Esercizi I settimana
7 ottobre 2010

1. Si consideri il folium di Cartesio $r : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}^2$,
$$r(t) = (t(t-1), t(t-1)(2t-1));$$
dopo averne discusso le principali proprietà, tra cui la regolarità, si scrivano le equazioni delle rette tangente e normale al sostegno della curva in $r(1/4)$.

2. Dato l'asteroide $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$,
$$r(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t),$$
si calcoli il parametro d'arco $s(t)$ per $t \in [0, \pi/2]$ e per $t \in [\pi/2, \pi]$. Si riparametrizzi quindi la curva usando tale parametro, cioé si definisca $\varphi(s) = \varphi(s(t)) := r(t)$ e si verifichi che $\|\varphi'(s)\| = 1$. Si dimostri inoltre che la curva é regolare a tratti ma non regolare. Si calcoli infine la curvatura dell'asteroide usando sia la parametrizzazione φ, che la parametrizzazione r.

3. Si studino le principali proprietà della spirale definita in coordinate polari da $\varrho : [0, 2\pi] \to [0, +\infty)$,
$$\varrho(\vartheta) = \vartheta;$$
si determini quindi la sua lunghezza e la sua curvatura.

4. Si calcoli la curvatura della spirale cilindrica $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$
$$r(t) = (\cos t, \sin t, t).$$

Soluzioni

1. La funzione data è una curva in quanto le funzioni $t^2 - t$ e $2t^3 - 3t^2 + t$ che definiscono le componenti della funzione r sono continue; sono anche funzioni derivabili con derivata continua, da cui si deduce che r è di classe C^1. Per studiarne la regolarità come curva scriviamo
$$r'(t) = (2t - 1, 6t^2 - 6t + 1);$$
la prima componente di tale derivata si annulla unicamente per $t = 1/2$, ma in corrispondenza di tale valore di t la seconda componente vale $-1/2$, quindi la condizione $r'(t) \neq 0$ è sempre verificata, cioé la curva è regolare. Per dimostrare che la curva è semplice, possiamo sia disegnare il sostegno della curva e rendersi conto che la curva non è semplice. La dimostrazione analitica di questo fatto passa però per lo studio di
$$r(t_1) = r(t_2), \qquad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Se tale identità è verificata se e solo se $t_1 = t_2$, allora la curva sarà semplice, altrimenti se esistono due diversi tempi $t_1 \neq t_2$ che la verificano, allora avremo violato l'iniettività della funzione r. Si tratta quindi di studiare il sistema di equazioni

$$\begin{cases} t_1^2 - t_1 = t_2^2 - t_2 \\ 2t_1^3 - 3t_1^2 + t_1 = 2t_2^3 - 3t_2^2 + t_2. \end{cases}$$

La prima equazione è equivalente a $(t_1 - t_2)(t_1 + t_2 - 1) = 0$; una soluzione sará quindi ovviamente $t_1 = t_2$, che possiamo scartare. Consideriamo quindi il caso $t_1 + t_2 = 1$; la seconda equazione è equivalente a $(t_1 - t_2)(2(t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2) - 3(t_1 + t_2) + 1) = 0$ che ha ancora per soluzione $t_1 = t_2$ che scartiamo. Ponendo $t_1 + t_2 = 1$ si ricava quindi l'equazione

$$t_2^2 - t_2 = 0$$

che ha come soluzione $t_2 = 0$ e $t_2 = 1$, con corrispondenti valori di $t_1 = 1$ e $t_1 = 0$. Questo vuol dire che $r(0) = r(1)$, cioè la curva non è semplice.

La curva non é chiusa; la definizione di curva chiusa è stata data per curve definite su intervalli chiusi e limitati, mentre nel nostro caso $I = \mathbb{R}$. Si potrebbe estendere la definizione di curva chiusa chiamando $a = \inf I$ e $b = \sup I$ (finiti o infiniti che siano) e verificare se

$$\lim_{t \to a} r(t) = \lim_{t \to b} r(t), \tag{1}$$

se i due limiti sopra esistono e definiscono un elemento di $\mathbb{R}^n$ (si potrebbe dimostrare che se ciò accade, allora la curva può essere riparametrizzata su di un intervallo chiuso e limitato in modo da definire una curva chiusa). Nel nostro caso però si nota che prendendo le componenti r_2 si ha che

$$\lim_{t \to -\infty} r_2(t) = -\infty, \qquad \lim_{t \to +\infty} r_2(t) = +\infty,$$

quindi la (1) non vale.

La retta tangente alla curva nel punto $r(1/4)$ sará data in forma parametrica da

$$r(1/4) + tr'(1/4) = \Big(-\frac{3}{16}, \frac{3}{32} \Big) + t\Big(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8} \Big) = \Big(-\frac{3}{16} - \frac{t}{2}, \frac{3}{32} - \frac{t}{8} \Big).$$

Per scrivere tale retta in forma cartesiana, basta ricavare il parametro t dalle equazioni

$$\begin{cases} x = -\dfrac{3}{16} - \dfrac{t}{2} \\[2ex] y = \dfrac{3}{32} - \dfrac{t}{8} \end{cases}$$

per ottenere l'equazione

$$y = \frac{x}{4} + \frac{9}{64}.$$

Per la retta normale si procede in modo analogo, considerando l'equazione parametrica

$$\Big(-\frac{3}{16}, \frac{3}{32} \Big) + t\Big(\frac{1}{8}, -\frac{1}{2} \Big) = \Big(-\frac{3}{16} + \frac{t}{8}, \frac{3}{32} - \frac{t}{2} \Big)$$

che in coordinate cartesiane diventa

$$y = -4x - \frac{21}{32}.$$

2. Per calcolare il parametro d'arco o ascissa curvilinea, consideriamo

$$r'(t) = 3 \sin t \cos t(-\sin t, \cos t)$$

e calacoliamo $v(t) = \|r'(t)\| = 3|\sin t| \cdot |\cos t|$. Abbiamo quindi che per $t \in [0, \pi/2]$

$$s(t) = 3 \int_0^t \sin\tau \cos\tau d\tau = \frac{3}{2} \sin^2 t.$$

Se invece consideriamo $t \in [\pi/2, \pi]$, si trova che

$$\begin{aligned} s(t) =& 3 \int_0^t |\sin\tau| \cdot |\cos\tau| d\tau = 3 \int_0^{\pi/2} \sin\tau \cos\tau d\tau - 3 \int_0^t \sin\tau \cos\tau d\tau \\ =& 3 - \frac{3}{2} \sin^2 t. \end{aligned}$$

Se vogliamo riparametrizzare la curva usando l'ascissa curvilinea, dobbiamo ricavarci t in funzione di s; nel caso in cui $t \in [0, \pi/2]$, abbiamo che $s \in [0, 3/2]$ e quindi abbiamo che

$$s = \frac{3}{2} \sin^2 t \qquad \text{se e solo se} \qquad t = \arcsin \sqrt{\frac{2s}{3}}.$$

Nel caso invece in cui $t \in [\pi/2, \pi]$, abbiamo che $s \in [3/2, 3]$; quindi non possiamo considerare direttamente la funzione arcsin in quanto t non appartiene all'intervallo di invertibilitá della funzione sin. Ma se scriviamo $\sin t = \sin(\pi - t)$, possiamo quindi ricavare che

$$s = 3 - \frac{3}{2} \sin^2 t \qquad \text{se e solo se} \qquad t = \pi - \arcsin \sqrt{2 - \frac{2s}{3}}.$$

La curva riparametrizzata diventa quindi $\varphi : [0, 3] \to \mathbb{R}^2$,

$$\varphi(s) = r(t(s)) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt{3}}((3-2s)^{3/2}, (2s)^{3/2}) & s \in [0, 3/2] \\ \\ \frac{1}{3\sqrt{3}}(-(2s-3)^{3/2}, (6-2s)^{3/2}) & s \in [3/2, 3]. \end{cases}$$

Verifichiamo la condizione $\|\varphi'(s)\| = 1$; per $s \in (0, 3/2)$, abbiamo

$$\varphi'(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(-(3-2s)^{1/2}, (2s)^{1/2}) = T_\varphi(s) T_\varphi(s)$$

ed è facile la verifica che tale vettore ha norma 1. Notiamo inoltre che

$$\lim_{s \to 3/2^-} \varphi'(s) = (0, 1). \tag{2}$$

Infine, per $s \in (3/2, s)$ otteniamo

$$\varphi'(s) = -\frac{1}{\sqrt{3}}((2s-3)^{1/2}, (6-2s)^{1/2}) = T_\varphi(s);$$

si nota quindi che

$$\lim_{s\to 3/2^+} \varphi'(s) = (0,-1). \tag{3}$$

Si osserva quindi che $\phi'(s)$ non può essere esteso in $s = 3/2$ in modo da ottenere una funzione continua, quindi la curva è regolare ma non regolare a tratti.

Calcoliamo infine la curvatura di φ; la calcoliamo solo per $s \in (0, 3/2)$, in quanto per gli altri valori di s la si potrà dedurre da ragionamenti di simmetria. Abbiamo che

$$\varphi''(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\frac{1}{\sqrt{3-2s}}, \frac{1}{\sqrt{2s}}\Big),$$

da cui

$$k_\varphi(s) = \|\varphi''(s)\| = \frac{1}{\sqrt{2s(3-2s)}}.$$

Si noti che la curvatura tende a $+\infty$ per $s \to 0$ e $s \to 3/2$, da cui il fatto che il raggio di curvatura tende a 0 in tali punti. Il versore normale alla curva sarà in ultimo dato da

$$N_\varphi(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2s}, \sqrt{3-2s}).$$

Per calcolare la curvatura dell'asteroide usando la parametrizzazione r (considereremo $t \in [0, \pi/2]$), utilizziamo la formula

$$r''(t) = a(t)T_r(t) + v^2(t)k_r(t)N_r(t),$$

dove $a(t) = v'(t)$ con $v(t) = \|r'(t)\|$. Abbiamo già calcolato $v(t)$ che per $t \in [0, \pi/2]$ vale $3\sin t\cos t$; derivando la quantità $r'(t) = 3\sin t\cos t(-\sin t, \cos t)$ si ottiene

$$r''(t) = \underbrace{(3-6\sin^2 t)}_{a(t)}\underbrace{(-\sin t, \cos t)}_{T_r(t)} + \underbrace{3\sin t\cos t}_{v^2(t)k_r(t)}\underbrace{(-\cos t, -\sin t)}_{N_r(t)},$$

da cui il fatto che,

$$k_r(t) = \frac{1}{3\sin t\cos t}.$$

Si noti infine che ponendo $t = \arcsin\sqrt{\frac{2s}{3}}$, si ottiene che $k_r(t) = k_\varphi(s)$.

