Capitolo 1

Equazioni differenziali

Esercizio 1.1 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + \tan(x)y(x) = \dfrac{\sin(x)}{1+\sin(x)}, \\ \\ y(0) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Esercizio 1.2 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{1+2x}{\cos y} \\ \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

Esercizio 1.3 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (x + y'(x))^2 - x - y''(x) - 1; \\ \\ y(0) = 0; \\ \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

Esercizio 1.4 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$4y'(x) + y(x) = y^3(x)(x^3 - 4x).$$

Esercizio 1.5 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y^{(4)}(x) - 2y^{(3)}(x) + 2y^{(2)}(x) - 2y'(x) + y(x) = 0.$$

Esercizio 1.6 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y^{(3)}(x) = \frac{y^{(2)}(x)}{(x+1)^3}.$$

Esercizio 1.7 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y(x)y''(x) - (y'(x))^2 = y^4(x).$$

Esercizio 1.8 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$(1 + x^2)y'(x) + xy(x) = \frac{1}{(1 + x^2)}.$$

Esercizio 1.9 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{2}{x}y(x) + \frac{x+1}{x}.$$

Esercizio 1.10 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'(x)(1 - x^2) - xy(x) - xy^2(x) = 0.$$

Esercizio 1.11 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{6x} + \frac{x}{y^5(x)}.$$

Esercizio 1.12 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y(x)e^{2x} - (1 + e^{2x})y'(x) = 0.$$

Esercizio 1.13 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$e^{x+y(x)}y'(x) + x = 0.$$

Esercizio 1.14 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{x^3 + y^3(x)}{xy^2(x)}.$$

Esercizio 1.15 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{2x + y(x) - 1}{4x + 2y(x) + 5}.$$

Esercizio 1.16 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{4x - y(x) + 7}{2x + y(x) - 1}.$$

Esercizio 1.17 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = -\dfrac{x}{y'(x)} \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 1.18 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} (x+1)y''(x) - (x+2)y'(x) + x + 2 = 0 \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 1.19 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y(x)y''(x) = y^2(x)y'(x) + y'(x)^2 \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 1.20 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y(x)y''(x) - y'(x)(1 + y'(x)) = 0.$$

Esercizio 1.21 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2y'(x) + (y'(x)^2 - 6x)y''(x) = 0 \\ y'(2) = 2 \\ y(2) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 1.22 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} 1 + y(x)y''(x) - y'(x)^2 = 0 \\ y'(1) = 1 \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 1.23 Utilizzando il metodo delle variazioni delle costanti, risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy''(x) - xy'(x) = 3x^2 \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 1.24 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$2y''(x) - y'(x) - y(x) = 4xe^{2x}.$$

Esercizio 1.25 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y''(x) + y(x) = x \sin x.$$

Esercizio 1.26 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$\frac{y'(x) - y(x)}{y''(x)} = 3.$$

Esercizio 1.27 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = xe^x \cos 2x - x^2 e^x \sin 2x.$$

Esercizio 1.28 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + 4y(x) = \sin x \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 1.29 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y''(x) + y(x) = 2x \cos x \cos 2x.$$

Esercizio 1.30 Utilizzando il metodo della variazione delle costanti, risolvere la seguente equazione differenziale

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \frac{e^{-x}}{x}.$$

Esercizio 1.31 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y''(x) - 2y(x) = 4x^2 e^{x^2}.$$

Esercizio 1.32 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y^{(3)}(x) + y^{(2)}(x) = x^2 + 1 + 3xe^x.$$

Esercizio 1.33 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y^{(4)}(x) - 2y^{(3)}(x) + y^{(2)}(x) = x^3.$$

Esercizio 1.34 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{(3)}(x) + 2y^{(2)}(x) + 2y'(x) + y(x) = x \\ y(0) = y'(0) = y^{(2)}(0) = 0. \end{cases}$$

