Capitolo 1

Derivabilità e differenziabilità

Esercizio 1.1 Utilizzando le sezioni coordinate e gli insiemi di livello, disegnare qualitativamente il grafico delle seguenti funzioni sui domini indicati:

1. $f(x, y) = x$ con $E = [0, 2] \times [0, 3]$;
2. $f(x, y) = \mathrm{sen} x$ con $E = [0, 2\pi] \times [0, 1]$;
3. $f(x, y) = y^2$ con $E = [-1, 1] \times [-1, 1]$;
4. $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ con $E = [-1, 1] \times [-1, 1]$;
5. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ con $E = \{(x, y) : x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$;
6. $f(x, y) = 4 - x^2$ con $E = \{(x, y) : y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$;
7. $f(x, y) = |x| + |y|$ con $E = \{(x, y) : y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$;
8. $f(x, y) = 6 - x - 2y$ con $E = \{(x, y) : y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Esercizio 1.2 Mediante la definizione, calolare le derivate direzionali delle seguenti funzioni:

1. $f(x, y) = x^2 - xy$;
2. $f(x, y) = (x^2 - y)e^{xy-2}$;
3. $f(x, y) = \dfrac{x}{1 + x^2 + y^2}$;
4. $f(x, y) = (x + 1)^2 - (y - 1)^2 \mathrm{sen} x$.

Esercizio 1.3 Utilizzando la definizione, calcolare le derivate parziali delle seguenti funzioni:

1. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x + y}$, $x \neq -y$;
2. $f(x, y) = (x + y^2) \ln(x - y)$, $x > y$.

Esercizio 1.4 Scrivere le derivate parziali delle seguenti funzioni e calcolarle nel punto indicato:

1. $f(x, y) = xy + x^2$, $P = (2, 0)$;
2. $f(x, y) = \text{sen}(x\sqrt{y})$, $P = (\pi/3, 4)$;
3. $f(x, y) = \arctan \dfrac{y}{x}$, $P = (-1, 1)$;
4. $f(x, y, z) = x^3 y^4 z^5$, $P = (0, -1, -1)$;
5. $f(x, y, z) = \dfrac{xy}{y+z}$, $P = (1, 1, 1)$;
6. $f(x, y, z) = \ln(1 + e^{xyz})$, $P = (2, 0, -1)$.

Esercizio 1.5 Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Esercizio 1.6 Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità della funzione definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} (xy) \log(xy) & x, y > 0 \\ \\ 0 & x, y = 0. \end{cases}$$

Esercizio 1.7 Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Esercizio 1.8 Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = xy^2.$$

Calcolare inoltre il suo gradiente nel punto $(2, 3)$ e determinare quali sono le direzioni lungo le quali le derivate direzionali della f in $(2, 3)$ sono massime e minime. Scrivere infine l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(2, 3)$ e determinare la retta normale a tale piano nel punto di tangenza.

Esercizio 1.9 Calcolare il gradiente delle seguenti funzioni, esplicitandone modulo e direzione:

1. potenziale elettrico

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad (x, y) \neq (0, 0);$$

2. “potenziale” magnetico

$$f(x,y) = \arctan\frac{x}{y}, \qquad y \neq 0.$$

Esercizio 1.10 Data la funzione $f(x,y) = \sqrt{1-2x^2-4y^2}$:

1. determinare il dominio e discutere su di esso la continuità e la differenziabilità di f;
2. calcolare le derivate direzionali in $(0,1/4)$;
3. scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nei punti $(0,\frac{1}{4})$ e $(\frac{1}{4},\frac{1}{4\sqrt{2}})$;
4. determinare gli insiemi di livello di f;
5. fissato il livello E_c con $c=\sqrt{3}/2$, determinare la direzione ortogonale ad E_c nel punto determinato da $x_0 = 1/4$ e $y_0 > 0$.

Esercizio 1.11 Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico delle seguenti funzioni nei punti indicati:

1. $f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$, in $(1,1)$ e $(2,1)$;
2. $f(x,y) = \sqrt{1-2x^2} - 4y^2$ in $(1/2,0)$ e $(-1/4,2)$.

Esercizio 1.12 Verificare la formula della derivata della funzione composta $f \circ g$ con le seguenti funzioni:

1. $f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2y)$, $g(x,y) = (xy^2, x^2+1/y)$;
2. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $g(x,y) = (e^{xy}, 1+x^2\cos y)$;
3. $f(x,y) = \arctan(y/x)$, $g(x,y) = (2x+y, 3x-y)$.