3. La curva che in coordinate polari è definita da $\varrho(\vartheta) = \vartheta$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$ definisce una curva $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$$r(\vartheta) = (\vartheta\cos\vartheta, \vartheta\sin\vartheta).$$

Tale curva è di classe C^1, non chiusa e semplice; queste ultime due proprietà si possono ricavare dal fatto che $\vartheta \mapsto \|r(\vartheta)\|$ è una funzione strettamente monotona crescente. Per la regolarità, consideriamo

$$r'(\vartheta) = (\cos\vartheta - \vartheta\sin\vartheta, \sin\vartheta + \vartheta\cos\vartheta),$$

da cui $\|r'(\vartheta)\| = \sqrt{1+\vartheta^2} > 0$; quindi la curva è regolare. La sua lunghezza, tenendo conto del cambio di variabili $x = \sqrt{1+\vartheta^2} - \vartheta$, sarà data da

$$\begin{aligned} l(r, [0, 2\pi]) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\vartheta^2}d\vartheta = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{1+4\pi^2}-2\pi}^{1} \Big(x + \frac{1-x^2}{2x}\Big)\frac{x^2+1}{x^2}dx \\ &= \frac{1}{2}\log(2\pi + \sqrt{4\pi^2+1}) + \pi\sqrt{4\pi^2+1}. \end{aligned}$$

Per calcolare la curvatura, scriviamo $v(\vartheta) = \sqrt{1+\vartheta^2}$, $a(\vartheta) = v'(\vartheta) = \frac{\vartheta}{\sqrt{1+\vartheta^2}}$ e

$$T_r(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{1+\vartheta^2}}(\cos\vartheta - \vartheta\sin\vartheta, \sin\vartheta + \vartheta\cos\vartheta).$$

Ricaviamo la curvatura quindi dalla formula

$$\begin{aligned} v(\vartheta)^2 k_r(\vartheta) N_r(\vartheta) =& r''(\vartheta) - a(\vartheta) T_r(\vartheta) \\ =& \frac{\vartheta^2+2}{\sqrt{1+\vartheta^2}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+\vartheta^2}}(-\sin\vartheta - \vartheta\cos\vartheta, \cos\vartheta - \vartheta\sin\vartheta)}_{N_r(\vartheta)}, \end{aligned}$$

da cui

$$k_r(\vartheta) = \frac{\vartheta^2+2}{(1+\vartheta^2)^{3/2}}.$$

4. Calcoliamo le derivate della funzione r:

$$r'(t) = (-\sin t, \cos t, 1), \qquad r''(t) = (-\cos t, -\sin t, 0).$$

Quindi $v(t) = \|r'(t)\| = \sqrt{2}$ da cui $a(t) = v'(t) = 0$. La derivata seconda si decompone quindi come

$$r''(t) = v^2(t) k_r(t) N_r(t),$$

da cui il fatto che $N_r(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)$ e

$$k_r(t) = \frac{1}{v^2(t)} = \frac{1}{2}.$$

Esercizi II settimana
14 ottobre 2010

1. Studiare la continuità della funzione
$$f(x,y)=\frac{y^2}{x^2+y^2};$$
in particolare, dire se la funzione può essere estesa in $(0,0)$. Si dica infine se esiste il seguente limite
$$\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} f(x,y).$$
2. Disegnare l'insieme di definizione della funzione
$$f(x,y)=\arctan\frac{x^2-y^2+1}{x^2+y^2+1};$$
si descrivano le proprietà topologiche di tale insieme (si dica cioè se il dominio è un insieme chiuso o aperto e se ne determino le parti interne, esterne e di frontiera).
3. Dimostrare che il limite
$$\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty}\frac{|x|^\alpha|y|^\beta}{x^2+y^2},\qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R},$$
esiste (ed è uguale a 0) se e solo se $\alpha+\beta<2$.
4. Si disegnino gli insiemi di livello della funzione al punto 1.,
$$f(x,y)=\frac{y^2}{x^2+y^2};$$
si determini quindi il massimo e il minimo di f sull'insieme
$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x-2)^2+y^2\le 1\}=\overline{B}_1((2,0))$$
mediante lo studio degli insimi di livello.

Soluzioni

1. La funzione è continua in $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ in quanto quoziente di funzioni continue. Per studiare la continuità in 0, possiamo considerare le rette $y=mx$, sulle quali si trova che
$$f(x,mx)=\frac{m^2}{1+m^2}.$$
Troviamo quindi che il limite per $x\to 0$ di tale valore dipende dal parametro m; in particolare $f(x,0)=0$ e $f(0,y)=1$, quindi troviamo che il limite
$$\lim_{(x,y)\to 0} f(x,y)$$
non esiste. Quindi la funzione non potrà essere estesa con continuità su tutto $\mathbb{R}^2$.

2. La funzione arctan è definita su tutto $\mathbb{R}$, quindi la funzione data è continua non appena l'argomento dell'arcotangente è definito. Ma la funzione

$$\frac{x^2 - y^2 + 1}{x^2 + y^2 + 1}$$

è definita e continua in tutto $\mathbb{R}^2$. La funzione data è quindi definita su tutto $\mathbb{R}^2$ ed è ivi continua; avremo quindi che il dominio è sia chiuso che aperto, con parte interna coincidente con tutto $\mathbb{R}^2$, parte esterna e frontiera vuoti.

3. Se passiamo alle coordinate polari, otteniamo la funzione

$$\tilde{f}(\varrho, \vartheta) = \varrho^{\alpha+\beta-2} |\cos\vartheta|^\alpha |\sin\vartheta|^\beta.$$

Quindi, siccome $|\tilde{f}(\varrho, \vartheta)| \leq \varrho^{\alpha+\beta-2}$, otterremo che se $\alpha + \beta - 2 < 0$, allora

$$\exists \lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} f(x, y) = 0.$$

In caso contrario, possiamo considerare i due casi $y = 0$ e $y = x$ in modo da trovare che

$$f(x, 0) = 0, \qquad f(x, x) = \frac{|x|^{\alpha+\beta-2}}{2};$$

quindi per $|x| \to +\infty$, troviamo che il limite ad infinito non può esistere per $\alpha+\beta \geq 2$.

4. Gli insiemi di livello si determinalo risolvendo le equazioni

$$\frac{y^2}{x^2 + y^2} = c;$$

si nota che si deve avere $c \geq 0$. L'equazione precedente è equivalente a

$$(1 - c)y^2 = cx^2,$$

da cui si deduce che deve essere anche $c \leq 1$; passando alla radice quadrata si trova

$$|y|\sqrt{1 - c} = |x|\sqrt{c}$$

che sono sono rette passanti per l'origine. Lungo la retta $y = 0$ si trova che la funzione, che è sempre non negativa, si annulla, quindi su tale retta si ha il minimo della funzione. Se vogliamo trovare il massimo e il minimo sull'insieme $\overline{B}_1((2, 0))$, ne deduciamo quindi che il minimo è zero e viene assunto sul segmente $y = 0$ e $1 \leq x \leq 3$. Per trovare il massimo, cerchiamo la retta (insieme di livello) che è tangente all'insieme dato, cioè cerchiamo il valore di c per cui il seguente sistema ha due sole soluzioni

$$\begin{cases} |y|\sqrt{1 - c} = |x|\sqrt{c} \\ \\ (x - 2)^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Ricavando la y dalla prima equazione e sostituendo nella seconda, si trova, per $c \neq 1$, che la soluzione si trova risolvendo la seguente equazione;

$$\frac{1}{1 - c}x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Si avrà quindi la soluzione imponendo che il discriminante di tale polinomio sia nullo, cioè

$$\frac{\Delta}{4} = 4 - \frac{3}{1-c} = 0.$$

Tale soluzione si avrà quindi per $c = 1/4$ ed in corrispondenza di tale valore si trovano i due punti $(1, 1)$ e $(1, -1)$. In definitiva, il massimo è $1/4$ assunto nei due punti $(1, 1)$ e $(1, -1)$.

Esercizi III settimana
20 ottobre 2010

1. Studiare la differenziabilità in $(0,1)$ della funzione
$$f(x,y) = \sqrt[3]{x^2(y-1)} + 1.$$
si determini inoltre la derivata di f in direzione v in $(0,1)$, sia usando la definizione di derivata direzionale, che utiizzando la formula che lega le derivate direzionali al differenziale.

2. Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico della funzione
$$f(x,y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2}$$
nel punto $(1,1)$.

3. Verificare la formula di derivata della funzione composta $Dh = Df \cdot Dg$ e $DH = Dg \cdot Df$ dove
$$f(x,y) = (e^x \sin y, e^x \cos y, xy), \qquad g(x,y,z) = (z(x^2+y^2), z^2).$$

4. Dire in quali punti del piano si può applicare il Teorema della funzione implicita alla funzione
$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy;$$
in particolare, dire quali insiemi di livello di f sono curve regolari e descrivere cosa succede nei punti in cui non si può applicare il Teorema delle funzioni implicite. Si scriva infine l'equazione della retta tangente ai livelli di f in un generico punto (x_0, y_0) e si particolarizzi la formula trovata nel punto $(2,2)$.

Soluzioni

1. Iniziamo col calcolare le derivate parziali, dove sono definite, con le usuali regole di derivazione; otteniamo
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{y-1}{x}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x^2}{(y-1)^2}}.$$
La derivata rispetto ad x è continua per $x \neq 0$, mentre la derivata rispetto ad y è continua per $y \neq 1$. Quindi la funzione, che è definita in tutto $\mathbb{R}^2$, è sicuramente differenziabile nell'insieme
$$E = \{x \neq 0\} \cup \{y \neq 1\}.$$
Vediamo cosa succede ad esempio nei punti con $x = 0$; dobbiamo distinguere i casi $y = 1$ e $y \neq 1$. Nel primo caso otteniamo che
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,1) - f(0,1)}{h} = 0,$$

mentre nel secondo caso

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h} \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h^2(y-1)}}{h} = \lim_{h\to 0} \sqrt[3]{\frac{y-1}{h}}$$

e tale limite non esiste. Ne deduciamo che per $y \neq 1$ non possiamo neanche scrivere il gradiente della funzione e quindi la funzione non sarà differenziabile.

