

Capitolo 1

Integrali multipli

Esercizio 1.1 Integrare la funzione $f(x, y) = y(x^2 + \operatorname{sen}x) + e^x$ sull'insieme $Q = [0, \pi] \times [0, 3]$.

Esercizio 1.2 Calcolare

$$\int_E (x^2 + y) dx dy$$

dove $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x^2, 0 \leq x \leq 2\}$.

Esercizio 1.3 Calcolare l'integrale

$$\int_E (x^2 - 3y^2) \operatorname{sen}(xy) dx dy$$

dove $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq -3, y \leq 3, y \geq x\}$.

Esercizio 1.4 Calcolare

$$\int_E \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy$$

dove $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, x^2/2 \leq y \leq x^2\}$.

Esercizio 1.5 Calcolare

$$\int_E x dx dy$$

dove $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x^2 + y^2 \geq 1, 0 \leq y \leq 1, x \geq 0\}$.

Esercizio 1.6 Calcolare l'integrale

$$\int_E x^3 y^5 dx dy$$

dove $E = E_1 \cup E_2$ con

$$E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq x^2\}$$

$$E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}.$$

Esercizio 1.7 Calcolare

$$\int_E \frac{xy^2}{x^2 + y^2} dx dy$$

dove $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$.

Esercizio 1.8 Calcolare

$$\int_E \frac{\tan(x+y)}{x+y} dx dy$$

dove $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x + y \leq 1, x, y \geq 0\}$.

Esercizio 1.9 Calcolare

$$\int_E (x+y) dx dy$$

dove $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 2x, 1 \leq xy \leq 2\}$.

Esercizio 1.10 Calcolare

$$\int_E x^2(y-x^3)e^{y+x^3} dx dy$$

dove $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 \leq y \leq 3, x \geq 1\}$.

Esercizio 1.11 Calcolare

$$\int_E \frac{3}{x^2 y^2} dx dy$$

dove $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1/x, x \leq y \leq 4x\}$.

Esercizio 1.12 Calcolare area e volume della palla centrata nell'origine e di raggio $r > 0$.

Esercizio 1.13 Determinare per quali valori del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$ risultano integrabili sulla palla centrata nell'origine e di raggio $r > 0$ le funzioni:

1. $f(x, y) = (x^2 + y^2)^\alpha$ nel piano;
2. $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^\alpha$ nello spazio.

Determinare infine il loro integrale.

Esercizio 1.14 Calcolare

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$$

(Suggerimento; si consideri $f(x, y) = \operatorname{sen} x e^{-xy}$ e la si integri su $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$).

Esercizio 1.15 Calcolare l'area della regione E compresa tra le curve

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x = 0 \\ \varrho^2 = 2 \cos 2\vartheta, \quad \vartheta \in [-\pi/4, \pi/4]. \end{cases}$$

Esercizio 1.16 Trovare il volume del tetraedro T di vertici $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

Esercizio 1.17 Determinare il volume dell'intersezione dei due cilindri

$$C_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad C_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Esercizio 1.18 Determinare il volume del toro di raggio R ottenuto ruotando una circonferenza di raggio r .

Esercizio 1.19 Determinare il volume del solido

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 9(1 - \sqrt{x^2 + z^2})^2 + 4y^2 \leq 1\}.$$

Esercizio 1.20 Calcolare il volume del solido

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 - 2 \leq z \leq 4 - x - y\}.$$

Esercizio 1.21 Calcolare

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx.$$

(Suggerimento: calcolare in \mathbb{R}^2 l'integrale di $e^{-x^2-y^2}$).

Esercizio 1.22 Determinare l'area dell'ellisse racchiusa dalla curva

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

ed il volume dell'elissoide racchiuso dalla superficie

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$$

Esercizio 1.23 Determinare il volume della regione interna sia alla superficie sferica

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$$

che alla superficie cilindrica

$$x^2 + (y - a)^2 = a^2.$$

Esercizio 1.24 Nell'integrale

$$\int_{-1}^1 dx \int_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy$$

si scambi l'ordine di integrazione, cioè si lasci libera la variabile y e si scriva x in dipendenza da y .

