Esercizi III settimana

20 ottobre 2011

1. Si studino le proprietà di continuità, derivabilità e differenziabilità della funzione;
$$f(x,y) = \sqrt{xy + \ln y}.$$
Si scrivano quindi le equazioni piano tangente e della retta normale al grafico della funzione nel punto $(2,1)$.

2. Date le funzioni $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, si definisca $G(x,y) = (x,y,g(x,y))$; si determini il gradiente della funzione $h = f \circ G$ utilizzando la formula per la derivata della funzione composta e si deduca, nel caso in cui $\partial f/\partial z \neq 0$, la seguente formula per la funzione implicita, cioè sotto la condizione che $f(x,y,g(x,y)) = 0$;
$$\nabla g(x,y) = -\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,g(x,y))}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,g(x,y)), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,g(x,y)),\right).$$

3. Si considerino le coordinate sferiche nello spazio determinate dalla funzione
$$\begin{aligned} G :&[0,+\infty) \times [0,2\pi] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}^3, \\ G(\varrho,\vartheta,\varphi) =&(\varrho\cos\vartheta \operatorname{sen}\varphi, \varrho \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\varphi, \varrho\cos\varphi), \end{aligned}$$
cioè
$$\begin{cases} x = \varrho\cos\vartheta \operatorname{sen}\varphi \\ y = \varrho \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\varphi \\ z = \varrho\cos\varphi. \end{cases}$$
Si scriva la matrice Jacobiana di G e si deduca da essa la formula per le derivate espresse in coordinate sferiche.

4. Si determini il Laplaciano della funzione
$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
sia utilizzando direttamente la definizione di Δf sia sfruttando il fatto che f è radiale (scrivendo quindi il Laplaciano in coordinate sferiche).

Soluzioni

1. Il dominio della funzione è determinato dalle condizioni
$$\begin{cases} y > 0 \\ x \geq -\frac{\ln y}{y}; \end{cases}$$

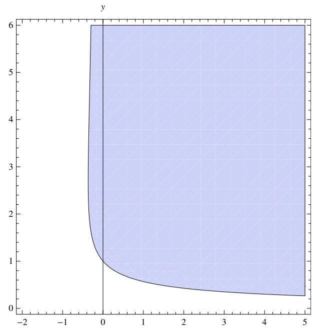

Figura 1: Dominio della figura data.

Tale dominio è raffigurato in Figura 1. La funzione è di classe C^1 per $x > -\frac{\ln y}{y}$; in tali punti la funzione è quindi differenziabile. Vediamo se possiamo ricavare la differenziabilità per i punti di $x = -\frac{\ln y}{y}$; sia quindi (x_0, y_0) tale che $x_0 y_0 + \ln y_0 = 0$ e calcoliamo

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{x_0 y_0 + h y_0 + \ln y_0}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{h y_0}}{h}$$

e tale limite non esiste. Quindi non possiamo scrivere il gradiente in (x_0, y_0), cioè f non sarà differenziabile in tali punti.

Nei punti $xy + \ln y > 0$ abbiamo che

$$\nabla f(xy) = \frac{1}{2\sqrt{xy + \ln y}} \left(y, x + \frac{1}{y} \right),$$

da cui $\nabla f(2, 1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1, 3)$; l'equazione del piano tangente è quindi dato da $z = f(2, 1) + \nabla f(2, 1) \cdot (x - 2, y - 1)$, cioè

$$x + y - 2z\sqrt{2} = 1.$$

La retta normale è invece parametrizzata da $r(t) = (2, 1, f(2, 1)) + t(-\nabla f(2, 1), 1)$, cioè la retta

$$r(t) = \left(2 - \frac{t}{2\sqrt{2}}, 1 - \frac{3t}{2\sqrt{2}}, \sqrt{2} + t \right),$$

che in forma cartesiana diventa

$$\begin{cases} 2x\sqrt{2} + z = 5\sqrt{2} \\ 2y\sqrt{2} + 3z = 5\sqrt{2}. \end{cases}$$