Per il calcolo della derivata parziale rispetto ad y procediamo in modo analogo; distinguiamo anche qui i casi $x = 0$ e $x \neq 0$. Nel primo caso abbiamo

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,1+h)-f(0,1)}{h} = 0,$$

mentre nel secondo caso

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,1+h)-f(x,1)}{h} \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2h}}{h} = \lim_{h\to 0} \sqrt[3]{\frac{x^2}{h^2}}$$

e anche questo limite non esiste. Quindi l'unico punto residuo in cui andare a verificare la differenziabilità è il punto $(0,1)$; qui abbiamo che il gradiente è nullo, quindi lo studio della differenziabilità si riduce allo studio del limite

$$\lim_{(h,k)\to 0}\frac{f(h,1+k)-f(0,1)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to 0}\frac{\sqrt[3]{h^2k}}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Si nota però che prendendo ad esempio $k = mh$, il precedente limite diventa

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{m}h}{\sqrt{1+m^2}|h|},$$

da cui la non esistenza del limite e la non differenziabilità di f in $(0,1)$.

La non differenziabilità in $(0,1)$ si deduce anche considerando la derivata direzionale di f in $(0,1)$ e direzione $v = (v_1, v_2)$;

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(hv_1, 1+hv_2)-f(0,1)}{h} = \sqrt[3]{v_1^2 v_2};$$

dato che questo risultato non è lineare in v, allora la funzione non può essere differenziabile, nonostante esistano tutte le derivate direzionali.

2. Scriviamo direttamente il gradiente della funzione;

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{y(1-x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}, \frac{x(1-y^2+x^2)}{(1+x^2+y^2)^2},\right).$$

Quindi, dato che $\nabla f(1,1) = (\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9})$, troviamo che l'equazione del piano tangente sarà:

$$(-\nabla f(1,1), 1) \cdot (x-1, y-1, z - f(1,1)) = 0,$$

cioè il piano di equazione

$$x + y - 9z + 1 = 0.$$

3. Iniziamo col scrivere esplicitamente la funzione h;

$$\begin{aligned} h(x,y,z) =& f\circ g(x,y,z) = f(z(x^2+y^2), z^2) \\ =& (e^{z(x^2+y^2)}\sin(z^2), e^{z(x^2+y^2)}\cos(z^2), z^3(x^2+y^2)), \end{aligned}$$

da cui la matrice Jacobiana $Dh(x,y,z)$ che sarà data da

$$\begin{pmatrix} 2xze^{z(x^2+y^2)}\sin(z^2) & 2yze^{z(x^2+y^2)}\sin(z^2) & e^{z(x^2+y^2)}((x^2+y^2)\sin(z^2)+2z\cos(z^2)) \\ 2xze^{z(x^2+y^2)}\cos(z^2) & 2yze^{z(x^2+y^2)}\cos(z^2) & e^{z(x^2+y^2)}((x^2+y^2)\cos(z^2)-2z\sin(z^2)) \\ 2xz^3 & 2yz^3 & 3z^2(x^2+y^2) \end{pmatrix}.$$

Per verificare la formula ci calcoliamo ora le matrici di Jacobiane di f e g:

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} e^x\sin y & e^x\cos y \\ e^x\cos y & -e^x\sin y \\ y & x \end{pmatrix},$$

mentre

$$Dg(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xz & 2yz & x^2+y^2 \\ 0 & 0 & 2z \end{pmatrix}.$$

Si tratta quindi di verificare che il prodotto riga per colonna della matrice

$$Df(g(x,y,z))\cdot Dg(x,y,z)$$

corrisponda alla matrice precedentemente trovata;

$$\begin{pmatrix} e^{z(x^2+y^2)}\sin(z^2) & e^{z(x^2+y^2)}\cos(z^2) \\ e^{z(x^2+y^2)}\cos(z^2) & -e^{z(x^2+y^2)}\sin(z^2) \\ z^2 & z(x^2+y^2) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2xz & 2yz & x^2+y^2 \\ 0 & 0 & 2z \end{pmatrix};$$

questa verifica è immediata.

Per verificare la seconda parte, consideriamo la funzione

$$H(x,y) = g(f(x,y)) = (xye^{2x}, x^2y^2),$$

la cui matrice Jacobiana è data da

$$DH(x,y) = \begin{pmatrix} ye^{2x}(1+2x) & xe^{2x} \\ 2xy^2 & 2x^2y \end{pmatrix}.$$

La verifica si effettua qui considerando $Dg(f(x,y))\cdot Df(x,y)$, cioè il prodotto;

$$\begin{pmatrix} 2xye^x\sin y & 2xye^x\cos y & e^{2x} \\ 0 & 0 & 2xy \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} e^x\sin y & e^x\cos y \\ e^x\cos y & -e^x\sin y \\ y & x \end{pmatrix};$$

anche qui la verifica è immediata.

4. Iniziamo col calcolare il gradiente di f;

$$\nabla f(x, y) = 3(x^2 - y, y^2 - x);$$

i punti in cui tale gradiente si annulla sono solo $(0, 0)$ e $(1, 1)$, quindi questi sono i soli due punti in cui il Teorema della funzione implicita non si applica. Per i punti che non appartengono alla parabola $y = x^2$, il teorema si potrà applicare per dedurre che i livelli sono localmente grafico rispetto alla variabile y, cioè della forma $x = g(y)$, mentre per i punti che non appartengono alla parabola $x = y^2$, il teorema si potrà applicare per dedurre che i livelli sono grafici $y = g(x)$. Per la retta tangente basterà applicare la formula

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0,$$

cioè in un punto generico (x_0, y_0):

$$3(x_0^2 - y_0, y_0^2 - x_0)(x - x_0, y - y_0) = 0.$$

Tale equazione nel punto $(x_0, y_0) = (2, 2)$ diventa

$$x + y = 4.$$

Esercizi IV settimana
29 ottobre 2010

1. Si scriva il polinomio di Mac Laurin di grado quattro della funzione
$$f(x) = e^{\sin x}.$$

2. Si verifichi che le condizioni del Teorema delle funzioni implicite sono soddisfatte nel punto $(2,1)$ per la funzione
$$f(x,y) = 3xy^2 - 2x^3y + 10.$$
Si scriva quindi il polinomio di Taylor di grado 3 della funzione $y = g(x)$ definita implicitamente in $(2,1)$ dall'equazione $f(x,y) = 0$.

3. Si dimostri che l'elicoide parametrizzato da $f : [0,1] \times [0,4\pi] \to \mathbb{R}^3$
$$f(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v)$$
è una superficie regolare (eventualmente dire dove tale superficie non è regolare). Si tracci un disegno approssimato di tale superficie.

4. Si dimostri che la superficie ottenuta ruotando attorno all'asse z la curva
$$r(t) = (x(t), z(t)) = (t(1+t), \sin(\pi t)), \qquad t \in [0,1],$$
è una superficie regolare (eventualmente, dire in quali punti viene meno la regolarità) e si scriva l'equazione del piano tangente alla superficie nel punto $(\frac{5\sqrt{2}}{32}, \frac{5\sqrt{2}}{32}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Soluzioni

1. Ricordando gli sviluppi di MacLaurin
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4), \qquad e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^2}{24} + o(y^4),$$
con la sostituzione $y = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ e notando che $o(y^4) = o(x^4)$, si ottiene lo sviluppo
$$\begin{aligned} e^{\sin x} =& e^{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)} = 1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 + \\ &+ \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^3 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4 + o(x^4) \\ =& 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4). \end{aligned}$$

Quindi il polinomio di MacLaurin di grado 4 sarà dato da

$$T_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}$$

ed in particolare si deduce che $f^{(4)}(0) = -3$.

2. Anzitutto, $f(2,1) = 0$, quindi $(2,1) \in E_0 = \{f = 0\}$. Inoltre,

$$\nabla f(x,y) = (3y^2 - 6x^2y, 6xy - 2x^3), \qquad \nabla f(2,1) = (-21, -4).$$

Quindi il Teorema della funzione implicita si può applicare sia rispetto alla variabile x che rispetto alla variabile y. In particolare, esisterà una funzione $g : (2-\varepsilon, 2+\varepsilon) \to \mathbb{R}$ con $g(2) = 1$ e tale che $E_0 \cap (2-\varepsilon, 2+\varepsilon) \times (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ è il grafico di g per ε opportuno. Per determinare lo sviluppo di Taylor di g di ordine 3 attorno a $x_0 = 2$ dovremo derivare tre volte l'espressione

$$0 = 3xg(x)^2 - 2x^3g(x) + 10.$$

Otterremo le espressioni, per la derivata prima

$$0 = 3g(x)^2 + 6xg(x)g'(x) - 6x^2g(x) - 2x^3g'(x),$$

mentre per la derivata seconda

$$0 = 12g(x)g'(x) + 6xg'(x)^2 + 6xg(x)g''(x) - 12xg(x) - 12x^2g'(x) - 2x^3g''(x)$$

ed infine per la derivata terza

$$\begin{aligned} 0 =& 18g'(x)^2 + 18g(x)g''(x) + 18xg'(x)g''(x) + 6xg(x)g'''(x) - 12g(x) - 36xg'(x) + \\ & - 18x^2g''(x) - 2x^3g'''(x). \end{aligned}$$

Se ne deduce quindi lo sviluppo

$$g(x) = 1 - \frac{21}{4}(x-2) + \frac{1983}{32}(x-2)^2 - \frac{183421}{192}(x-2)^3 + o((x-2)^3).$$

3. Calcoliamo la matrice Jacobiana della parametrizzazione:

$$Df(u,v) = \begin{pmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui si ricava che

$$f_u(u,v) \times f_v(u,v) = (\sin v, -\cos v, u),$$

e quindi $\|f_u \times f_v\| = \sqrt{1+u^2}$. La superficie è quindi regolare ovunque. Per avere un'idea qualitativa di tale superficie, si possono considerare le curve con u o v costante. Per u costante si ottiene un'elica cilindrica, mentre per v costante si ottiene un segmento che parte dal punto $(0,0,v)$ ed ha per direzione $(\cos v, \sin v, 0)$. La superficie risultante è un'elicoide (una scala a chiocciola). Si utilizzi Matlab per avere una rappresentazione più fedele di tale superficie.