Esercizio 1.13 Verificare la formula di derivazione della funzione composta quando la funzione $f(x,y) = xy$ viene scritta in coordinate polari.

Esercizio 1.14 Determinare le rette normali al paraboloide $z = x^2+y^2-1$ passanti per il punto $(0,0,0)$; calcolare quindi l'angolo tra tali rette e l'asse x.

Esercizio 1.15 Data la funzione $f(x,y) = y^2/x$ e l'insieme $E = \{(x,y) : 2x^2+y^2 = 1\}$, verificare che in ogni punto di E la derivata di f nella direzione normale ad E è nulla.

Esercizio 1.16 Scrivere l'equazione del piano tangente e della retta normale al paraboloide

$$z = x^2+y^2$$

nel punto $(-1,2,5)$; trovare quindi i punti del paraboloide in cui il piano tangente è parallelo al piano di equazione $z = 3x+4y$ e scrivere in tali punti le equazioni del piano tangente e della retta normale.

1.1 Soluzioni

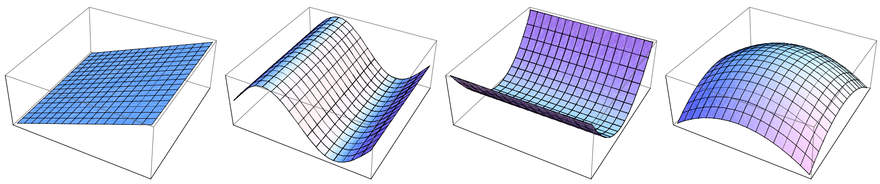
Soluzione 1.1

1. Le sezioni di f lungo x sono date dalla retta $z = x$, mentre la funzione è costante sulle sezioni lungo y. Gli insiemi di livello sono le rette verticali $x = c$. In definitiva, il grafico è riportato in Figura 1.1.

2. Le sezioni lungo x sono dalla funzione $z = \operatorname{sen} x$, mentre le sezioni lungo y sono costanti. Infine, gli insiemi di livello sono non nulli per $c \in [-1, 1]$ e sono dati dalle rette $x = \operatorname{arcsen} c + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Quindi il grafico sarà quello riportato in Figura 1.1.

3. Le sezioni lungo x sono costanti, quelle lungo y sono date dalla funzione $z = y^2$, mentre gli insiemi di livello sono non nulli per $c \geq 0$ e sono individuati dalle rette orizzontali $y = \pm\sqrt{c}$. Avremo quindi il grafico riportato in Figura 1.1.

4. Le sezioni lungo x ed y sono parabole con concavità rivolta verso il basso; i livelli sono non nulli per $c \leq 4$ e sono dati da circonferenze centrate nell'origine e di raggio $\sqrt{4 - c}$. Il grafico è riportato in Figura 1.1.



(a) x (b) $\operatorname{sen} x$ (c) y^2 (d) $4 - x^2 - y^2$

Figura 1.1: Grafici delle funzioni x, $\operatorname{sen} x$, y^2 e $4 - x^2 - y^2$.

5. Le sezioni lungo x e y sono descritte da funzioni i cui grafici sono simili ai grafici delle funzioni $\sqrt{1 + t^2}$, nel senso ad esempio la sezione lungo x è data da $|y|\sqrt{1 + x^2/y^2}$; tali sezioni sono riportate in Figura 1.2. Gli insiemi di livello invece sono non nulli per

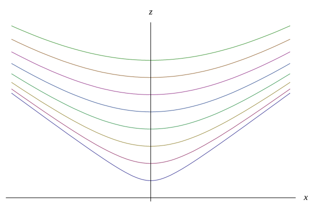


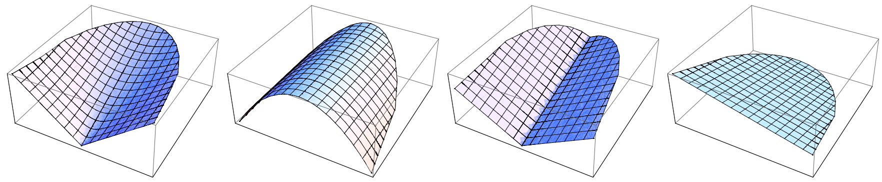
Figura 1.2: Grafici delle sezioni di f lungo x al variare di y

   $c \geq 0$ e sono circonferenze centrate nell'origine e di raggio c. Il grafico della funzione è riportato in Figura 1.3.

