Esercizi VII settimana

17 novembre 2011

1. Si calcoli l'area della superficie parametrizzata da

$$r(t,s) = (t\cos s, t\sin s, t^2), \qquad (t,s) \in [0,1] \times [0,\pi].$$

2. Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int_\Sigma z d\Sigma$$

con $\Sigma = \{z = xy, 0 \leq x\sqrt{3}, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

3. Determinare il flusso del campo $F(x,y,z) = (0, ye^{-x}, 0)$ passante per la superficie

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq y\}.$$

4. Si classifichino le seguenti forme quadratiche:

$$\begin{aligned} q(a,b) =& -a^2 + 2b^2 - 2ab, \\ q(a,b,c) =& 2a^2 - b^2 + c^2 - 4ab + 6bc, \\ q(a,b,c,d) =& 7a^2 + 3b^2 + 5d^2 + 4ab + 2bc + 2bd + 8cd. \end{aligned}$$

Soluzioni

1. La superficie è un mezzo paraboloide (vedere Figura 1). Per il calcolo dell'area,

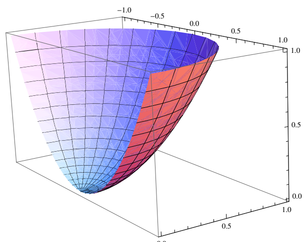

Figura 1:

notiamo che

$$r_t(t,s) \times r_s(t,s) = (\cos s, \sin s, 2t) \times (-t\sin s, t\cos s, 0) = (-2t^2\cos s, -2t^2\sin s, t),$$

da cui
$$\|r_t(t,s) \times r_s(t,s)\| = t\sqrt{1+4t^2}..$$
L'area della superficie è quindi data da
$$\text{Area}(\Sigma) = |\Sigma| = \int_0^1 dt \int_0^\pi t\sqrt{1+4t^2}ds = \frac{\pi}{12}(5\sqrt{5}-1).$$

2. La superficie data è il grafico della funzione $g(x,y) = xy$ sul dominio
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\sqrt{3}\}.$$
Tale superficie è rappresentata in Figura 2. Quindi l'integrale di superficie è dato da

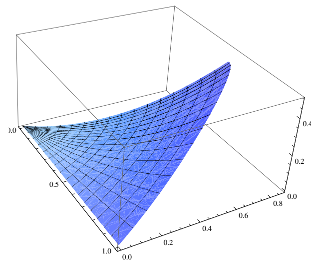

Figura 2:

$$\int_\Sigma z d\Sigma = \int_D g(x,y)\sqrt{1+\|\nabla g(x,y)\|^2}dxdy = \int_D xy\sqrt{1+4x^2+4y^2}$$
$$= \int_0^{\pi/3} d\vartheta \int_0^1 \varrho^3 \cos\vartheta \sin\vartheta \sqrt{1+4\varrho^2}d\varrho = \frac{25\sqrt{5}+1}{320}.$$

3. La superficie è rappresentata in Figura 3; si nota che Σ non è chiusa e quindi non possiamo eventualmente applicare il Teorema della divergenza, a meno di non aggiungere a Σ altre superfici per ottenere il bordo di un insieme. Applichiamo quindi la definizione di flusso; sfruttiamo la seguente parametrizzazione di Σ
$$r(t,s) = (\cos t, \sin t, s), \quad (t,s) \in D = \{(t,s) \in R^2 : t \in [0,\pi], 0 \leq s \leq \sin t\}.$$
Otteniamo quindi che
$$r_t(t,s) \times r_s(t,s) = (-\sin t, \cos t, 0) \times (0,0,1) = (\cos t, \sin t, 0),$$
da cui
$$\Phi(F,\Sigma) = \int_\Sigma F \cdot \hat{n}_\Sigma d\Sigma = \int_D F(r(t,s)) \cdot r_t(t,s) \times r_s(t,s)dtds$$
$$= \int_0^\pi dt \int_0^{\sin t} (0, \sin t e^{-\cos t}, 0) \cdot (\cos t, \sin t, 0)ds$$
$$= \int_0^\pi dt \int_0^{\sin t} \sin^2 t e^{-\cos t}ds = \int_0^\pi \sin^3 t e^{-\cos t}dt = \int_{-1}^1 (1-x^2)e^{-x}dx = 4e^{-1}.$$

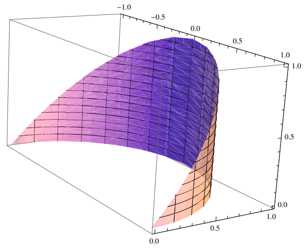

Figura 3:

4. Nel primo caso, la matrice associata alla forma quadratica q è data da

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tale matrice ha determinante pari a $-3 < 0$, quindi è indefinita in quanto i due autovalori sono non nulli e di segno discorde. Nel secondo caso, la matrice associata alla forma quadratica è data da

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

in questo caso utilizziamo il Teorema di Sylvestre; abbiamo che $A_1 = 2 > 0$, mentre, posto

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$$

allora $\det A_2 = -7 < 0$. Basta questo per capire che la matrice A è indefinita e quindi anche la forma quadratica è indefinita. Si noti che infine $A_3 = A$ e $\det A = -24$; siccome $\mathrm{tr} A = 2$ se ne deduce che un autovalore è negativo e che gli altri due sono positivi, quindi ancora che la matrice è indefinita. Nell'ultimo caso, abbiamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix};$$

qui abbiamo i minori principali dati da $A_1 = 7 > 0$,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

e $\det A_2 = 17 > 0$,

$$A_3 = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi $\det A_3 = -7$. Basta questo per concludere che A è indefinita. Se si volesse tuttavia calcolare il determinante anche della matrice A, potremmo effettuare lo sviluppo ad esempio rispetto alla prima colonna per ottenere che

$$\det A = 7\det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = -251.$$

Notando poi che $\mathrm{tr}A = 15$, se ne deduce che almeno un autovalore deve essere negativo ma non tutti, da cui ancora la indefinitezza di A.