4. La superficie che si ottiene ruotando la curva data attorno all'asse z può essere parametrizzata da $f : [0,1] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$f(t,\vartheta) = ((t+t^2)\cos\vartheta, (t+t^2)\sin\vartheta, \sin(\pi t)).$$

La matrice Jacobiana di tale parametrizzazione è data da

$$Df(t,\vartheta) = \begin{pmatrix} (1+2t)\cos\vartheta & -(t+t^2)\sin\vartheta \\ (1+2t)\sin\vartheta & (t+t^2)\cos\vartheta \\ \pi\cos(\pi t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Se ne deduce quindi che

$$f_t(t,\vartheta) \times f_\theta(t,\vartheta) = (t+t^2)(-\pi\cos\vartheta\cos(\pi t), -\pi\sin\vartheta\cos(\pi t), 1+2t),$$

da cui

$$\|f_t(t,\vartheta) \times f_\theta(t,\vartheta)\| = |t+t^2|\sqrt{\pi^2\cos(\pi t) + (1+2t)^2}.$$

La superficie è quindi regolare nel dominio in considerazione purché $t \neq 0$. Per l'equazione del piano tangente, dobbiamo prima trovare i valori di t e ϑ per cui $f(t,\vartheta) = (\frac{5\sqrt{2}}{32}, \frac{5\sqrt{2}}{32}, \frac{\sqrt{2}}{2})$; si trova che $t = 1/4$ e $\vartheta = \pi/4$ sono tali valori; il piano tangente sarà quindi dato da

$$f_t(1/4,\pi/4) \times f_\theta(1/4,\pi/4) \cdot \left(x - \frac{5\sqrt{2}}{32}, y - \frac{5\sqrt{2}}{32}, z - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0,$$

e cioè il piano di equazione

$$\pi x + \pi y - 3z + \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{16} = 0.$$

Esercizi V settimana
4 novembre 2010

1. Dire se l'insieme
$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 \leq y \leq x^2\}$$
è semplice o meno (in caso, dire rispetto a quale asse); si calcoli quindi l'area di E.

2. Data la funzione $z = f(x) = e^x$, $x \in [1,3]$, si calcolino i volumi dei solidi di rotazione ottenuti ruotando f sia attorno all'asse x che attorno all'asse z.

3. Dire se la funzione
$$f(x,y) = \frac{1}{x+y}$$
è integrabile in senso generalizzato nel triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,1)$ e $(1,1)$.

4. Disegnare il sottoinsieme del piano
$$E = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \geq \frac{1}{4}, \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\right\}.$$
Si determini tale insieme usando anche le coordinate polari e si calcoli il seguente integrale:
$$\int_E \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dxdy.$$

Soluzioni

1. Dimostriamo che l'insieme dato è y-semplice; notiamo che abbiamo già la condizione $h_1(x) = x^4 \leq y \leq x^2 = h_2(x)$, e cioè abbiamo le due funzioni continue h_1 e h_2 che determinano le limitazioni sulla variabile y. Manca da determinare l'intervallo su cui è definita la variabile x; questo si individua imponendo la condizione $x^4 \leq x^2$, altrimenti la condizione $x^4 \leq y \leq x^2$ ha come risultato l'insieme vuoto. Ma la condizione $x^4 \leq x^2$ si verifica per $x \in [-1,1]$, e quindi troviamo che
$$E = \{-1 \leq x \leq 1, x^4 \leq y \leq x^2\}.$$
L'area di E sarà data dall'integrale della funzione 1 su E, cioè
$$\text{Area}(E) = \int_E dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^4}^{x^2} dy = 2\int_0^1 (x^2 - x^4)dx = \frac{4}{15}.$$

2. Per rotazione di f attorno all'asse x si intende ruotare l'insieme del piano dato dal sottografico di f rispetto all'asse x, operazione che determina l'insieme
$$E = \{(x,y,z) : x \in [1,3], y^2 + z^2 \leq e^{2x}\},$$

quindi il volume di E, dato che E è stratificato in direzione x e gli strati sono cerchi di raggio e^x, sarà dato da

$$\mathrm{Vol}(E) = \pi \int_2^3 e^{2x} dx = \frac{\pi(e^6 - e^2)}{2}.$$

Per quanto riguarda la rotazione attorno all'asse z, si intende l'insieme che si ottiene ruotando rispetto a z il sottografico di f, cioè l'insieme

$$E = \{(x, y, z) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq z \leq e^{\sqrt{x^2+y^2}}\},$$

quindi, dato che E è z–semplice, si ottiene che il suo volume è dato da

$$\mathrm{Vol}(E) = \int_{\{1 \leq x^2+y^2 \leq 9\}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = 2\pi \int_1^3 \varrho e^{\varrho} d\varrho = 4\pi e^3.$$

3. La funzione non è definita per $x + y = 0$; possiamo quindi considerare degli insiemi che invadono il triangolo E di vertici $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 1)$ del tipo

$$E_h = \{(x, y) : \frac{1}{h} \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}.$$

In questo modo otteniamo che

$$\int_{E_h} \frac{1}{x+y} dxdy = \int_{1/h}^1 dy \int_0^y \frac{1}{x+y} dx = \int_{1/h}^1 \log 2 dy = \log 2 \left(1 - \frac{1}{h}\right).$$

La funzione f è positiva e quindi

$$\sup_{h \geq 0} \int_{E_h} \frac{1}{x+y} dxdy \leq \log 2,$$

quindi la funzione è integrabile in senso generalizzato su E e

$$\int_E \frac{1}{x+y} dxdy = \lim_{h \to +\infty} \int_{E_h} \frac{1}{x+y} dxdy = \log 2.$$

4. L'insieme dato consiste nella parte esterna al cerchio di raggio $1/2$ centrato nell'origine ed interno al cerchio di raggio $1/2$ centrato in $(1/2, 0)$. In coordinate polari tale insieme diventa

$$E' = \left\{(\varrho, \vartheta) \in (-\pi, \pi] \times [0, +\infty) : \frac{1}{2} \leq \varrho \leq \cos \vartheta \right\}.$$

Si noti che abbiamo preso $\vartheta \in (-\pi, \pi]$; questa scelta risulta più comoda, in quanto il nostro insieme è contenuto nel semipiano $x \geq 0$. Si deve avere $1/2 \leq \cos \vartheta$ per non avere insiemi vuoti in ϱ, da cui si deduce che $\vartheta \in [-\pi/3, \pi/3]$. Possiamo quindi calcolare l'integrale dato passando alle coordinate polari e sfruttando la simmetria dell'insieme E rispetto all'asse x e la parità in y della funzione integranda,

$$\int_E \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dxdy = 2 \int_0^{\pi/3} d\vartheta \int_{1/2}^{\cos \vartheta} \frac{\varrho}{\sqrt{1 - \varrho^2}} d\varrho = \frac{\pi}{\sqrt{12}} - 1.$$

Esercizi VI settimana
11 novembre 2010

1. Ricordiamo la seguente definizione; un insieme illimitato E si dice misurabile se esiste una successione di insiemi limitati e misurabili E_h invadenti E, cioè tali che $E_h \subset E_{h+1}$ e $E = \bigcup_h E_h$. In tal caso si porrà $|E| = \lim_h |E_h|$. Dimostrare quindi, dopo averlo disegnato, che l'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq |\log(x^2 + y^2)|\}$$

è misurabile e se ne calcoli la misura (cioè se ne determini il volume). Si dica infine che relazione c'è tra il procedimento precedente e il calcolo dell'integrale in senso generalizzato della funzione $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ su $\{x^2 + y^2 \leq 1\}$.

2. Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integrale

$$\int_E (x^2 + y^2 + z^2)^\alpha dxdydz,$$

con $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

3. Calcolare baricentro e momento di inerzia per la rotazione attorno all'asse z del cono

$$E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq (1 - z)^2, 0 \leq z \leq 1\}$$

la cui densità di massa è descritta dalla funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z$.

4. Si dica in quale insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ la funzione

$$f(x, y) = e^{|y^2 - 5y|} - (y - 2\log(x - 1))^2$$

è di classe C^2 e in tali punti si scriva la matrice Hessiana di f.

Soluzioni

1. Dobbiamo trovare una successione di insiemi misurabili e limitati E_h tali che $E_h \subset E_{h+1}$ e

$$E = \bigcup_{h=1}^{\infty} E_h \qquad \text{(a meno di insiemi di misura nulla).}$$

Una possibile scelta è data dagli insiemi

$$E_h = \{(x, y, z) : \frac{1}{h^2} \leq x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq |\log(x^2 + y^2)|\}.$$

Tali insiemi sono z–semplici, e quindi la loro misura sarà data da

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(E_h) =& |E_h| = \int_{\{\frac{1}{h^2}\le x^2+y^2\le 1\}} dxdy \int_0^{|\log(x^2+y^2)|} dz \\
=& -\int_{\{\frac{1}{h^2}\le x^2+y^2\le 1\}} \log(x^2+y^2)dxdy = -2\pi \int_{1/h}^{2} 2\varrho \log\varrho d\varrho \\
=& \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2h^2} - \frac{\pi\log h}{h^2}.
\end{aligned}
$$

Quindi $\sup_h \mathrm{Vol}(E_h) < +\infty$; inoltre

$$
\bigcup_{h=1}^{\infty} E_h = E \setminus \{x=y=0\},
$$

ma l'insieme $\{x=y=0\}$ (l'asse z) è un insieme di misura nulla, quindi

$$
\mathrm{Vol}(E) = \lim_h \mathrm{Vol}(E_h) = \frac{\pi}{2}.
$$

Infine, dato che l'insieme è z–semplice, il calcolo del suo volume è esattamente equivalente al calcolo dell'integrale generalizzato

$$
\int_{\{x^2+y^2\le 1\}} |\log(x^2+y^2)| dxdy.
$$

2. Per fare il calcolo, passiamo alle coordinate sferiche; l'insieme diventa

$$
E' = \{0 \le \cos\varphi \le \sin\varphi, 0 \le \varrho \le 1\} = \{\vartheta \in [0,2\pi), \varphi \in [\pi/4, \pi/2], \varrho \in [0,1]\}.
$$