Esercizio 1.25 Calcolare il volume della porzione di cono ($\alpha > 0$)

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \alpha(x^2 + y^2) \leq z^2, 0 \leq z \leq h\}$$

Esercizio 1.26 Si calcoli l'integrale

$$\int_E \frac{x^2}{x^2 + z^2} dx dy dz$$

dove

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, x^2 - y^2 + z^2 \leq 0, y \geq 0\}.$$

Esercizio 1.27 Calcolare, se esiste, l'integrale

$$\int_E f(x, y) dx dy$$

dove

$$f(x, y) = \operatorname{sen} \frac{\pi x}{x+y}, \quad E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 2x, 0 < x+y \leq 2\}.$$

Esercizio 1.28 Calcolare il seguente integrale

$$\int_{\{x^2+y^2+z^2 \leq 1\}} \operatorname{sen}(x+y+z) dx dy dz.$$

Esercizio 1.29 Calcolare il seguente integrale

$$\int_E e^{\frac{x+y}{\sqrt{z}}} dx dy dz$$

dove

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

Esercizio 1.30 Calcolare volume e baricentro dell'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{xy}\}.$$

Esercizio 1.31 Calcolare il momento di inerzia rispetto all'asse x di una lamina omogenea nello spazio descritta dall'insieme dei punti

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, x \in [0, \pi], 0 \leq y \leq \operatorname{sen} x\}.$$

1.1 Soluzioni

Soluzione 1.1 Essendo il dominio un rettangolo si può scrivere

$$\int_Q f(x, y) dx dy = \int_0^\pi \left(\int_0^3 f(x, y) dy \right) dx = \int_0^3 \left(\int_0^\pi f(x, y) dx \right) dy$$

e integrare indifferentemente prima rispetto ad una variabile e poi rispetto all'altra. Scegliamo di integrare prima rispetto alla variabile y :

$$\begin{aligned} \int_Q f(x, y) dx dy &= \int_0^\pi \left(\int_0^3 [y(x^2 + \operatorname{sen} x) + e^x] dy \right) dx \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{y^2 x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \operatorname{sen} x + y e^x \right) \Big|_0^3 dx \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{9x^2}{2} + \frac{9}{2} \operatorname{sen} x + 3e^x \right) dx \\ &= \left(\frac{9x^3}{6} - \frac{9}{2} \cos x + 3e^x \right) \Big|_0^\pi \\ &= \frac{3\pi^3}{2} + 6 + 3e^\pi. \end{aligned}$$

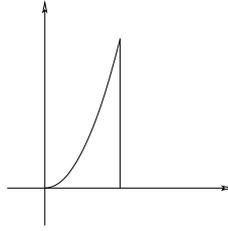


Figura 1.1:

Soluzione 1.2 L'insieme E è quello rappresentato in Figura 1.1. Scegliendo x come variabile libera si può scrivere l'integrale

$$\int_0^2 dx \left(\int_0^{x^2} (x^2 + y) dy \right)$$

che diventa

$$\int_0^2 dx \left(x^2 y + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=0}^{y=x^2} = \int_0^2 \frac{3}{2} x^4 dx = \frac{48}{5}.$$