1.1 Soluzioni

Soluzione 1.1 L'equazione data è una equazione differenziale lineare a coefficienti non costanti; per trovare la soluzione usiamo quindi la formula risolutiva per questo tipo di equazione. Calcoliamo anzitutto

$$A(x) = \int \tan x dx = -\ln|\cos x|.$$

Una osservazione preliminare; la funzione $\tan x$ è definita per $x \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ Gli intervalli su cui è definita sono quindi della forma $(\pi/2 + k\pi, \pi/2 + (k+1)\pi)$ e l'unico tra questi intervalli che contiene il dato iniziale $x_0 = 0$ è $(-\pi/2, \pi/2)$. Su tale intervallo $|\cos x| = \cos x$, quindi $A(x) = -\ln\cos x$. L'integrale generale sarà quindi dato da

$$y(x) = \cos x \left(c + \int \frac{\mathrm{sen} x}{\cos x(1+\mathrm{sen} x)} dx. \right).$$

Calcoliamo quest'ultimo integrale; utilizzando la sostituzione $t = \tan x/2$ e le formule parametriche, si ottiene

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{sen} x}{\cos x(1+\mathrm{sen} x)} dx =& \int \frac{4t}{(1-t)(1+t)^3} dt \\
=& \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-t} dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+t} dt + \int \frac{1}{(1+t)^2} dt - 2 \int \frac{1}{(1+t)^3} dt \\
=& \ln \sqrt{\left| \frac{1+t}{1-t} \right|} - \frac{t}{(1+t)^2} \\
=& \ln \sqrt{\left| \frac{1+\tan x/2}{1-\tan x/2} \right|} - \frac{\tan x/2}{(1+\tan x/2)^2} \\
=& \ln \sqrt{\left| \frac{\cos x/2 + \mathrm{sen} x/2}{\cos x/2 - \mathrm{sen} x/2} \right|} - \frac{\mathrm{sen} x/2 \cos x.2}{(\cos x/2 + \mathrm{sen} x/2)^2}.
\end{aligned}$$

In definitiva la soluzione è data

$$y(x) = \frac{1}{2} \cos x \ln \frac{1+\mathrm{sen} x}{\cos x} + \frac{1}{2} \frac{\cos x}{1+\mathrm{sen} x}.$$

Soluzione 1.2 l'equazione proposta si presenta nella forma a variabili separabili, cioè

$$\cos y(x) y'(x) = 1 + 2x.$$

Integrando quindi ambo i membri tra 0 e x, si ottiene

$$\sin y(x) - \sin 0 = x + x^2,$$

da cui

$$y(x) = \arcsin(x + x^2).$$

Soluzione 1.3 Ponendo $z(x) = x + y'(x)$, l'equazione differenziale può essere riscritta nella forma

$$x + y' = (x+y')^2 - y'' - 1,$$

cioè

$$z = z^2 - z'.$$

Questa è una equazione differenziale del prim'ordine a variabili separabili, la cui soluzione è data da

$$\left| \frac{z(x)-1}{z(x)} \right| = \alpha e^{x-x_0}, \quad \alpha > 0;$$

se imponiamo le condizioni iniziali, notiamo che possiamo togliere il modulo e troviamo che $\alpha = 1/2$ e quindi

$$z(x) = \frac{2}{2 - e^x}.$$

A questo punto il problema diventa

$$\begin{cases} x + y' = \frac{2}{2-e^x} \\ \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Tale problema ha per soluzione la funzione

$$y(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(2 - e^x).$$

Soluzione 1.4 L'equazione proposta è una equazione di tipo Bernoulli; dividendo infatti l'equazione per y^3 (si noti che tale operazione è lecita se si cercano soluzioni non nulle), si ottiene

$$4y^{-3}y' + y^{-2} = x^3 - 4x,$$

da cui, ponendo $z = y^{-2}$, si ricava l'equazione

$$-2z' + z = x^3 - 4x.$$

Questa è una equazione differenziale lineare a coefficienti non costanti, la cui soluzione è data da

$$z(x) = ce^{x/2} + x^3 + 6x^2 + 20x + 40.$$

La soluzione del problema sarà quindi data da

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{ce^{x/2} + x^3 + 6x^2 + 20x + 40}}.$$

Soluzione 1.5 L'equazione data è una equazione lineare a coefficienti costanti; le soluzioni le cerchiamo quindi nella forma $y = e^{\lambda x}$. Quindi tali funzioni sono soluzioni se e solo se λ è una radice del polinomio caratteristico

$$P(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0;$$

polinomio può essere riscritto nella forma

$$P(\lambda) = (\lambda^2 + 1)(\lambda - 1)^2$$

e quindi le radici complesse sono date da $\lambda = 1$ (con molteplicità 2) e $\lambda = \pm i$. La soluzione generale sarà quindi data dalla funzione

$$y(x) = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{ix} + c_4e^{-ix}$$

con $c_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, 4$, oppure se si vogliono usare solo numeri reali

$$y(x) = c_1e^x + c_2xe^x + c_3 \sin x + c_4 \cos x, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