Quindi l'integrale diventa

$$
\int_E (x^2+y^2+z^2)^\alpha dxdydz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \varrho^{2\alpha+2}\sin\varphi = \pi\sqrt{2}\int_0^1 \varrho^{2\alpha+2} d\varrho.
$$

Diventa quindi un integrale generalizzato per una funzione di una variabile e tale integrale converge se $2\alpha+2 > -1$, cioè $\alpha > -\frac{3}{2}$ e l'integrale vale

$$
\int_E (x^2+y^2+z^2)^\alpha dxdydz = \frac{\pi\sqrt{2}}{2\alpha+3}.
$$

3. Iniziamo col calcolare la massa del cono, passando alle coordinate cilindriche;

$$
\begin{aligned}
M =& \int_E f(x,y,z)dxdydz = \int_E (x^2+y^2+2z)dxdydz \\
=& \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 dz \int_0^{1-z} (\varrho^2+2z)\varrho d\varrho = \frac{4\pi}{15}.
\end{aligned}
$$

Per il calcolo del baricentro avremo quindi

$$
\bar{x} = \frac{1}{M}\int_E xf(x,y,z)dxdydz = \bar{y} = \frac{1}{M}\int_E yf(x,y,z)dxdydz = 0,
$$

in quanto la funzione da integrare è dispari sia nella x che nella y e E è simmetrico rispetto ai piani $x = 0$ e $y = 0$. Infine

$$\bar{z} = \frac{1}{M}\int_E zf(x, y, z)dxdydz = \frac{5}{16}.$$

Per il momento di inerzia, dato che la distanza al quadrato dall'asse z è data da x^2+y^2, avremo che

$$I_z(E) = \int_E (x^2 + y^2)f(x, y, z)dxdydz = \frac{17\pi}{210}.$$

4. La funzione non è di classe C^2 in tutto il suo dominio, ma lo è nell'insieme

$$E = \{(x, y) : x > 1, y \neq 0, 5\}.$$

In tale insieme faremo le derivate della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{y^2-5y} - (y - 2\log(x - 1))^2 & \text{per } y < 0, y > 5 \\ \\ e^{-y^2+5y} - (y - 2\log(x - 1))^2 & \text{per } 0 < y < 5. \end{cases}$$

Consideriamo solo il caso $y < 0$ e $y > 5$, nell'altro caso basterà cambiare un segno; abbiamo che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4\frac{(y - 2\log(x - 1))}{x - 1}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (2y - 5)e^{y^2-5y} - 2(y - 2\log(x - 1)),$$

e quindi

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} -\dfrac{4(y + 2 - \log(x - 1))}{(x - 1)^2} & \dfrac{4}{x - 1} \\ \\ \dfrac{4}{x - 1} & e^{y^2-5y}(4y^2 - 20y + 27) - 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizi VII settimana
18 novembre 2010

1. Trovare e classificare i punti stazionari della seguente funzione:

$$f(x,y) = (y^2 - y)e^{x^2-x}.$$

2. Trovare il massimo e il minimo della funzione dell'esercizio precedente nell'insieme

$$E = \{(x.y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$$

3. Trovare e classificare i punti stazionari della funzione

$$f(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + xyz.$$

4. Determinare il massimo e il minimo della funzione

$$f(x,y,z) = xyz$$

sull'insieme

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z = 1\}.$$

Dedurre da questo che per tutti i numeri positivi x, y, z vale la seguente relazione tra la media geometrica e la media aritmetica:

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}.$$

Si provi a il precedente risultato al caso generale;

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$

tra tutti i numeri positivi $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$,

Soluzioni

1. La funzione data è di classe C^1 e il suo gradiente è dato da

$$\nabla f(x,y) = ((y^2 - y)(2x-1)e^{x^2-x}, (2y-1)e^{x^2-x});$$

quindi di punti stazionari, soluzioni di $\nabla f(x,y) = 0$, c'è solo il punto $(1/2, 1/2)$. Per classificarlo, scriviamo la matrice Hesiana di f

$$Hf(x,y) = e^{x^2-x} \begin{pmatrix} (y^2-y)(2+(2x-1)^2) & 2y-1 \\ 2y-1 & 2 \end{pmatrix}$$

che nel punto stazionario diventa

$$Hf(1/2,1/2) = e^{-1/4}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};$$

dato che i due autovalori di tale matrice sono dati da $-\frac{1}{2}e^{-1/4}$ e $2e^{-1/4}$, se ne deduce che il punto stazionario è un punto di sella.

2. L'insieme su cui cercare il massimo e il minimo è un triangolo rettangolo con vertici in $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$. Per quanto riguarda la ricerca dei punti stazionari interni, l'unico candidato sarebbe il punto stazionario libero $(1/2,1/2)$; tale punto però è di sella e non è interno ad E (appartiene alla parte di bordo $x+y=1$). Per lo studio del bordo, dobbiamo considerare i tre punti $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$, in cui la funzione vale sempre 0; abbiamo poi i tre lati del triangolo,

$$B_1 = \{y=0, 0<x<1\}, \quad B_2 = \{x=0, 0<y<1\}, \quad B_3 = \{0<x<1, y=1-x\}.$$

Sull'insieme B_1 la funzione vale 0, mentre la restrizione di f a B_2 definisce la funzione $g(y) = (y^2-y)$; tale funzione ha come punto stazionario $g'(y)=0$ il punto $y=1/2$, a cui corrisponde il punto del bordo $(0,1/2)$ in cui la funzione vale $-1/4$. Per quanto riguarda il bordo B_3, la restrizione di f a tale insieme definisce la funzione $g(x) = (x^2-x)e^{x^2-x}$; tale funzione ha come punto stazionario $g'(x)=0$ il punto $x=1/2$, corrispondente al punto del bordo $(1/2,1/2)$ dove la funzione vale $-e^{-1/4}/4$. Siccome non vi sono altri punti candidati massimo o minimo, per confronto si deduce che

$$\min_E f = -\frac{1}{4}, \qquad \text{assunto in } \left(0,\frac{1}{2}\right),$$

$$\max_E f = 0, \qquad \text{assunto sul segmento } \{y=0, 0\le x\le 1\} \text{ e nel punto } (0,1).$$

3. La funzione data è di classe C^1 sull'insieme

$$E = \mathbb{R}^3 \setminus (\{x=0\}\cup\{y=0\}\cup\{z=0\})$$

che è $\mathbb{R}^3$ privato dei tre assi cartesiani; il gradiente della funzione è dato da

$$\nabla f(x,y,z) = \left(-\frac{1}{x^2}+yz, -\frac{1}{y^2}+xz, -\frac{1}{z^2}+xy\right).$$

Il sistema $\nabla f(x,y,z)=0$ ha come soluzione i due punti $(1,1,1)$ e $(-1,-1,-1)$. Per la classificazione, calcoliamo la matrice Hessiana

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & z & y \\ z & \frac{2}{y^3} & x \\ y & x & \frac{2}{z^3} \end{pmatrix}.$$

In $(1,1,1)$ tale matrice diventa

$$A = Hf(1,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

dato che $A_1 = 2 > 0$, $\det A_2 = 3 > 0$ e $\det A = 4 > 0$, se ne deduce che A è definita positiva e quindi il punto $(1, 1, 1)$ è un punto di minimo locale stretto. Per quanto riguarda il punto $(-1, -1, -1)$ si ha che $Hf(-1, -1, -1) = -A$, e quindi la matrice è definita negativa, da cui il fatto che $(-1, -1, -1)$ è un punto di massimo locale stretto.

4. L'insieme E è la porzione del piano $x + y + z = 1$ contenuta nel quadrante $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. Quindi E è una superficie con bordo dato dai segmenti $\{x = 0, 0 \leq y \leq 1, z = 1 - y\}$, $\{y = 0, 0 \leq x \leq 1, z = 1 - x\}$ e $\{z = 0, 0 \leq x \leq 1, y = 1 - x\}$. Su tali segmenti la funzione si annulla; siccome $f \geq 0$ su E, se ne deduce che i tre segmenti sono punti di minimo per f su E; sui restanti punti di E la funzione è strettamente positiva, quindi ammetterà un massimo su

$$\Sigma = \{x + y + z = 1, x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

Utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per individuare il punto stazionario vincolato

$$\Phi(x, y, z, \lambda) = xyz - \lambda(x + y + z - 1);$$

dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} yz - \lambda = 0 \\ xz - \lambda = 0 \\ xy - \lambda = 0 \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

La soluzione è data da $(1/3, 1/3, 1/3)$ con $\lambda = 1/9$ e in tale punto la funzione vale $1/27$. Quindi

$$\max_E f = \frac{1}{27}, \qquad \text{assunto in } \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right),$$
$$\min_E f = 0, \qquad \text{assunto nei punti con } x = 0, y = 0, z = 0.$$

Per l'ultima parte dell'esercizio, si nota che se abbiamo tre numeri positivi x, y, z, denotata con $S = x + y + z$ la loro somma, possiamo considerare $u = x/S$, $v = y/S$ e $w = z/S$; quindi per quanto dimostrato sopra

$$uvw \leq \frac{1}{27},$$

con uguaglianza se e solo se $u = v = w = \frac{1}{3}$. Questo dice che

$$xyz \leq \frac{(x + y + z)^3}{27},$$

e cioè

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x + y + z}{3}$$

con uguaglianza se e solo se $x = y = z$. Questo ragionamente si può generalizzare alla dimensione n generica considerando la funzione

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n,$$

vincolata all'insieme

$$E = \{x_1 + \ldots + x_n = 1, x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0\}.$$

Esercizi VIII settimana
25 novembre 2010

1. Determinare i punti di massima e minima distanza dall'origine dei punti dell'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z - 1 = 0, 2x - y - 3z - 4 = 0\}.$$

2. Date le funzioni

$$f(x, y, z) = 4x^2 y \cos(yz), \qquad F(x, y, z) = (2x^2, \sin y, e^{z^2}),$$

si determino le funzioni Δf, $\mathrm{rot} F$ e $\mathrm{div} F$.

3. Dato il campo

$$F(x, y, z) = (x - xe^z, -z, e^z)\,,$$

si dica se è conservativo ed in caso affermativo se ne determini un potenziale.