6. Le sezioni lungo la x sono parabole con concavità rivolta verso il basso, mentre le sezioni lungo y sono costanti. Gli insiemi di livello sono non nulli per $c \leq 4$ e sono le dati dalle rette verticali $x = \pm\sqrt{4 - c}$. Il grafico è riportato in Figura 1.3.

7. La sezione lungo la x è data dalla funzione $|x|$ a cui aggiungiamo $|y|$; analogo comportamento si ha lungo y. Infine i livelli sono non nulli per $c \geq 0$ e sono dati da quadrati di lato $c\sqrt{2}$ centrati nell'origine e ruotati di $\pi/4$. Il grafico è riportato in Figura 1.3.

8. La sezione lungo x e lungo y produce rette con inclinazione negativa; gli insiemi di livello c sono le rette $2y = 6 - x - c$. Il grafico è riportato in Figura 1.3.



(a) $\sqrt{x^2+y^2}$ (b) $4-x^2$ (c) $|x|+|y|$ (d) $6-x-2y$

Figura 1.3: Grafici delle funzioni $\sqrt{x^2+y^2}$, $4-x^2$, $|x|+|y|$ e $6-x-2y$.

Soluzione 1.2 L'esrcizio chiede di calcolare, fissato $v \in \mathbb{R}^2$, $v = (v_1, v_2)$, il limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv_1, y+tv_2) - f(x,y)}{t}.$$

1. Abbiamo che

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv_1, y+tv_2) - f(x,y)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{(x+tv_1)^2 - (x+tv_1)(y+tv_2) - x^2 + xy}{t}\\ &= \lim_{t\to 0} 2xv_1 - xv_1 2 + tv_1^2 - yv_1 - tv_1v_2\\ &= 2xv_1 - xv_2 - yv_1.\end{aligned}$$

2. Abbiamo che

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv_1, y+tv_2) - f(x,y)}{t} =\\ &= \lim_{t\to 0} \frac{((x+tv_1)^2 - y - tv_2)e^{xy+txv_2+tyv_1+t^2v_1v_2-2} - (x^2-y)e^{xy-2}}{t}\\ &= \lim_{t\to 0} (x^2-y)e^{xy-2} \frac{e^{txv_2+tyv_1+t^2v_1v_2} - 1}{t} +\\ &\quad + (tv_1^2 + 2xv_1 - v_2)e^{xy+txv_2+tyv_1+t^2v_1v_2-2}\\ &= (x^2-y)e^{xy-2}(xv_2+yv_1) + (2xv_1 - v_2)e^{xy-2}.\end{aligned}$$

3. Si ottiene

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv_1, y+tv_2) - f(x,y)}{t} =\\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{x+tv_1}{1+(x+tv_1)^2+(y+tv_2)^2} - \frac{x}{1+x^2+y^2}\right)\\ &= \lim_{t\to 0} \frac{x^2v_1 + y^2v_2 - xv_1^2t - 2x^2v_1 - xv_2^2t - 2xyv_2}{(1+(x+tv_1)^2+(y+tv_2)^2)(1+x^2+y^2)}\\ &= \frac{(x^2-2x^2)v_1 + (y^2-2xy)v_2}{(1+x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

4. Otteniamo

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0}\frac{f(x+tv_1,y+tv_2)-f(x,y)}{t}=\\
&=\lim_{t\to 0}\frac{(x+tv_1+1)^2-(y+tv_2-1)^2\mathrm{sen}(x+tv_1)-(x+1)^2+(y-1)^2\mathrm{sen}x}{t}\\
&=\lim_{t\to 0}\Big(2xv_1+2v_1-y^2\frac{\mathrm{sen}(x+tv_1)-\mathrm{sen}x}{t}+\frac{\mathrm{sen}x-\mathrm{sen}(x+tv_1)}{t}+2v_2\mathrm{sen}(x+tv_1)+\\
&\quad-2yv_2\mathrm{sen}(x+tv_1)+2y\frac{\mathrm{sen}(x+tv_1)-\mathrm{sen}x}{t}-tv_2^2\mathrm{sen}(x+tv_1)\Big)\\
&=(2x+2-y^2\cos x-\cos x+2y\cos x)v_1+(2\mathrm{sen}x-2y\mathrm{sen}x)v_2.
\end{aligned}$$