Soluzione 1.6 L'equazione di terzo grado assegnata può essere ridotta ad una equazione del primo ordine con la sostituzione $v = y''$, da cui

$$v' = \frac{v}{(x+1)^3}.$$

Tale equazione ha per soluzione

$$|v(x)| = \alpha e^{-1/2(x+1)^2}, \quad \alpha > 0,$$

e quindi la soluzione del problema originale diventa

$$y(x) = \pm\alpha \int_{x_0}^{t} \int_{x_0}^{\tau} e^{-1/2(\tau+1)^2} d\tau dt + c_1 + c_2.$$

Soluzione 1.7 Si noti che nell'equazione data non compare la dipendenza da x; in questo tipo di equazioni si cambia in qualche modo il punto di vista, e si vede la funzione y come variabile libera e si cerca di esprimere le varie derivate come derivate in funzione della variabile y. A tale scopo si introduce la funzione

$$z(y) = y'(x),$$

e si calcola la derivata rispetto a y di tale funzione in modo da ottenere

$$\frac{dz(y)}{dy} = \frac{dy'(x)}{dy} = \frac{dy'(x)}{dx}\frac{dx}{dy} = \frac{y''(x)}{y'(x)} = \frac{y''(x)}{z(y)},$$

e quindi si ottiene l'equazione differenziale

$$z\frac{dz}{dy} - \frac{z^2}{y} - y^3 = 0,$$

che può essere riscritta come

$$\frac{d(z^2)}{2dy} - \frac{z^2}{y} = y^3$$

otteniamo la soluzione

$$z^2(y) = y^2\left(c + y^2\right).$$

Si tratta quindi poi di risolvere l'equazione differenziale

$$(y'(x))^2 = y(x)^2\left(c + \frac{y^2}{2}\right).$$

Soluzione 1.8 L'equazione data è di tipo lineare a coefficienti non costanti, la cui soluzione è data da

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\left(c - \frac{1}{x^2 - x\sqrt{x^2+1} + 1}\right).$$

Soluzione 1.9 L'equazione data è una equazione lineare a coefficienti non costanti; applicando quindi la formula risolutiva si trova che

$$y(x) = cx^2 - \frac{2x+1}{2}.$$

Soluzione 1.10 l'equazione data è una equazione di tipo Bernoulli; con la sostituzione $z = y^{-1}$, si ottiene l'equazione lineare a coefficienti non costanti

$$z' = \frac{x}{x^2-1}z + \frac{x}{x^2-1},$$

che ha per soluzione

$$z(x) = \sqrt{|x^2-1|}\left(c + \int \frac{t}{(t^2-1)\sqrt{|t^2-1|}}dt\right),$$

che produce, a seconda dei dati iniziali, una delle seguenti due soluzioni

$$z(x) = c\sqrt{x^2-1} - 1$$

$$z(x) = c\sqrt{1-x^2} - 1.$$

Quindi la soluzione originale sarà una delle due tra

$$\frac{1}{c\sqrt{x^2-1}-1}$$

e

$$\frac{1}{c\sqrt{1-x^2}-1}$$

Soluzione 1.11 L'equazione data è di tipo Bernoulli, e quindi con la sostituzione $z = y^6$ si ottiene la soluzione

$$z(x) = \frac{1}{|x|}\left(c + \int 6t|t|dt\right).$$

Se cerchiamo la soluzione per $x > 0$, integrando e tornando alla funzione y, si ottiene

$$y(x) = \sqrt[6]{2x^2 + \frac{c}{|x|}}.$$

Soluzione 1.12 L'equazione data è a variabili separabili

$$\frac{y'}{y} = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}},$$

e quindi la soluzione è data da

$$|y(x)| = c\sqrt{e^{2x}+1}, \quad c > 0.$$

Soluzione 1.13 Riscrivendo l'equazione nella forma

$$y'e^ye^x = -x,$$

notiamo che siamo ricondotti ad una equazione a variabili separabili, la cui soluzione è data da