4. Calcolare il flusso del campo $F(x, y, z) = (xy, xy, z)$ passante per la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) : z = 1 - x^2 - y^2, z \geq 0\}.$$

Soluzioni

1. L'insieme dato è una retta nello spazio (si vede facilmente che il rango del sistema che definisce E è 2); quindi E è un insieme illimitato, cioè non c'è un punto di massima distanza su E. Per trovare il punto di minima distanza, consideriamo la funzione quadrato della distanza con i due vincoli

$$\Phi(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x + 2y + z - 1) - \mu(2x - y - 3z - 4).$$

Arriviamo quindi al sistema

$$\begin{cases} 2x - \lambda - 2\mu = 0 \\ 2y - 2\lambda + \mu = 0 \\ 2z - \lambda + 3\mu = 0 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x - y - 3z = 4 \end{cases}$$

che ha come soluzione il punto $(16/15, 1/3, -11/15)$, con $\lambda = 52/75$ e $\mu = 54/75$; in corrispondenza di tale punto la distanza vale $\sqrt{402}/15$.

Un modo alternativo per risolvere l'esercizio è trovare la parametrizzazione di E; ricavando $z = 1 - z - 2y$, sostituendo in $2x - y - 3z = 4$ e ponendo $x = t$, si trova la parametrizzazione

$$r(t) = \left(t, \frac{7}{5} - t, t - \frac{9}{5}\right) = \left(0, \frac{7}{5}, -\frac{9}{5}\right) + t(1, -1, 1).$$

A questo punto possiamo sia considerare la funzione

$$g(t) = \|r(t)\|^2$$

e minimizzare g cercando il punto stazionario libero per g, oppure notare che il punto di minima distanza è ortogonale ad E, cioè il punto di minima distanza è imndividuato da $t \in \mathbb{R}$ per cui

$$r(t) \cdot (1, -1, 1) = 0,$$

cioè $t = 16/15$ che definisce lo stesso punto trovato precedentemente.

2. Con un conto diretto troviamo che

$$\begin{aligned}\Delta f(x, y, z) =& \mathrm{div} \nabla f(x, y, z) \\ =& \mathrm{div}(8xy\cos(yz), 4x^2\cos(yz) - 4x^2yz\sin(yz), -4x^2y^2\sin(yz)) \\ =& (8y - 4x^2yz^2 - 4x^2y^3)\cos(yz) - 8x^2z\sin(yz),\end{aligned}$$

mentre per il campo F si ha che

$$\mathrm{rot}F(x, y, z) = 0, \qquad \mathrm{div}F(x, y, z) = 4x + \cos y + 2ze^{z^2}.$$

3. Per il campo dato si verifica che

$$\mathrm{rot}F(x, y, z) = (-1, 1 - xe^z, 0),$$

quindi la condizione necessaria affinchè il campo sia conservativo non è verificata, quindi il campo non può essere conservativo e di conseguenza non può ammettere potenziale.

4. La superficie Σ è il grafico della funzione $g(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ sul dominio $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ (si ricava dalla condizione $z \geq 0$); per il calcolo del flusso, possiamo quindi utilizzare la parametrizzazione cartesiana $(x, y, g(x, y))$ e, non essendo specificata l'orientazione di Σ, scegliamo l'orientazione per la quale ν_Σ punti verso l'alto. Troveremo quindi che

$$\begin{aligned}\Phi(F, \Sigma) =& \int_D F(x, y, g(x, y)) \cdot (-\nabla g(x, y), 1)dxdy \\ =& \int_D (xy, xy, 1 - x^2 - y^2) \cdot (2x, 2y, 1)dxdy \\ =& \int_D (2x^y + 2xy^2 + 1 - x^2 - y^2)dxdy = \int_D (1 - x^2 - y^2)dxdy \\ =& 2\pi \int_0^2 (1 - \varrho^2)\varrho d\varrho = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Esercizi IX settimana
2 dicembre 2010

1. Utilizzare il Teorema della divergenza per calcolare l'area della porzione di piano racchiusa dall'asteroide, cioé la curva $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ parametrizzata da

$$r(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t).$$

2. Dato il campo $F(x, y, z) = (y, z, -x)$, calcolare il flusso del campo rot$F$ attraverso la superficie $\Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$ orientata con il campo normale verso l'alto. Verificare la validità del risultato utilizzando il Teorema di Stokes.

3. Studiare la convergenza della successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da

$$f_n(x) = \frac{2nx}{n^2x^2 + 1}.$$

4. Studiare la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x + k}.$$

Soluzioni

1. Per il calcolo dell'area della regione E racchiusa dall'astroide utilizziamo la formula

$$\int_E \text{div}F(x, y)dxdy = \int_\gamma F \cdot \hat{n}d\gamma$$

dove $\gamma = \partial E$ e $\hat{n}$ é la normale a γ uscente da E. Per semplicitá, prendiamo come F il campo con divergenza 1 dato da $F(x, y) = (x, 0)$; se utilizziamo la paremetrizzazione r data nel testo, la normale uscente dall'insieme sará data da

$$\hat{n}(t) = \frac{(3\sin^2 t \cos t, 3\cos^2 t \sin t)}{\|(3\sin^2 t \cos t, 3\cos^2 t \sin t)\|},$$

da cui, tenuto conto che $\|\hat{n}(t)\| = \|r'(t)\|$,

$$\begin{aligned}\text{Area}(E) &= \int_0^{2\pi} (\cos^3 t, 0) \cdot (3\sin^2 t \cos t, 3\cos^2 t \sin t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} 3\sin^2 t \cos^4 t dt = \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2(2t)\left(\frac{1 + \cos(2t)}{2}\right)dt = \frac{3\pi}{8}.\end{aligned}$$

2. Il rotore del campo dato é $\text{rot}F(x,y,z) = (-1,1,-1)$ e la superficie data é il grafico

$$z = \sqrt{R^2 - x^x - y^2}, \qquad (x,y) \in D = \{x^2 + y^2 \leq R^2\};$$

il flusso sará quindi dato da

$$\begin{aligned}
\Phi(\text{rot}F, \Sigma) &= \int_\Sigma \text{rot}F \cdot \hat{n}_\Sigma d\Sigma = \int_D (-1,1,-1) \cdot (-\nabla g(x,y), 1) dxdy \\
&= \int_D \left(-\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} + \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} - 1 \right) dxdy = -\int_D dxdy \\
&= -\text{ Area}(D) = -\pi R^2.
\end{aligned}$$

Il conto si puó anche effettuare applicando il Teorema di Stokes, cioé

$$\int_\Sigma \text{rot}F \cdot \hat{n} d\Sigma = \int_\gamma F \cdot d\vec{s},$$

dove γ é la curva che descrive il bordo di Σ, con orientazione indotta dall'orientazione di Σ. Siccome Σ é orientata con la normale verso l'alto, γ é la circonferenza di raggio R contenuta nel piano $z = 0$ orientata in senso antiorario, cioé parametrizzata dalla solita funzione

$$r(t) = (R\cos t, R\sin t, 0).$$

Otteniamo quindi che

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} F(R\cos t, R\sin t, 0) \cdot (-R\sin t, R\cos t, 0) dt \\
&= -\int_0^{2\pi} R^2 \sin^2 t dt = -\pi R^2.
\end{aligned}$$

3. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2nx}{n^2x^2 + 1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2x}{n(x^2 + 1/n^2)} = 0,$$

cioé la successione converge puntualmente a 0. Determiniamo ora gli estremi superiore ed inferiore di f_n per ogni $n \in \mathbb{N}$ fissato. Avremo che

$$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{2nx}{n^2x^2 + 1} = 0,$$

mentre

$$f_n'(x) = \frac{2n(1 - n^2x^2)}{(n^2x^2 + 1)^2}$$

che si annulla per $x = \pm 1/n$. In corrispondenza di tali punti avremo

$$f_n\left(\pm\frac{1}{n}\right) = \pm 2,$$

quindi

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = f\left(\frac{1}{n}\right) = -f\left(-\frac{1}{n}\right) = 2,$$

cioé non si ha convergenza uniforme. Chiaramente il problema si ha nei punti di massimo e minimo per f_n dati da $\pm 1/n$; tali punti tendono a zero, quindi se proviamo a considerare intervalli $I \subset \mathbb{R}$ per i quali 0 é un punto esterno, cioé per i quali esiste $a > 0$ con $I \cap (-a, a) = \emptyset$, allora avremo convergenza uniforme su I in quanto si verifica facilmente che

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x)| \leq \lim_{n\to+\infty} f_n(a) = 0.$$

4. La serie é definita per $x \geq 0$ e se poniamo $a_k = \frac{1}{x+k}$, notiamo che la successione $a_k \geq 0$ é monotona decrescente ed infinitesima. Quindi per il criterio di Leibniz, la serie converge semplicemente (ma non assolutamente) e vale la stima

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{x+k} \right| \leq \frac{1}{x+n+1} \to 0, \qquad n \to +\infty,$$

da cui si deduce la convergenza uniforme. Non si puó avere convergenza totale in nessun intervallo $I \subset \mathbb{R}$, in quanto posto $a = \inf I$ si ha che

$$\sup_{x\in I} \left| \frac{(-1)^k}{x+k} \right| = \frac{1}{a+k}$$

e la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a+k}$$

é divergente.

1. Sfruttando l'identità
$$\frac{1}{1-e^{-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt},$$
dimostrare che la funzione $t^3/(e^t - 1)$ è assolutamente integrabile in senso generalizzato in $[0, +\infty)$ e mostrare che
$$\int_0^{\infty} \frac{t^3}{e^t - 1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6}{(n+1)^4}.$$

2. Dimostrare che la funzione $\frac{\log(1+t)}{t}$ è assolutamente integrabile in $[0, 1]$ e calcolare
$$\int_0^1 \frac{\log(1+t)}{t} dt.$$

3. Scrivere la serie di Fourier della funzione $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ e studiarne la convergenza.