Soluzione 1.3 L'esercizio chiede di calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t,y)-f(x,y)}{t},\qquad \lim_{t\to 0}\frac{f(x,y+t)-f(x,y)}{t}.$$

1. Si ottiene che

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t,y)-f(x,y)}{t}&=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(\frac{(x+t)y}{x+y+t}-\frac{xy}{x+y}\Big)=\lim_{t\to 0}\frac{xy+y^2-xy}{(x+y+t)(x+y)}\\
&=\frac{y^2}{(x+y)^2},
\end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{f(x,y+t)-f(x,y)}{t}&=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(\frac{x(y+t)}{x+y+t}-\frac{xy}{x+y}\Big)=\lim_{t\to 0}\frac{xy+x^2-xy}{(x+y+t)(x+y)}\\
&=\frac{x^2}{(x+y)^2}.
\end{aligned}$$

2. Si ricava che

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t,y)-f(x,y)}{t}&=\lim_{t\to 0}\frac{(x+t+y^2)\ln(x+t-y)-(x+y^2)\ln(x-y)}{t}\\
&=\lim_{t\to 0}(x+y^2)\frac{\ln(x-y+t)-\ln(x-y)}{t}+\ln(x+t-y)\\
&=\frac{(x+y^2)}{x-y}+\ln(x-y),
\end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0}\frac{f(x,y+t)-f(x,y)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{(x+(y+t)^2)\ln(x-y-t)-(x+y^2)\ln(x-y)}{t}\\
&=\lim_{t\to 0}(x+y^2)\frac{\ln(x-y-t)-\ln(x-y)}{t}+2y\ln(x+t-y)+t\ln(x-y-t)\\
&=-\frac{(x+y^2)}{x-y}+2y\ln(x-y).
\end{aligned}$$

Soluzione 1.4 1. Con un calcolo diretto, si ricava

$$\nabla f(x,y) = (y+2x, x), \qquad \nabla f(2,0) = (4,2).$$

2. Otteniamo

$$\nabla f(x,y) = \left(\sqrt{y}\cos(x\sqrt{y}), \frac{x}{2\sqrt{y}}\cos(x\sqrt{y})\right), \qquad \nabla f(\pi/3,4) = (-1,-\pi/24).$$

3. Si ricava

$$\nabla f(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right), \qquad \nabla f(-1,1) = (-1/2,-1/2).$$

4. Abbiamo

$$\nabla f(x,y,z) = (3x^2y^4z^5, 4x^3y^3z^5, 5x^3y^4z^4), \qquad \nabla f(0,-1,-1) = (0,0,0).$$

5. Otteniamo

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{z}{y+z}, -\frac{xz}{(y+z)^2}, \frac{xy}{(y+z)^2}\right), \qquad \nabla f(1,1,1) = (1/2,-1/4,1/4).$$

6. Si ha

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{yze^{xyz}}{1+e^{xyz}}, \frac{xze^{xyz}}{1+e^{xyz}}, \frac{xye^{xyz}}{1+e^{xyz}}\right), \qquad \nabla f(2,0,-1) = (0,-1,0).$$

Soluzione 1.5 Come abbiamo visto nel capito sulle funzioni continue, la funzione data è continua. Per quanto riguarda la derivabilità si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Per vedere se c'è la differenziabilità, dobbiamo verificare che

$$0 = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-Df(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1-\cos hk}{(h^2+k^2)^{3/2}}.$$

Passando alle coordinate polari, otteniamo che, posto $h = \varrho\cos\theta$, $k = \varrho\sin\theta$,

$$\left|\frac{1-\cos hk}{(h^2+k^2)^{3/2}}\right| \le \frac{\varrho}{2} + o(\varrho) = g(\varrho)$$

che tende a 0 per $\varrho \to 0$. Quindi la funzione f è differenziabile in $(0,0)$. Con un calcolo diretto si può inoltre mostrare la continuità delle derivate parziali.

Soluzione 1.6 La funzione data è continua per quanto visto nel capitolo sulle funzioni continue. Per quanto riguarda la derivabilità, abbiamo che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0) = \lim_{x\to0^+}(y_0\ln xy_0) = -\infty,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) = \lim_{y\to0^+}(x_0\ln x_0y) = -\infty,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Quindi la funzione non è derivabile nei punti del tipo $(x_0, 0)$ e $(0, y_0)$, mentre lo è in $(0, 0)$. Questo vuol dire che se vogliamo studiare la differenziabilità di f, possiamo sperare di averla solo in $(0, 0)$. Scrivendo la definizione di differenziabilità, si tratta di verificare che

$$\lim_{(h,k)\to 0} \frac{hk \ln hk}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Ma questo lo si può verificare ancora passando alle coordinate polari e procedendo come in precedenza. Per quanto riguarda infine la continuità delle derivate parziali, notiamo che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \ln xy + y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \ln xy + x,$$

da cui la facile verifica della continuità delle derivate parziali.