$$y(x) = \ln(c + (x+1)e^{-x}).$$

Soluzione 1.14 L'equazione data può essere ricondotta ad una equazione di tipo omogeneo

$$y' = \frac{1 + (y/x)^3}{(y/x)^2},$$

che con la sostituzione $y = xz$ si riconduce all'equazione a variabili separabili

$$z + xz' = \frac{1 + z^3}{z^2},$$

la cui soluzione è data da

$$z(x) = \sqrt[3]{c + 3 \ln |x|}.$$

Si tratta quindi poi di porre

$$y'(x) = xz(x) = x \sqrt[3]{c + 3 \ln |x|}.$$

Soluzione 1.15 Siamo in presenza di una equazione differenziale nella forma

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right);$$

per equazioni di questo tipo si procede come segue. Se $a\beta - b\alpha = 0$ (che vuol dire che le rette a numeratore e a denominatore sono parallele, eventualmente coincidenti), allora notando che, supponendo $a, b, \alpha, \beta \neq 0$

$$\alpha x + \beta y = \frac{\alpha}{a}\left(ax + \frac{a\beta}{\alpha}\right) = \frac{\alpha}{a}(ax + by),$$

ponendo $z = ax + by$, da cui $z' = a + by'$, si ottiene l'equazione a variabili separabili

$$\frac{z' - a}{b} = f\left(\frac{z + c}{(\alpha/az + \gamma)}\right).$$

Nel caso in cui $a\beta - b\alpha \neq 0$, significa che le due rette a numeratore e a denominatore si incontrano in un punto (x_0, y_0) dato come unica soluzione del sistema

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + c = 0 \\ \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma = 0 \end{cases}$$

(notare che la condizione data sui coefficienti implica l'invertibilità della matrice dei coefficienti di tale sistema). In tal caso si procede alla sostituzione

$$\begin{cases} \xi = x - x_0 \\ \eta = y - y_0 \end{cases}$$

e si cerca la soluzione $\eta(\xi)$ soluzione dell'equazione

$$\eta' = f\left(\frac{a\xi + b\eta}{\alpha\xi + \beta\eta}\right)$$

e questa è una equazione di tipo omogeneo.

Nel nostro caso siamo nella condizione $a\beta - b\alpha = 0$, quindi ponndo $z = 2x + y$, otteniamo l'equazione

$$z' - 2 = \frac{z-1}{2z+5}$$

la cui soluzione è data da

$$\frac{2z(x)}{5} + \frac{7}{25}\ln|5z(x) + 9| = x + c,$$

e quindi la soluzione è data nella forma implicita

$$\frac{2y(x)}{5} + \frac{7}{25}\ln|10x + 5y(x) + 9| = \frac{x}{5} + c.$$

Soluzione 1.16 Utilizzando la discussione dell'esercizio precedente, con il cambio di variabili

$$\begin{cases} \xi = x + 1 \\ \\ \eta = y - 3 \end{cases}$$

otteniamo l'equazione

$$\eta' = \frac{4\xi - \eta}{2\xi + \eta},$$

che, posto $\eta(\xi) = \xi w(\xi)$, si trova la soluzione

$$\left|\frac{w-1}{(4-w)^2}\right| = \alpha|\xi|, \quad \alpha > 0.$$

Tornando alla funzione η, abbiamo trovato che

$$|\eta(\xi) - \xi| = \alpha\left(4 - \frac{\eta(\xi)}{\xi}\right)\xi^2;$$

si ricava quindi la soluzione $y(x)$ tornando indietro con le sostituzioni.

Soluzione 1.17 L'equazione data può essere riscritta come

$$y'y'' = -x$$

o meglio ancora come

$$\frac{d(y')^2}{2dx} = -x.$$

Integrando quindi tra il punto iniziale $x_0 = 0$ e x, si ottiene che

$$\int_0^x \frac{d(y'(t))^2}{2dx}dt = -\int_0^x t dx,$$

da cui si ricava, tenendo presente che $y'(0) = 1 > 0$,

$$y'(x)^2 = 1 - x^2 \Rightarrow y'(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