4. Scrivere le serie di Fourier in soli seni e in soli coseni della funzione $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ e discuterne la convergenza. Si utilizzi lo sviluppo in soli coseni per determinare le somme delle seguenti serie numeriche;
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$
Dedurre da questo il valore dell'integrale
$$\int_0^{\infty} \frac{t^3}{e^t - 1} dt.$$

Soluzioni

1. Come suggerito, si nota che per ogni $t > 0$, in quanto $e^{-t} < 1$, vale l'indentità
$$\frac{t^3}{e^t - 1} = \frac{t^3 e^{-t}}{1 - e^{-t}} = t^3 e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} t^3 \sum_{n=0} e^{-(n+1)t}.$$
Per quanto visto sulla convergenza delle serie di potenze, la serie
$$\sum_{n=0} e^{-(n+1)t}$$

converge in $(0,+\infty)$, uniformemente sui chiusi $[a,+\infty)\subset(0,+\infty)$; notiamo inoltre che tale serie viene moltiplicata per t^3 e otteniamo quindi che la successione delle somme parziali è data da

$$f_k(t)=t^3\sum_{n=0}^{k}e^{-(n+1)t}=\frac{t^3(e^{-t}-e^{-(k+2)t})}{1-e^{-t}}=\frac{t^3(1-e^{-(k+1)t})}{e^t-1}$$

converge uniformemente su $[0,+\infty)$ ad

$$f(t)=\frac{t^3}{e^t-1};$$

per vedere questo basta considerare la funzione

$$g_k(t)=f(t)-f_k(t)=\frac{t^3e^{-(k+1)t}}{e^t-1}$$

e studiarla in $(0,+\infty)$. Si nota che per ogni $a>0$, in $[0,a)$ possiamo sfruttare il fatto che $e^t-t\geq t$ da cui

$$g_k(t)\leq t^2<a^2,$$

da cui

$$\lim_{k\to+\infty}\sup_{[0,+\infty)}|g_k(t)|\leq a^2+\lim_{k\to+\infty}\sup_{[a,+\infty)}|g_k(t)|=a^2$$

grazie alla convergenza uniforme in $[a,+\infty)$. Siccome $a>0$ era arbitrario, se ne deduce la convergenza uniforme su tutto $[0,+\infty)$. Quindi ogni $R>0$, si ha

$$\int_0^R\frac{t^3}{e^t-1}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^R t^3e^{-(n+1)t}dt.$$

Si nota poi che

$$\int_0^R t^3e^{-(n+1)t}dt=\frac{6}{(n+1)^4}-\left(\frac{R^3}{(n+1)}+\frac{3R^2}{(n+1)^2}+\frac{6R}{(n+1)^3}+\frac{6}{(n+1)^4}\right)e^{-(n+1)R}.$$

Passando alla serie, otteniamo che

$$\begin{aligned}\int_0^R\frac{t^3}{e^t-1}dt=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{6}{(n+1)^4}+\\&-e^{-R}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R^3}{(n+1)}+\frac{3R^2}{(n+1)^2}+\frac{6R}{(n+1)^3}+\frac{6}{(n+1)^4}\right)e^{-nR}.\end{aligned}$$

Infine, dato che

$$\begin{aligned}0\leq&e^{-R}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R^3}{(n+1)}+\frac{3R^2}{(n+1)^2}+\frac{6R}{(n+1)^3}+\frac{6}{(n+1)^4}\right)e^{-nR}\\\leq&e^{-R}(R^3+3R^2+6R+6)\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nR}=\frac{e^{-R}(R^3+3R^2+6R+6)}{1-e^{-R}}\xrightarrow{R\to+\infty}0,\end{aligned}$$

Questo dimostra che la funzione positiva $\frac{t^3}{e^t-1}$ è integrabile in senso generalizzato su $[0, +\infty)$ e che

$$\int_o^\infty \frac{t^3}{e^t-1} dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{6}{(n+1)^4}.$$

2. Abbiamo già visto nella teoria che la funzione $\log(1+t)$ è sviluppabile in serie di Taylor

$$\log(1+t) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n}$$

e che la convergenza è uniforme in $[0, 1]$. Quindi

$$\frac{\log(1+t)}{t} = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} \frac{t^{n-1}}{n}$$

con convergenza uniforme in $[0, 1]$; possiamo quindi integrare per serie e trovare che

$$\int_0^1 \frac{\log(1+t)}{t} dt = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

3. La funzione data è definita su $[-\pi, \pi]$, simmetrico rispetto all'origine, e f è pari. Se tracciamo il grafico della sua estensione 2π–periodica, vediamo che l'estensione è continua; essa è inoltre regolare a tratti (la derivata è ± 1 con discontinuità nei punti $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$). Quindi la serie di Fourier converge totalmente, e quindi uniformemente su tutto $\mathbb{R}$ e quindi puntualmente ad $f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Per scrivere la serie, calcoliamo i coefficienti di f, considerando solo i coseni in quanto la funzione è pari;

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x dx = \pi,$$

mentre per $k \geq 1$

$$\begin{aligned} a_k =& \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi k^2} \Big((-1)^k - 1 \Big) \\ =& \begin{cases} 0 & \text{se } k = 2m \text{ pari} \\ -\dfrac{4}{\pi(2m+1)^2} & \text{se } k = 2m+1 \text{ dispari.} \end{cases} \end{aligned}$$

Se ne deduce che

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{(2m+1)^2} \cos((2m+1)x).$$

4. Fare lo sviluppo in soli coseni significa estendere pari la funzione in $[-\pi, 0]$ e poi 2π–periodica su $\mathbb{R}$. Se si traccia il grafico della funzione estesa su tutto $\mathbb{R}$ si nota che la funzione risulta continua, da cui la convergenza totale della serie di Fourier e quindi puntuale ed uniforme ad f. I coefficienti che compaiono sono solo quelli del coseno, con

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^3 dx = \frac{\pi^3}{2}$$

mentre

$$\begin{aligned} a_k =& \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^3\cos(kx)dx = \frac{6\pi}{k^2}(-1)^k - \frac{12}{\pi k^4}\Big((-1)^k - 1\Big) \\ =& \begin{cases} \frac{3\pi}{2m^2} & \text{se } k = 2m \text{ pari} \\ \\ \frac{24}{\pi(2m+1)^4} - \frac{6\pi}{(2m+1)^2} & \text{se } k = 2m+1 \text{ dispari} \end{cases} \end{aligned}$$

Ne deduciamo che

$$\begin{aligned} f(x) =& \frac{\pi^3}{2} + \frac{3\pi}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\cos(2mx) + \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{24}{\pi(2m+1)^4} - \frac{6\pi}{(2m+1)^2}\right)\cos((2m+1)x). \end{aligned} \tag{4}$$

Se valutiamo i due membri per $x = 0$ troviamo la relazione

$$0 = \frac{\pi^3}{2} + \frac{3\pi}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2} - 6\pi\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2} + \frac{24}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^4}. \tag{5}$$

Sfruttiamo ora il fatto che

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6};$$

inoltre la serie precedente può essere spezzata tra termini pari e termini dispari

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2} =& \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2m^2} + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2} \\ =& \frac{1}{4}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2} + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2} \\ =& \frac{\pi^2}{24} + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}. \end{aligned}$$

sostituendo in (5) troviamo che

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^4} = \frac{\pi^4}{16}$$

e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{16}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^4} + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^4},$$

da cui

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{15}.$$

Esercizi XI settimana
16 dicembre 2010

1. Determinare tutti i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ che soddisfano la seguente equazione
$$|z - 3 + 4i| = 5.$$

2. Dopo aver scritto il numero complesso
$$w = \frac{(1+2i)(2-3i)}{(2-i)(3+2i)}$$
in forma algebrica e polare/esponenziale, si determino le soluzioni complesse dell'equazione $z^8 = w$.

3. Dopo averne discussa esistenza ed unicità, si risolva il seguente Problema di Cauchy,
$$\begin{cases} ty'(t) + y(t) = 0 \\ y(1) = 2. \end{cases}$$
Si dica inoltre su quale intervallo $I = (a, b)$ è definita la soluzione trovata e si calcolino i limiti
$$\lim_{t\to a^+} y(t), \qquad \lim_{t\to b^-} y(t).$$

4. Si risolta il seguente problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'(t) = y(t) + t - 1 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$
Per tale problema, si costruisca inoltre la successione di funzioni $(u_h(t))_{h\in\mathbb{N}}$ che si utilizza nella dimostrazione del Teorema di esistenza ed unicità, cioè la successione
$$u_0(t) \equiv 1, \qquad u_{h+1}(t) = 1 + \int_0^t (u_h(s) + s - 1)ds,$$
verificando la convergenza di u_h alla soluzione.

Soluzioni

1. Ci sono due modi per risolvere l'esercizio; il primo, più rapido, sta nel notare che cercare i punti che soddisfano $|z-3+4i| = 5$ significa cercare i numeri complessi z che distano 5 dal punto $3 - 4i$, quindi la soluzione è la circonferenza di raggio 5 centrata in $3 - 4i$.

   Altrimenti, si tratta di scrivere $z = a+ib$ e tradurre, elevando al quadrato, l'equazione data nell'espressione
$$25 = |a + ib - 3 + 4i|^2 = |(a - 3) + i(b + 4)|^2 = (a - 3)^2 + (b + 4)^2,$$
   da cui si riconosce la circonferenza nel piano di raggio 5 centrata nel punto $(3, -4)$.