Scegliendo y come variabile libera l'integrale diventa (svolgerlo per esercizio)

$$\int_0^4 dy \left(\int_{\sqrt{y}}^2 (x^2 + y) dx \right).$$

Soluzione 1.3 Il dominio di integrazione è normale rispetto ad entrambe le variabili; scrivendo

$$\int_E (x^2 - 3y^2) \text{sen}(xy) dx dy = \int_E x^2 \text{sen}(xy) dx dy - 3 \int_E y^2 \text{sen}(xy) dx dy$$

conviene tenere nel primo integrale come variabile libera la x , mentre nel secondo conviene tenere come variabile libera la y ; quindi

$$\begin{aligned} \int_E (x^2 - 3y^2) \text{sen}(xy) dx dy &= \int_{-3}^3 x^2 \int_x^3 \text{sen}(xy) dy dx + \\ &\quad - 3 \int_{-3}^3 y^2 \int_{-3}^y \text{sen}(xy) dx dy \\ &= \int_{-3}^3 (x \cos x^2 - x \cos 3x) dx + \\ &\quad - 3 \int_{-3}^3 (y \cos 3y - y \cos y^2) dy = 0, \end{aligned}$$

in quanto integrali di funzioni dispari su intervalli simmetrici rispetto all'origine.

Soluzione 1.4 Scegliendo x come variabile libera, l'integrale diventa

$$\begin{aligned} \int_E \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy &= \int_1^2 \left(\int_{x^2/2}^{x^2} \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right) dx \\ &= \int_1^2 (\arctan x - \arctan x/2) dx \\ &= \left[x (\arctan x - \arctan x/2) + \log \left(\frac{x^2 + 4}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \right]_1^2 \\ &= 2 \arctan 2 - \frac{3}{4}\pi + \arctan \frac{1}{2} + \log \frac{8}{5} \sqrt{\frac{2}{5}}. \end{aligned}$$

Soluzione 1.5 Se scegliamo x come variabile libera dobbiamo spezzare in tre l'integrale (in tre insiemi come indicato in Figura 1.2). Conviene quindi scegliere y come variabile libera:

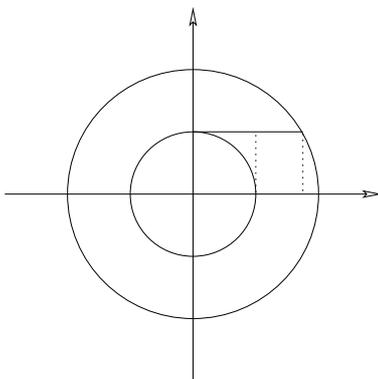


Figura 1.2:

$$\begin{aligned} \int_E f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} x dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} (4 - y^2 - (1 - y^2)) dy = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Soluzione 1.6 Notiamo anzitutto che la funzione integranda è dispari rispetto ad entrambe le variabile, inoltre il dominio E_1 è simmetrico rispetto all'asse y mentre E_2 è simmetrico rispetto all'asse x , quindi

$$\int_E x^3 y^5 dx dy = \int_{E_1} x^3 y^5 dx dy + \int_{E_2} x^3 y^5 dx dy = 0.$$

Soluzione 1.7 L'insieme di integrazione non è normale rispetto a nessuna delle due variabili; notiamo però che se passiamo alle coordinate polari, esso diventa, nelle variabili ρ e ϑ ,

il rettangolo $[1, \sqrt{2}] \times [\pi/4, 5\pi/4]$. Otteniamo quindi che

$$\begin{aligned} \int_E \frac{xy^2}{x^2 + y^2} dx dy &= \int_{[1, \sqrt{2}] \times [\pi/4, 5\pi/4]} \frac{\rho \cos \vartheta \rho^2 \sin^2 \vartheta}{\rho^2} \rho d\rho d\vartheta \\ &= \int_1^{\sqrt{2}} \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \rho^2 \cos \vartheta \sin^2 \vartheta d\vartheta d\rho \\ &= \frac{\sqrt{2} - 4}{18}. \end{aligned}$$