La soluzione sarà quindi data da, tenendo presente che $y(0) = 1$,

$$y(x) = 1 + \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}.$$

Soluzione 1.18 Notando che nell'equazione non compare la y, si può porre $v = y'$ in modo da ottenere un'equazione lineare a coefficienti non costanti

$$\begin{cases} v' = \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) v - \frac{x+2}{x+1} \\ v(0) = 1 \end{cases}$$

la cui soluzione è data da

$$v(x) = 1.$$

La soluzione del problema iniziale sarà quindi data da

$$y(x) = x.$$

Soluzione 1.19 Nell'equazione data non compare la variabile x, quindi si può introdurre la funzione $z(y) = y'(x)$; con questa sostituzione otteniamo

$$\dot{z}(y) = \frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dy} = \frac{y''}{z},$$

si ottiene l'equazione

$$\begin{cases} \dot{z} = \frac{z}{y} + y, \\ z(1) = z(y(0)) = y'(0) = 1; \end{cases}$$

la soluzione di tale equazione è data da

$$z(y) = y^2.$$

Si tratta ora di risolvere il problema

$$\begin{cases} y'(x) = y(x)^2 \\ \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

la cui soluzione è data da

$$y(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Soluzione 1.20 Come nell'esercizio precedente, nell'equazione non compare la variabile x e quindi si pone $z(y) = y'$; si ottiene quindi che

$$|z(y) + 1| = c|y|, \quad c > 0,$$

e quindi il problema è risolto se si risolve l'equazione

$$|y' + 1| = c|y|,$$

dove la possibilità di togliere o meno il modulo dipenderà dai dati iniziali; avremo quindi le due possibili soluzioni

$$|cy(x) - 1| = \alpha e^{x}, \quad c, \alpha > 0$$

$$|cy(x) + 1| = \alpha e^{-x}, \quad c, \alpha > 0.$$

Soluzione 1.21 Siccome nell'equazione data non compare la variabile y, si può porre $v = y'$ in modo da ottenere l'equazione differenziale al prim'ordine

$$\begin{cases} v'(v^2 - 6x) + 2v = 0 \\ \\ v(2) = 2 \end{cases}$$

Notiamo che se moltiplichiamo l'equazione per v (operazione lecita in quanto v non può annullarsi mai), allora otteniamo, ponendo $z = v^2$, l'equazione

$$\begin{cases} \frac{z'}{2}(z - 6x) + 2z = 0 \\ \\ z(2) = 4 \end{cases}$$

che è una equazione omogenea la cui soluzione in forma inplicita è data

$$|z(x) - 2x|^2 = c|z|^3, \qquad c > 0.$$

Imponendo la condizione iniziale si trova $c = 0$, cioè $z(x) = 2x$, da cui $v(x) = \sqrt{2x}$. A questo punto dobbiamo risolvere $y'(x) = \sqrt{2x}$ con la condizione iniziale $y(2) = 0$, cioè

$$y(x) = \frac{1}{3}\Big(2x\sqrt{2x} - 8\Big).$$

Soluzione 1.22 Siccome nell'equazione non compare la variabile indipendente, poniamo $z(y) = y'(x)$, e quindi si ottiene l'equazione

$$\begin{cases} yzz'(y) = z^2(y) - 1 \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

Questa è un'equazione a variabili separabili con $a(y) = \frac{1}{y}$ e $b(z) = \frac{z^2-1}{z}$; la funzione b si annulla per $z = \pm 1$ e il dato iniziale è proprio $z(0) = 1$, quindi la soluzione è $z(y) = 1$. Questo porta all'equazione $y'(x) = 1$, cioè, tenendo presente che $y(0) = 0$, $y(x) = x$.

Soluzione 1.23 L'equazione può essere riscritta nella forma

$$y'' - y' = 3x;$$

la soluzione dell'omogenea è data da

$$y(x) = c_1 + c_2 e^x,$$

mentre per la soluzione particolare si trova la funzione

$$y_1(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 3x.$$

La soluzione, imponendo le condizioni iniziali, sarà quindi determinata da

$$y(x) = 4e^x - \frac{3}{2}x^2 - 3x - 3.$$

Soluzione 1.24 La soluzione dell'omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x/2};$$

per la determinazione della soluzione particolare otteniamo la funzione

$$y_1(x) = \left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25} \right) e^{2x}.$$

La soluzione generale sarà quindi data da

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x/2} + \left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25} \right) e^{2x}.$$