Soluzione 1.7 La funzione è continua per quanto detto nel capitolo sulle funzioni continue. Per la derivabilità, si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \left(\sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \left(\sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

Una verifica diretta mostra la non continuità delle derivate parziali nell'origine, mentre la funzione risulta differenziabile in quanto

$$\lim_{(h,k)\to 0} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - Df(0, 0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k)\to 0} \sqrt{h^2 + k^2} \sin \frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Si noti che questo non è in contraddizione con nessun teorema visto a lezione, in quanto il teorema del differenziale totale afferma che se le derivate parziali esistono e sono continue allora la funzione è differenziabile, ma non si può dire nulla sulla continuità delle derivate parziali nel caso in cui la funzione sia differenziabile.

Soluzione 1.8 Per quanto riguarda la continuità, derivabilità e differenziabilità di tale funzione non c'è nessun problema in quanto la funzione data altro non è che un polinomio (se non si è convinti di questo fare i conti usando le definizioni). Per quanto riguarda il gradiente della funzione in $(2, 3)$, esso è dato semplicemente da

$$\nabla f(2, 3) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(2, 3), \frac{\partial f}{\partial y}(2, 3) \right) = (9, 12).$$

Per quanto riguarda l'ultima parte dell'esercizio, calcoliamo le derivate direzionali utilizzando la definizione; quindi sia $v = (v_1, v_2)$ una direzione (cioè $v_1^2 + v_2^2 = 1$), e calcoliamo

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x, y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x + tv_1, y + tv_2) - f(x, y)}{t} = y^2 v_1 + 2xyv_2.$$

In particolare, nel punto $(2,3)$ otteniamo che

$$\frac{\partial f}{\partial v}(2,3) = 9v_1 + 12v_2.$$

Per vedere quale di queste direzioni la derivata direzionale è massima o minima si tratta di trovare i massimi e minimi della funzione

$$g(v_1, v_2) = 9v_1 + 12v_2$$

sotto il vincolo $v_1^2 + v_2^2 = 1$. Tale vincolo altro non è che la circonferenza di raggio 1 che può essere descritta con un solo parametro reale, l'angolo che la direzione v forma con l'asse delle ascisse. Quindi, scrivendo in coordinate polari $v_1 = \cos\theta$, $v_2 = \sin\theta$, otteniamo la funzione di una sola varaibile reale

$$h(\theta) = 9\cos\theta + 12\sin\theta;$$

tale funzione assume massimo per $\theta = \arctan 4/3, \pi + \arctan 4/3$. In tali punti si ha $v_1 = \cos\theta = 3/5$, $v_2 = \sin\theta = 4/5$ e $v_1 = \cos\theta = -3/5$, $v_2 = \sin\theta = -4/5$. Quindi il gradiente della funzione f corrisponde al vettore con direzione la massima pendenza della derivata parziale e con modulo pari al valore massimo delle derivate parziali.

Per l'equazione dep piano tangente, usiamo la formula

$$z = f(2,3) + \nabla f(2,3) \cdot (x-2, y-3) = 9x + 12y - 36,$$

da cui il piano tangente di equazione $9x+12y-z = 36$ che è il piano ortogonale a $(9,12,-1)$ e passante per $(4,0,0)$. La retta normale sarà infine parametrizzata da

$$r(t) = (2,3,18) + t(9,12,-1) = (2+9t, 3+12t, 18-t),$$

cioè la retta

$$\begin{cases} x + 9y = 164 \\ y + 12z = 219. \end{cases}$$

Soluzione 1.9 Nel primo caso, si ha

$$\nabla f(x,y) = -\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}(x,y);$$

la direzione è data da (x,y) ma il verso è opposto (quindi il gradiente è radiale), mentre il modulo è dato da

$$\|\nabla f(x,y)\| = \frac{1}{x^2+y^2}$$

che è l'inverso del quadrato della distanza dall'origine. Nel secondo caso il gradiente è dato da

$$\nabla f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}(-y,x).$$

Quindi il modulo è dato da

$$\|\nabla f(x,y)\| = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

cioè l'inverso della distanza dall'origine, mentre la direzione è ortogonale a (x,y); il campo $\nabla f(x,y)$ si dice quindi rotazionale ed ha ad esempio la proprietà che se $\varphi(t) = (r\cos t, r\mathrm{sen} t)$,

