Esercizi IV settimana

27 ottobre 2011

1. Dire se la funzione $r : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$
$$r(t, s) = (\sin^2 t \cos s, \sin^2 t \sin s, \cos^2 t)$$
definisce o meno una superficie parametrizzata regolare.

2. Studiare le proprietà delle superfici ottenute ruotando la curva
$$x = z(z-1), \qquad z \in [0, 1]$$
sia attorno all'asse z che attorno all'asse x.

3. Dire se si può applicare il Teorema della funzione implicita alla funzione
$$f(x, y, z) = (xy - z, x^2y^3 - z)$$
nel punto $(1, 1, 1)$. Determinare eventualmente la parametrizzazione del livello di f cui il punto $(1, 1, 1)$ appartiene.

4. Determinare massa, baricentro e momenti di inerzia della curva
$$y = \frac{1}{x}, \qquad x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$$
con densità di massa descritta dalla funzione $f(x, y) = x$.

Soluzioni

1. La parametrizzazione è sicuramente di classe C^1; per le derivate abbiamo che
$$r_t(t, s) = 2 \cos t \sin t (\cos s, \sin s, -1),$$
mentre
$$r_s(t, s) = (-\sin^2 t \sin s, \sin^2 t \cos s, 0).$$
Quindi
$$r_t(t, s) \times r_s(t, s) = 2 \sin^3 t \cos t (\cos s, \sin s, 1),$$
da cui
$$\|r_t(t, s) \times r_s(t, s)\| = 2\sqrt{2} \sin^3 t |\cos t|;$$
quindi la parametrizzazione non è regolare per $t = 0, \pi/2, \pi$.

2. Si tratta di ruotare la curva che nel piano xz è parametrizzata da

$$r(t) = (t(t-1), t), \qquad t \in [0,1].$$

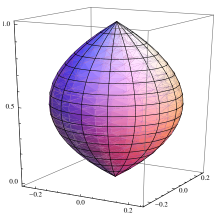
Abbiamo allora che $r'(t) = (2t-1, 1)$, cioè $\|r'(t)\| = \sqrt{4t^2 - 4t + 2}$, quindi la curva è regolare. Siccome per $t = 0, 1$ $r_1(t) = 0$, allora la curva ruotata attorno all'asse z non sarà regolare in tali punti. La parametrizzazione della curva ruotata attorno a z sarà quindi data da

$$r(t,s) = (t(t-1)\cos s, t(t-1)\sin s, t)$$

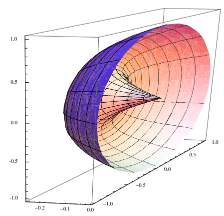
e tale superficie è rappresentata in Figura 1(a). Per la rotazione attorno ad x, avremo che $r_2(t) = 0$ per $t = 0$ e quindi in tale punto la superficie non sarà regolare; per la parametrizzazione si avrà che

$$r(t,s) = (t(t-1), t\cos s, t\sin s)$$

e tale superficie è rappresentata in Figura 1(b).



(a) Rotazione attorno ad asse z



(b) Rotazione attorno ad asse x

Figura 1: Rotazioni della curva r attorno ai due assi, z e x.

3. Calcoliamo la matrice Jacobiana di f,

$$Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} y & x & -1 \\ 2xy^3 & 3x^2y^2 & -1 \end{pmatrix}.$$

In $(1,1,1)$ tale matrice vale

$$Df(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

e quindi il rango è pari a 2 in tale punto, quindi si può applicare il teorema della funzione implicita per dire che intorno a $(1,1,1)$ l'insieme $\{f(x,y,z) = (0,0)\}$ è localmente una curva. La parametrizzazione locale si può ottenere determinando

$$\begin{cases} xy = z \\ x^2y^3 = z. \end{cases}$$

Parametrizzando ponendo $y = t$ si trova la curva

$$r(t) = \left(\frac{1}{t^2}, t, \frac{1}{t}\right).$$

Questa parametrizzazione è definita per t intorno ad 1 mentre diventa degenere per $t \to 0$. Ci si può chiedere se esiste una parametrizzazione globale; in realtà si può vedere che l'insieme $\{f(x, y, z) = (0, 0)\}$ non è globalmente una curva, ma ha dei punti singolari.

4. La curva è parametrizzata da

$$r(t) = \left(t, \frac{1}{t}\right), \qquad t \in [1/2, 2].$$

Abbiamo che $r'(t) = (1, -1/t^2)$ e quindi $\|r'(t)\| = \sqrt{t^4+1}/t$, cioè la curva è regolare. La sua massa sarà quindi data da

$$\begin{aligned} m &= \int_r f = \int_{1/2}^{2} f(r(t))\|r'(t)\|dt \\ &= \int_{1/2}^{2} \frac{\sqrt{t^4+1}}{t} dt. \end{aligned}$$

Ponendo $s = t^2$, si arriva all'integrale

$$\begin{aligned} m =& \frac{1}{2}\int_{1/4}^{4} \frac{\sqrt{s^2+1}}{s} ds = \frac{1}{2}\int_{\ln(\frac{1+\sqrt{17}}{4})}^{\ln(4+\sqrt{17})} \frac{\cosh^2\alpha}{\sinh\alpha} d\alpha = \frac{1}{4}\int_{\ln(\frac{1+\sqrt{17}}{4})}^{\ln(4+\sqrt{17})} \frac{e^{4\alpha}+2e^{2\alpha}+1}{e^2\alpha(e^{2\alpha}-1)} e^{\alpha} d\alpha \\ =& \frac{1}{4}\int_{\frac{1+\sqrt{17}}{4}}^{4+\sqrt{17}} \frac{\tau^4+2\tau^2+1}{\tau^2(\tau^2-1)} d\tau \end{aligned}$$

dove abbiamo effettuato le due sostituzioni $s = \sinh\alpha$ e poi $\tau = e^{\alpha}$. A questo punto si nota che

$$\frac{\tau^4+2\tau^2+1}{\tau^2(\tau^2-1)} = 1 + \frac{3\tau^2+1}{\tau^2(\tau^2-1)}$$

ed inoltre che

$$\frac{3\tau^2+1}{\tau^2(\tau^2-1)} = -\frac{1}{\tau^2} + \frac{2}{\tau-1} - \frac{2}{\tau+1},$$

da cui si deduce che

$$m = \frac{3\sqrt{17}}{8} - \frac{1}{2}\ln(13 - 3\sqrt{17}) + \ln 2.$$

La determinazione del baricentro in questo caso non è agevole in quanto si tratta di calcolare i seguenti integrali;

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\int_{1/2}^{2} \sqrt{t^4+1} dt,$$

e

$$\overline{y} = \frac{1}{m}\int_{1/2}^{2} \frac{\sqrt{t^4+1}}{t^2} dt,$$

e questi due integrali non sono facilmente calcolabili. I momenti di inerzia invece si possono calcolare in modo analogo a quanto fatto per il calcolo della massa in quanto

$$I_x = \int_{1/2}^{2} \frac{\sqrt{t^4+1}}{t^3} dt = \frac{15}{8} + \frac{3\sqrt{17}}{4},$$

mentre

$$I_y = \int_{1/2}^{2} t\sqrt{t^4+1} dt = \frac{15}{16} + \frac{75\sqrt{17}}{64}.$$

Infine avremo che

$$I_z = I_x + I_y = \frac{45}{16} + \frac{123\sqrt{17}}{64}.$$