il primo è moltiplicare numeratore e denominatore per i coniugati dei membri al denominatore, cioè per $2 + i$ e $3 - 2i$, in modo da ottenere

$$w = \frac{(1 + 2i)(2 + i)(2 - 3i)(3 - 2i)}{(2 - i)(2 + i)(3 + 2i)(3 - 2i)} \frac{5i \cdot 13i}{5 \cdot 13} = -1,$$

il secondo modo è notare che $1 + 2i = i(2 - i)$ e $2 - 3i = -i(3 + 2i)$, da cui ancora $w = -1$. Per calolare le radici ottave si scrive $w = -1 = e^{i\pi}$, da cui le soluzioni

$$z_k = e^{i\vartheta_k}, \qquad \vartheta_k = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{k}, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,$$

che definiscono i vertici di un ottagono regolare inscritto nella circonferenza di raggio 1 e con primo vertice nel punto

$$e^{i\frac{\pi}{8}} = \frac{\sqrt{2 - 2\sqrt{2} - i\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2 + 2\sqrt{2} + i\sqrt{2}}}{2}.$$

Soluzione A.21 Le radici n–esime dell'unità sono date dalla forma

$$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1;$$

scrivendo $\varepsilon_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, si nota che $z_k = \varepsilon_n^k$, e quindi

$$\begin{aligned} z_0 + z_1 + \ldots + z_{n-1} =& 1 + \varepsilon_n + \ldots + \varepsilon_n^{n-1} \frac{(1 + \varepsilon_n + \ldots + \varepsilon_n^{n-1})(1 - \varepsilon_n)}{(1 - \varepsilon_n)} \\ =& \frac{1 - \varepsilon_n^n}{1 - \varepsilon_n} = 0 \end{aligned}$$

in quanto $\varepsilon_n^n = 1$.

Soluzione A.22 L'esercizio segue semplicemente notando che le radici n–esima di $w = re^{i\varphi}$ sono date da

$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi}{n}} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = z_0 \varepsilon_n^k$$

con $z_0 = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi}{n}}$ che definisce una radice n–esima di w e ε_n radice n–esima dell'unità.

Soluzione A.23 Non trattandosi di un polinomio, scriviamo il numero complesso $z = a+ib$, in modo da trovare il sistema

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - 6a + 1 = 0 \\ -6b = 0, \end{cases}$$

che ha come soluzioni i numeri complessi (in realtà reali) $z_1 = 3 + 2\sqrt{2}$, $z_2 = 3 - 2\sqrt{2}$.

Soluzione A.24 Trattandosi di un polinomio (biquadratico), usando la formula risolutiva, si ha, ponendo $w = z^2$,

$$w_1 = -3 + \sqrt{14}, \quad w_2 = -3 - \sqrt{14}.$$

Le quattro soluzioni dell'equazione data saranno quindi le radici quadrate delle due soluzioni date, cioè

$$z_1 = \sqrt{\sqrt{14} - 3}, \quad z_2 = -\sqrt{\sqrt{14} - 3},$$
$$z_3 = i\sqrt{\sqrt{14} + 3}, \quad z_4 = -i\sqrt{\sqrt{14} + 3}.$$

Soluzione A.25 Le soluzioni saranno date dalle quattro radici quarte del numero complesso $w = -4$, e cioè

$$z_k = \sqrt{2}(\cos\theta_k + i\mathrm{sen}\theta_k), \quad \theta_k = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k = 0, 1, 2, 3.$$

Soluzione A.26 Notiamo che $p(i) = 0$, quindi, dato che il polinomio ha coefficienti reali, si dovrà avere che anche $-i$ è una radice del polinomio. Avremo quindi che

$$p(z) = (z^2 + 1)q(z),$$

dove $q(z) = z^2 - 4z + 3 = (z-3)(z-1)$ e quindi le radici del polinomio p sono date da i, $-i$, 1 e 3.

Soluzione A.27 Possiamo riscrivere l'equazione nella forma

$$(z+1)^3 = 8i.$$

Si tratta quindi, posto $w = z + 1$, di trovare le tre radici cubiche del numero complesso $8i$, di modulo 8 e argomento $\pi/2$; avremo quindi che le sue tre radici cubiche sono date da

$$w_k = 2(\cos\theta_k + i\mathrm{sen}\theta_k), \quad \theta_k = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2,$$

da cui

$$z_k = (-1 + 2\cos\theta_k + 2i\mathrm{sen}\theta_k), \quad \theta_k = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2.$$

Soluzione A.28 L'equazione può essere riscritta come

$$\left(z + \frac{i}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{4},$$

da cui

$$z_k = -\frac{i}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta_k + i\mathrm{sen}\theta_k), \quad \theta_k = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k = 0, 1.$$

Soluzione A.29 Notiamo anzitutto che $z = 0$ è soluzione dell'equazione data. Cerchiamo quindi le soluzioni non nulle; moltiplicando l'equazione per z otteniamo

$$z^2|z|^2 - (1 + 4\sqrt{3})i|z|^2 = 0,$$

o equivalentemente, dato che $z \neq 0$,

$$z^2 - (1 + 4\sqrt{3})i = 0.$$

Quindi avremo due soluzioni non nulle, che altro non sono che le due radici del numero complesso $(1 + 4\sqrt{3})i$, e cioè

$$z_1 = \sqrt{1 + 4\sqrt{3}}(\cos\pi/4 + i\mathrm{sen}\pi/4) = \sqrt{\frac{1 + 4\sqrt{3}}{2}}(1 + i),$$

$$z_2 = \sqrt{1 + 4\sqrt{3}}(\cos 5\pi/4 + i\mathrm{sen}5\pi/4) = \sqrt{\frac{1 + 4\sqrt{3}}{2}}(-1 - i).$$

Soluzione A.30 Scrivendo $w = a + ib$ e $z = x + iy$, l'equazione è equivalente all'equazione nelle due incognite reali $x, y \in \mathbb{R}$ (essendo una equazione in due incognite in generale non ci possiamo aspettare una sola soluzione)

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = (x + a)^2 + (y + b)^2$$

che ha per soluzione il luogo di punti descritto dall'equazione

$$by = -ax$$

che descrive una retta nel piano Oxy. Si poteva arrivare a tale risultato interpretando geometricamente l'equazione data; la quantità $|z - w|$ indica la distanza di z da w, mentre $|z + w|$ rappresenta la distanza di z da $-w$. Quindi le soluzioni dell'equazione saranno esattamente i punti equidistanti da w e $-w$, cioè l'asse del segmento che congiunge w con $-w$. Infatti, indicando sempre con $w = a + ib$, la retta del piano cartesiano passante per w e $-w$ è descritta dall'equazione

$$ay - bx = 0.$$

Tale retta passa per l'origine e ha come retta ortogonale passante per l'origine la retta di equazione

$$by + ax = 0;$$

questa retta descrive esattemente il luogo dei punti equidistanti da w e $-w$, e quindi è l'insieme delle soluzioni dell'equazione data.