$t \in [0, 2\pi]$, è la circonferenza di raggio r, allora l'integrale curvilineo di ∇f lungo φ (lavoro del campo magnetico) è dato da

$$\int_\varphi \nabla f \cdot d\vec{s} = -2\pi.$$

Soluzione 1.10

1. La funzione data è definita e continua per $1 - 2x^2 - 4y^2 \geq 0$, cioè all'interno dell'ellisse di equazione $2x^2 + 4y^2 = 1$ e di semi–assi $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\frac{1}{2}$. Le derivate parziali di f esistono e sono continue per $2x^2 + 4y^2 < 1$ con

$$\nabla f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2x^2 - 4y^2}}(-2x, -4y).$$

   Si può anche dimostrare che le derivate parziali non esistono nei punti $2x^2 + 4y^2 = 1$.

2. La derivata direzionale in direzione v nel punto $(0, 1/4)$ è data da

$$\frac{\partial f}{\partial v}\left(0, \frac{1}{4}\right) = \nabla f\left(0, \frac{1}{4}\right) \cdot v = \left(0, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \cdot v = -\frac{2v_2}{\sqrt{3}}.$$

3. L'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ è data da

$$z = f(x_0, y_0) - \frac{1}{\sqrt{1 - 2x_0^2 - 4y_0^2}}(2x_0, 4y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0);$$

   nel punto $(0, 1/4)$ tale equazione diventa

$$2y + \sqrt{3}z = 2,$$

   cioè il piano ortogonale al vettore $(0, 2, \sqrt{3})$ e passante per il punto $(0, 1, 0)$. Per quanto riguarda il punto $(1/4, 1/4/\sqrt{2})$ si ottinene il piano

$$x + \sqrt{6}y + \sqrt{3}z = 2,$$

   cioè il piano passante per $(2, 0, 0)$ ed ortogonale a $(1, \sqrt{6}, \sqrt{3})$.

4. Gli insiemi di livello sono determinati dai luoghi delle soluzioni delle equazioni

$$\sqrt{1 - 2x^2 - 4y^2} = c;$$

   si deve quindi avere $c \geq 0$ ed elevando al quadrato si ricava

$$2x^2 + 4y^2 = 1 - c^2,$$

   e quindi $c \leq 1$; questo significa che la funzione assume solo valori tra 0 e 1. Per $c = 1$ il livello è dato dal punto $(0, 0)$, mentre per $0 \leq c < 1$ il livello è dato dall'ellisse centrata nell'origine e di semi–assi $\frac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{2}}$ e $\frac{\sqrt{1-c^2}}{2}$.

5. Per $c = \sqrt{3}/2$ l'insieme di livello è dato dall'ellisse

$$8x^2 + 16y^2 = 1$$

di semi–assi $1/2\sqrt{2}$ e $1/4$; l'ultimo punto dell'eserczio chiede la direzione ortogonale all'ellisse nel punto $(1/4, 1/4\sqrt{2})$. Siccome il gradiente della funzione è ortogonale ai suoi livelli, tale direzione (solitamente per direzione si intende un vettore di norma 1, quindi dobbiamo normalizzare il gradiente) sarà data da

$$\nu = \frac{\nabla f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)}{\|\nabla f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)\|} = -\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

Soluzione 1.11

1. Siccome

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right),$$

la continuità delle derivate parziali implica la differenziabilità di f e quindi l'esistenza del piano tangente. Nel punto $(1, 1)$ tale piano ha equazione

$$z = f(1, 1) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot (x - 1, y - 1),$$

cioè

$$x + y - \sqrt{3}z + 1 = 0,$$

mentre in $(2, 1)$ si avrà

$$2x + y - \sqrt{6}z + 1 = 0.$$

2. Dato che

$$\nabla f(x, y) = \left(-\frac{2x}{\sqrt{1 - 2x^2}}, -8y\right),$$

le derivate sono continue per $|x| < 1/\sqrt{2}$ e quindi ivi differenziabile; il piano tangente esiste quindi in ogni punto con $|x| < 1/\sqrt{2}$ ed in $(1/2, 0)$ avrà equazione