2. Iniziamo col notare che

$$DG(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix},$$

quindi

$$
\begin{aligned}
\nabla h(x,y) &= \nabla f(x,y,g(x,y)) \cdot DG(x,y) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,g(x,y)), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,g(x,y)), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,g(x,y))\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,g(x,y)) + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,g(x,y))\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,g(x,y)) + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,g(x,y))\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right).
\end{aligned}
$$

In particolare, se ne deduce che se g è la funzione implicita, allora

$$h(x,y) = f(x,y,g(x,y)) = 0,$$

da cui

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,g(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,g(x,y))} \\
\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,g(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,g(x,y))}.
\end{aligned}
$$

3. La matrice Jacobiana di G è data da

$$DG(\varrho,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta \operatorname{sen}\varphi & -\varrho \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\varphi & \varrho\cos\vartheta\cos\varphi \\ \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\varphi & \varrho\cos\vartheta \operatorname{sen}\varphi & \varrho \operatorname{sen}\vartheta \cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -\varrho \operatorname{sen}\varphi \end{pmatrix}.$$

Quindi, se g è la rappresentazione di una funzione in coordinate sferiche e h la rappresentazione della stessa funzione in coordinate cartesiane, denotando con $F = G^{-1}$ la mappa inversa delle coordinate sferiche, cioè la trasformazione dalle coordinate cartesiane a quelle sferiche, le funzioni h e g sono legate da $h(x,y,z) = g \circ F(x,y,z)$. Otterremo quindi che

$$\nabla h(x,y,z) = \nabla g(F(x,y,z)) \cdot DF(x,y,z).$$

In definitiva si trova che valgono le seguenti formule per le derivate;

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial x} = \cos\vartheta \operatorname{sen}\varphi \dfrac{\partial}{\partial \varrho} - \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\operatorname{sen}\vartheta}{\operatorname{sen}\varphi}\dfrac{\partial}{\partial\vartheta} + \dfrac{1}{\varrho}\cos\vartheta\cos\varphi\dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial y} = \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\varphi \dfrac{\partial}{\partial \varrho} + \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\cos\vartheta}{\operatorname{sen}\varphi}\dfrac{\partial}{\partial\vartheta} + \dfrac{1}{\varrho}\operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi\dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial z} = \cos\varphi\dfrac{\partial}{\partial\varrho} - \dfrac{1}{\varrho}\operatorname{sen}\varphi\dfrac{\partial}{\partial\varphi}.
\end{cases}
$$

4. Iniziamo col calcolare

$$\nabla f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x,y,z).$$

Quindi,

$$
\begin{aligned}
\Delta f(x,y,z) =& \operatorname{div}\nabla f(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
=& \frac{3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\
=& \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.
\end{aligned}
$$

Possiamo anche passare alle coordinate sferiche; utilizzando l'esercizio precedente, si vede che il Laplaciano per una funzione espressa in coordinate sferiche è dato da

$$
\begin{aligned}
\Delta g(\varrho,\vartheta,\varphi) =& \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \varrho^2}(\varrho,\vartheta,\varphi) + \frac{2}{\varrho}\frac{\partial g}{\partial \varrho}(\varrho,\vartheta,\varphi) + \frac{\cos\vartheta}{\varrho^2\ \mathrm{sen}\vartheta}\frac{\partial g}{\partial \vartheta}(\varrho,\vartheta,\varphi) + \\
&+ \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \vartheta^2}(\varrho,\vartheta,\varphi) + \frac{1}{\varrho^2\ \mathrm{sen}^2\vartheta}\frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2}(\varrho,\vartheta,\varphi).
\end{aligned}
$$

Se la funzione è radiale, cioè se $g(\varrho,\vartheta,\varphi) = h(\varrho)$, la precedente espressione si riduce a

$$
\Delta h(\varrho) = \frac{1}{\varrho^2}h''(\varrho) + \frac{2}{\varrho}h'(\varrho).
$$

Nel nostro caso $h(\varrho) = \varrho$ e quindi $h'(\varrho) = 1$ e $h''(\varrho) = 0$, da cui ritroviamo ancora che

$$
\Delta h(\varrho) = \frac{2}{\varrho}.
$$