Soluzione 1.25 La soluzione dell'omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x;$$

per quanto riguarda la soluzione particolare si trova che

$$y_1(x) = \frac{x}{4} \sin x - \frac{x^2}{4} \cos x,$$

e quindi la soluzione generale è data da

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x + \frac{x}{4} \sin x - \frac{x^2}{4} \cos x.$$

Soluzione 1.26 L'equazione differenziale può essere riscritta nella forma

$$3y'' - y' + y = 0,$$

e quindi si tratta di una equazione differenziale del secondo ordine lineare omogenea a coefficienti costanti. Il suo polinomio caratteristico è dato da

$$P(\lambda) = 3\lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda - 1/6 - i\sqrt{11}/6)(\lambda - 1/6 + i\sqrt{11}/6);$$

la soluzione generale sarà quindi data da

$$y(x) = e^{x/6} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{11}}{6}x + c_2 \sin \frac{\sqrt{11}}{6}x \right).$$

Soluzione 1.27 La soluzione dell'equazione omogenea è data da

$$y_0(x) = e^x (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x).$$

La soluzione particolare è data da

$$y_1(x) = xe^x \left((ax^2 + bx + c) \cos 2x + (dx^2 + ex + f) \sin 2x \right).$$

La soluzione generale sarà data dalla somma delle due.

Soluzione 1.28 La soluzione dell'equazione omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x;$$

per quanto riguarda la soluzione particolare, si ottiene

$$y_1(x) = \frac{1}{3} \sin x.$$

A questo punto, imponendo le condizioni iniziali, si ottiene la soluzione

$$y(x) = \frac{1}{3} \sin 2x + \cos 2x + \frac{1}{3} \sin x.$$

Soluzione 1.29 La soluzione dell'omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x;$$

per calcolare la soluzione particolare scriviamo

$$2x \cos x \cos 2x = x \cos 3x + x \cos x,$$

e quindi applicando il principio di sovrapposizione, cioè tenendo conto che la soluzione particolare di una somma di funzioni è data dalla somma delle soluzioni particolari, si ricava che le soluzioni particolari sono date da

$$y_1(x) = \frac{x}{4} \cos x + \frac{x^2}{4} \sin x,$$

$$y_2(x) = \frac{3}{32} \sin 3x - \frac{x}{8} \cos 3x.$$

La soluzione generale sarà quindi data da

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x + \frac{x}{4} \cos x + \frac{x^2}{4} \sin x + \frac{3}{32} \sin 3x - \frac{x}{8} \cos 3x.$$

Soluzione 1.30 La soluzione dell'omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x};$$

per calcolare la soluzione generale si applica il metodo della variazione delle costanti, per ottenere la soluzione

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + x e^{-x} \ln |x| - x e^{-x}.$$

Soluzione 1.31 La soluzione dell'equazione omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x};$$

per quanto riguarda la soluzione particolare, usando il metodo della variazioni delle costanti, si trova che la soluzione generale è data da

$$y(x) = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x} + e^{x^2}.$$

Soluzione 1.32 La soluzione dell'equazione omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x},$$

mentre per il calcolo della soluzione particolare usiamo il principio di sovrapposizione delle soluzioni, e cioè utilizziamo il fatto che quando il termine forzante, la parte non omogenea dell'equazione differenziale, è somma di più funzioni, allora la soluzione particolare può essere determinata sommando le varie soluzioni particolari. Utilizzando questo principio, abbiamo che associata a $x^2 + 1$ la soluzione particolare è data da

$$y_1(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2,$$

mentre associata a $3xe^x$ la soluzione particolare è data da

$$y_2(x) = e^x \left(\frac{3}{2}x - \frac{15}{4}\right).$$

La soluzione generale sarà quindi data da

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + e^x \left(\frac{3}{2}x - \frac{15}{4}\right).$$

Soluzione 1.33 La soluzione dell'equazione omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 x e^x,$$

mentre una soluzione particolare, sarà data da

$$y_1(x) = \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + 3x^3 + 12x^2;$$

la soluzione generale sarà quindi data da

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 x e^x + \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + 3x^3 + 12x^2.$$

Soluzione 1.34 La soluzione dell'equazione omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 e^{-x} + e^{-x/2} \left(c_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

mentre la soluzione particolare è data da $y_1 = x - 2$. Imponendo infine le condizioni iniziali, si trova che la soluzione è data dalla funzione

$$y(x) = e^{-x} + e^{-x/2} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + x - 2.$$