2. Anche qui abbiamo due modi; il primo è moltiplicare numeratore e denominatore per i coniugati dei membri al denominatore, cioè per $2+i$ e $3-2i$, in modo da ottenere

$$w = \frac{(1+2i)(2+i)(2-3i)(3-2i)}{(2-i)(2+i)(3+2i)(3-2i)} \frac{5i \cdot 13i}{5 \cdot 13} = -1,$$

il secondo modo è notare che $1+2i = i(2-i)$ e $2-3i = -i(3+2i)$, da cui ancora $w = -1$. Per calolare le radici ottave si scrive $w = -1 = e^{i\pi}$, da cui le soluzioni

$$z_k = e^{i\vartheta_k}, \qquad \vartheta_k = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{k}, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,$$

che definiscono i vertici di un ottagono regolare inscritto nella circonferenza di raggio 1 e con primo vertice nel punto

$$e^{i\frac{\pi}{8}} = \frac{\sqrt{2-2\sqrt{2}-i\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}+i\sqrt{2}}}{2}.$$

3. L'equazione data può essere vista sia come equazione a variabili separabili, sia come equazione lineare del primo ordine; nel caso in cui la si vede come equazione a variabili separabili, abbiamo

$$y'(t) = -\frac{1}{t}y(t),$$

da cui si vede che $a(t) = -\frac{1}{t}$ e $b(y) = y$ definite per $a : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Siccome il dato iniziale viene dato in $t_0 = 1$, il problema va risolto in $(0, +\infty)$; inoltre, l'equazione $b(y) = 0$ è risolta solo per $y = 0$, che non soddisfa la condizione iniziale. Per trovare la soluzione scriviamo quindi, dato che abbiamo un problema ai valori iniziali,

$$\int_1^t \frac{y'(s)}{y(s)} ds = - \in_1^t \frac{1}{s} ds$$

e quindi la soluzione sarà data da

$$y(t) = \frac{2}{t}.$$

Tale funzione è definita su $y : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ e si nota che

$$\lim_{t \to 0} y(t) = +\infty, \qquad \lim_{t \to +\infty} y(t) = 0.$$

4. L'equazione data è un'equazione lineare con $a(t) = 1$ e $b(t) = t - 1$, definite su tutto $\mathbb{R}$. Dato che abbiamo un problema ai dati iniziali, possiamo considerare la funzione

$$A(t) = \int_0^t a(s) ds = t,$$

da cui la soluzione che sarà data da

$$y(t) = e^t \Big(1 + \int_0^t e^{-s}(s-1) ds \Big) = e^t - t.$$

Per la seconda parte dell'esercizio, partiamo con la funzione $u_0(t) = 1$ e costruiamo

$$u_1(t) = 1 + \int_0^t \Big(u_0(s) + s - 1\Big) ds = 1 + \int_0^t s ds = 1 + \frac{t^2}{2},$$

così come

$$u_2(t) = 1 + \int_0^t \Big(u_1(s) + s - 1\Big) ds = 1 + \int_0^t \Big(s + \frac{s^2}{2}\Big) ds = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!}.$$

Iterando troveremo quindi che

$$u_{h+1}(t) = 1 + \int_0^t \Big(u_h(s) + s - 1\Big) ds = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \ldots + \frac{t^{h+2}}{(h+2)!}$$

Si riconosce quindi lo sviluppo dell'esponenziale a cui è stato tolto il termine contenente t; avremo quindi che

$$\lim_{h \to +\infty} u_h(t) = 1 + \sum_{h=2}^{\infty} \frac{t^h}{h!} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^h}{h!} - t = e^t - t.$$

Esercizi XII settimana
22 dicembre 2010

1. Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale;
$$y''(t) = (y'(t))^2 + 1.$$
2. Risolvere il seguente Problema di Cauchy;
$$\begin{cases} y''(t) = y'(t)(1 + y(t)) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$
3. Risolvere il seguente Problema di Cauchy;
$$\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = (1 + t)e^t \cos(2t) \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$
4. Trovare l'integrale generale della seguente equazione differenziale;
$$y''(t) - y(t) = \frac{1}{1 + e^t}.$$

Soluzioni

1. L'equazione data non dipende esplicitamente da y (in realtà neanche da t); possiamo quindi ridurre la complessità ponendo $v(t) = y'(t)$ in modo da ottenere l'equazione del primo ordine
$$v'(t) = v(t)^2 + 1,$$
la cui soluzione generale, in forma implicita, è data da
$$\arctan v(t) = t + c_1.$$
Tale soluzione è definita fin tanto che $t + c_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$ ed è data, esplicitamente, da
$$v(t) = \tan(t + c_1).$$
Ricordando che $v(t) = y'(t)$, integrando la soluzione trovata, ricaviamo che
$$y(t) = -\log|\cos(t + c_1)| + c_2, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. L'equazione data è di tipo autonomo in quanto non compare la variabile indipendente t; possiamo quindi porre
$$z(y) := y'(t),$$
da cui, dato che $y''(t) = \frac{d}{dt}z(y(t)) = \frac{d}{dy}z(y)y'(t) = \frac{d}{dy}z(y)z(y)$, si giunge all'equazione del primo ordine
$$\begin{cases} z(y)\frac{d}{dy}z(y) = z(y)(1+y) \\ \\ z(0) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$
dove il dato iniziale è stato ricavato ponendo $\frac{1}{2} = y'(0) = z(y(0)) = z(0)$. Siccome $z \equiv 0$ non è soluzione del problema ai valori iniziali, possiamo dividere per z ed integrare per ottenere che
$$z(y) = \frac{y^2 + 2y + 1}{2} = \frac{(y+1)^2}{2}.$$
Risolviamo ora il problema ai valori iniziali
$$\begin{cases} y'(t) = \frac{(y(t)+1)^2}{2} \\ \\ y(0) = 0; \end{cases}$$
tale problema ha per soluzione la funzione
$$y(t) = \frac{t}{2-t}$$
che sarà quindi la soluzione cercata.

3. Per risolvere il problema dato, risolviamo prima l'equazione omogenea considerando il polinomio caratteristico
$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5;$$
tale polinomio ha due radici complesse coniugate $1 \pm 2i$, da cui la soluzione generale dell'omogenea che è data da
$$y_H(t) = e^t\Big(c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t)\Big).$$
Per la ricerca della soluzione particolare, notiamo anzitutto che possiamo scrivere il termine forzante come
$$(1+t)e^t\cos(2t) = e^{1\cdot t}\Big((1+t)\cos(2\cdot t) + 0\cdot\sin(2\cdot t)\Big)$$
in cui riconosciamo la possibilità di poter applicare il metodo per somiglianza. Abbiamo $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $p_1(t) = 1+t$ polinomio di grado 1 e $q_1(t) = 0$ polinomio di grado 0. Siccome $\lambda = \alpha + i\beta = 1 + 2i$ è radice, con molteplicità 1, del polinomio caratteristico, la soluzione particolare va cercata nella forma
$$y_P(t) = te^t\Big((at+b)\cos(2t) + (ct+d)\sin(2t)\Big) = e^t\Big((at^2+bt)\cos(2t) + (ct^2+dt)\sin(2t)\Big);$$

siccome

$$y_P'(t) = e^t \Big[\cos(2t)\Big((a+2c)t^2 + (2a+b+2d)t + b\Big) + \\ + \sin(2t)\Big((c-2a)t^2 + (2c-2b+d)t + d\Big)\Big],$$

mentre

$$y_P''(t) = e^t \Big[\cos(2t)\Big((4c-3a)t^2 + (4a-3b+8c+4d)t + 2a+2b+4d\Big) + \\ + \sin(2t)\Big(-(4a+3c)t^2 - (8a+4b-4c+3d)t - 4b+2c+2d\Big)\Big]$$

Imponendo l'equazione

$$y_P''(t) - 2y_P'(t) + 5y_P(t) = (1+t)e^t\cos(2t),$$

arriviamo all'equazione

$$e^t \Big[\cos(2t)\Big(8ct + 2a + 4d\Big) + \sin(2t)\Big(-8at - 4b + 2c\Big)\Big] = e^t(1+t)\cos(2t)$$

da cui il sistema

$$\begin{cases} 8c = 1 \\ 2a + 4d = 1 \\ -8a = 0 \\ -4b + 2c = 0 \end{cases}$$

Otteniamo quindi che una soluzione particlare è data da

$$y_P(t) = e^t \left[\frac{t}{16}\cos(2t) + \Big(\frac{t^2}{8} + \frac{t}{4}\Big)\sin(2t)\right]$$

Quindi la soluzioni generale dell'equazione omogenea è data da

$$y(t) = e^t\Big(c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t)\Big) + e^t \left[\frac{t}{16}\cos(2t) + \Big(\frac{t^2}{8} + \frac{t}{4}\Big)\sin(2t)\right].$$

Infine, imponendo le condizioni iniziali, si ottengono i valori $c_1 = 1$ e $c_2 = -\frac{1}{32}$; in definitiva la soluzione del Problema di Cauchy è data da

$$y(t) = e^t \left[\Big(1 + \frac{t}{16}\Big)\cos(2t) + \Big(-\frac{1}{32} + \frac{t^2}{8} + \frac{t}{4}\Big)\sin(2t)\right].$$

4. Il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata è dato da $\lambda^2 - 1$, quindi la soluzione generale dell'omogenea è data da

$$y_H(t) = c_1e^t + c_2e^{-t}.$$

Per trovare la soluzione particolare, applichiamo il metodo della variazione delle costanti; supponiamo quindi che

$$y(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)e^{-t};$$

derivando otteniamo che

$$y'(t) = c_1'(t)e^t + c_2'(t)e^{-t} + c_1(t)e^t - c_2(t)e^{-t}.$$

Poniamo quindi la condizione

$$c_1'(t)e^t + c_2'(t)e^{-t} = 0$$

e deriviamo una seconda volta, ottenendo

$$y''(t) = c_1'(t)e^t - c_2'(t)e^{-t} + c_1(t)e^t + c_2(t)e^{-t}.$$

Impondi quindi la condizione

$$y''(t) - y(t) = \frac{1}{1+e^t}$$

si arriva all'equazione

$$c_1'(t)e^t - c_2'(t)e^{-t} = \frac{1}{1+e^t}.$$

Dobbiamo quindi risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} c_1'(t)e^t + c_2'(t)e^{-t} = 0 \\ \\ c_1'(t)e^t - c_2'(t)e^{-t} = \dfrac{1}{1+e^t} \end{cases}$$

che ha come soluzioni

$$\begin{cases} c_1'(t) = \dfrac{1}{2e^t(1+e^t)} \\ \\ c_2'(t) = -\dfrac{e^t}{2(1+e^t)}. \end{cases}$$

Integrando otteniamo

$$\begin{cases} c_1(t) = c_1 - \dfrac{t}{2} - \dfrac{e^{-t}}{2} + \dfrac{1}{2}\log(1+e^t) \\ \\ c_2(t) = c_2 - \dfrac{1}{2}\log(1+e^t). \end{cases}$$

da cui la soluzione generale dell'equazione data

$$\begin{aligned} y(t) =& c_1e^t + c_2e^{-t} - \frac{1}{2} - \frac{te^t}{2} + \Big(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\Big)\log(1+e^t) \\ =& c_1e^t + c_2e^{-t} - \frac{1}{2} - \frac{te^t}{2} + \sinh(t)\log(1+e^t). \end{aligned}$$