$$\sqrt{2}x + z = \sqrt{2},$$

mentre in $(-1/4, 2)$

$$\sqrt{2}x - 16\sqrt{7}y - \sqrt{7}z + 3/\sqrt{2} + 32\sqrt{7} = 0.$$

Soluzione 1.12 L'esercizio chiede di verificare la validità dell'espressione

$$\nabla(f \circ g)(x, y) = \nabla f(g(x, y)) \cdot Dg(x, y).$$

1. Abbiamo anzitutto;

$$\nabla f(x, y) = (2xy \cos(x^2 y), x^2 \cos(x^2 y)), \qquad Dg(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ 2x & -1/y^2 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
\nabla f(g(x,y)) =& \nabla f(xy^2, x^2+1/y)\cdot Dg(x,y)\\
=& \Big(2xy^2\Big(x^2+\frac{1}{y}\Big)\cos\Big((xy^2)^2\Big(x^2+\frac{1}{y}\Big)\Big), (xy^2)^2\cos\Big((xy^2)^2\Big(x^2+\frac{1}{y}\Big)\Big)\Big).
\end{aligned}
$$

In definitiva

$$\nabla f(g(x,y))\cdot Dg(x,y) = \cos(x^4y^4+x^2y^3)(4x^3y^4+2xy^3, 4x^4y^3+3x^2y^2).$$

Se invece scriviamo

$$f(g(x,y)) = f(xy^2, x^2+1/y) = \operatorname{sen}(x^4y^4+x^2y^3),$$

si ottiene ancora

$$\nabla f(g(x,y)) = \cos(x^4y^4+x^2y^3)(4x^3y^4+2xy^3, 4x^4y^3+3x^2y^2).$$

2. Abbiamo anzitutto;

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \qquad Dg(x,y) = \begin{pmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} \\ 2x\cos y & -x^2\operatorname{sen} y \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
\nabla f(g(x,y)) =& \nabla f(e^{xy}, 1+x^2\cos y)\cdot Dg(x,y)\\
=& \frac{\big(ye^{2xy}+2x\cos y+2x^3\cos^2 y, xe^{2xy}-x^2\operatorname{sen} y - x^4\operatorname{sen} y\cos y\big)}{\sqrt{e^{2xy}+(1+x^2\cos y)^2}}.
\end{aligned}
$$

Se invece scriviamo

$$f(g(x,y)) = f(e^{xy}, 1+x^2\cos y) = \sqrt{e^{2xy}+(1+x^2\cos y)^2},$$

si ottiene ancora

$$\nabla f(g(x,y)) = \frac{\big(ye^{2xy}+2x\cos y(1+x^2\cos^2 y), xe^{2xy}-x^2\operatorname{sen} y(1+x^2\operatorname{sen} y)\big)}{\sqrt{e^{2xy}+(1+x^2\cos y)^2}}.$$

3. Abbiamo anzitutto;

$$\nabla f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}(-y,x), \qquad Dg(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
\nabla f(g(x,y)) =& \nabla f(2x+y, 3x-y)\cdot Dg(x,y)\\
=& \frac{5}{13x^2+2y^2-2xy}(-y,x).
\end{aligned}
$$

Se invece scriviamo

$$f(g(x,y)) = f(2x+y, 3x-y) = \arctan\frac{2x+y}{3x-y}$$

si ottiene ancora

$$\nabla f(g(x,y)) = \frac{5}{13x^2+2y^2-2xy}(-y,x).$$

Soluzione 1.13 Riscrivere la funzione data in coordinate polari significa effettuare il cambio di variabili $(x,y)=F(\varrho,\vartheta)=(\varrho\cos\vartheta,\varrho\mathrm{sen}\vartheta)$; si ottiene così la funzione

$$\tilde f(\varrho,\vartheta)=f(\varrho\cos\vartheta,\varrho\mathrm{sen}\vartheta)=\varrho^2\cos\vartheta\mathrm{sen}\vartheta.$$

Si ottiene quindi

$$\nabla\tilde f(\varrho,\vartheta)=(\varrho\mathrm{sen}2\vartheta,\varrho^2\cos 2\vartheta).$$

Utilizzando invece la formula per il gradiente della funzione composta

$$\tilde f(\varrho,\vartheta)=f(F(\varrho,\vartheta))$$

si ottiene invece, dato che $\nabla f(x,y)=(y,x)$

$$\begin{aligned}\nabla\tilde f(\varrho,\vartheta)=&\nabla f(F(\varrho,\vartheta))DF(\varrho,\vartheta)\\ =&(\varrho\mathrm{sen}\vartheta,\varrho\cos\vartheta)\cdot\begin{pmatrix}\cos\vartheta & -\varrho\mathrm{sen}\vartheta\\ \mathrm{sen}\vartheta & \varrho\cos\vartheta\end{pmatrix}=(\varrho\mathrm{sen}2\vartheta,\varrho^2\cos 2\vartheta)\end{aligned}$$

Soluzione 1.14 Stiamo considerando il grafico della funzione

$$f(x,y)=x^2+y^2-1;$$

il piano tangente al suo grafico è dato dall'equazione

$$z=x_0^2+y_0^2-1+(2x_0,2y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0)$$

o equivalentemente

$$-2(x_0,y_0)\cdot(x,y)+z=x_0^2+y_0^2-1-2x_0^2-2y_0^2.$$

La direzione ortogonale è quindi individuata dal vettore $(-2x_0,-2y_0,1)$; la retta normale è parametrizzata da

$$r(t)=(x_0,y_0,x_0^2+y_0^2)+t(-2x_0,-2y_0,1)=((1-2t)x_0,(1-2t)y_0,x_0^2+y_0^2-1+t).$$

Tale retta passa per l'origine al tempo t_0 per cui $r(t_0)=(0,0,0)$, determinato dalla soluzione del sistema

$$\begin{cases}(1-2t_0)x_0=0\\ (1-2t_0)y_0=0\\ x_0^2+y_0^2-1+t_0=0\end{cases}$$

che ha come soluzioni $(x_0,y_0)=(0,0)$, $t_0=1$ e $t_0=1/2$ con $x_0^2+y_0^2=1/2$, cioè i punti $1/\sqrt{2}(\cos\vartheta,\mathrm{sen}\vartheta)$ della circonferenza di raggio $1/\sqrt{2}$ centrata nell'origine. Le rette cercate sono quindi date da

$$r_1(t)=(0,0,-1)+t(0,0,1),\quad r_\vartheta(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\vartheta,\mathrm{sen}\vartheta,-1/\sqrt{2})+t(-\sqrt{2}\cos\vartheta,-\sqrt{2}\mathrm{sen}\vartheta,1).$$

L'angolo che tali rette formano con l'asse delle x è dato da

$$(0,0,1)\cdot(1,0,0)=0,\qquad \frac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{2}\cos\vartheta,-\sqrt{2}\mathrm{sen}\vartheta,1)\cdot(1,0,0)=-\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\vartheta.$$

Soluzione 1.15 Siccome E è espresso come livello zero della funzione $g(x,y) = 2x^2+y^2-1$, la direzione normale uscente da E è individuata da

$$\nu = \frac{\nabla g(x,y)}{\|g(x,y)\|} = \frac{(2x,y)}{\sqrt{4x^2+y^2}}.$$

La derivata di f in tale direzione è data da

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \nu = \frac{1}{\sqrt{4x^2+y^2}} \left(-\frac{y^2}{x^2}, \frac{2y}{x}\right) \cdot (2x,y) = 0.$$

Soluzione 1.16 Dobbiamo scrivere l'equazione del piano tangente al grafico della funzione

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

nel punto $(-1,2)$; tale piano è dato dall'equazione

$$2x - 4y + z + 5 = 0$$

che è un piano ortogonale a $(2,-4,1)$ e passante per $(0,0,-5)$. La retta normale è quindi parametrizzata da

$$r(t) = (-1,2,5) + t(2,-4,1)$$

o in forma cartesiana

$$\begin{cases} x - 2z = -11 \\ y + 4z = 22. \end{cases}$$

Per la seconda parte dell'esercizio, il piano $z = 3x+4y$ è ortogonale a $(3,4,-1)$. Cerchiamo quindi i punti in cui il vettore $(-\nabla f(x,y),1)$ è parallelo a tale vettore; risolviamo quindi l'equazione

$$\lambda(3,4,-1) = (-\nabla f(x,y),1) = (-2x,-2y,1).$$

Tale sistema ha soluzione $\lambda = -1$ e $(x,y) = (3/2,2)$; in tale punto il piano tangente ha equazione

$$12x + 16y - 4z + 25 = 0,$$

mentre la retta normale è parametrizzata da

$$r(t) = \left(\frac{3}{2}, 2, \frac{25}{4}\right) + t(3,4,-1).$$