Soluzione 1.8 Notiamo che il dominio di integrazione è normale rispetto ad entrambe le variabili, però la funzione integranda $\tan t/t$ non ammette primitiva; proviamo quindi ad effettuare. Cerchiamo un cambio di variabili tale che la matrice del cambiamento di coordinate abbia determinante 1; un possibile cambio di variabili di questo tipo si può ottenere ponendo $u = x + y$, $v = x$. Nelle variabili (u, v) l'insieme E diventa

$$\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u \leq 1, 0 < v < u\},$$

e quindi

$$\begin{aligned} \int_E \frac{\tan(x+y)}{x+y} dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^u \frac{\tan u}{u} dv \right) du = \int_0^1 \tan u du \\ &= -\log \cos 1. \end{aligned}$$

Soluzione 1.9 L'insieme E è quello in Figura 1.3. Si può svolgere il calcolo in coordinate

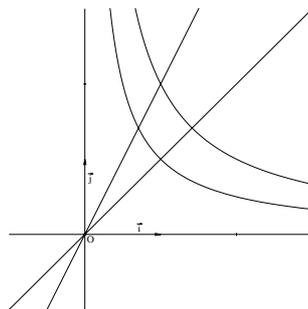


Figura 1.3:

cartesiane, ma è più semplice effettuare il cambio di coordinate

$$u = xy, \quad v = \frac{y}{x}$$

da cui si ricava che

$$x = \sqrt{\frac{u}{v}}, \quad y = \sqrt{uv}.$$

Lo jacobiano di tale trasformazione è dato da $1/2v$ per cui si ottiene

$$\int_1^2 dv \int_1^2 du \left(\sqrt{uv} + \sqrt{\frac{u}{v}} \right) \frac{1}{2v}$$

che, svolto, dà il risultato.

Soluzione 1.10 Se effettuiamo la sostituzione $u = y - x^3$, $v = y + x^3$, notiamo che la funzione $F(x, y) = (y - x^3, y + x^3)$ è una applicazione differenziabile con

$$|\det DF(x, y)| = \left| \det \begin{pmatrix} 3x^2 & 1 \\ -3x^2 & 1 \end{pmatrix} \right| = 6x^2,$$

e quindi eccettuato i punti in cui $x = 0$, la funzione F è un diffeomorfismo. Notiamo che sull'insieme E si ha $x \geq 1$, e quindi possiamo applicare la formula di cambiamento di variabili, tenendo presente che nelle variabili (u, v) l'insieme E diventa

$$\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq u \leq 1, u + 4 \leq v \leq 6 - u\},$$

$$\begin{aligned} \int_E x^2(y - x^3)e^{y+x^3} dx dy &= \frac{1}{6} \int_E |\det DF(x, y)|(y - x^3)e^{y+x^3} dx dy \\ &= \frac{1}{6} \int_0^1 \left(\int_{u+4}^{6-u} ue^v dv \right) du \\ &= -\frac{e^5 + e^4}{6}. \end{aligned}$$

Soluzione 1.11 Passando alle coordinate polari, l'insieme E diventa

$$\{(\vartheta, \rho) \in \mathbb{R}^2 \mid \pi/4 \leq \vartheta \leq \arctan 4, \rho \geq 1/\sqrt{\cos \vartheta \sin \vartheta}\};$$

quindi l'integrale diventa

$$\begin{aligned} \int_E \frac{3}{x^2 y^2} dx dy &= \int_{\pi/4}^{\arctan 4} d\vartheta \int_{1/\sqrt{\sin \vartheta \cos \vartheta}}^{\infty} \frac{3}{\rho^4 \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta} \rho d\rho \\ &= \frac{3}{2} \int_{\pi/4}^{\arctan 4} \frac{1}{\sin \vartheta \cos \vartheta} d\vartheta \\ &= 3 \log 2. \end{aligned}$$

Soluzione 1.12 Iniziamo con la palla nel piano; l'insieme è dato da $\{x^2 + y^2 \leq r^2\}$; passando quindi alle coordinate polari, si ottiene che

$$\text{Area}(\overline{B}_r(0)) = \int_{\overline{B}_r(0)} dx dy = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^r \rho d\rho = \pi r^2.$$

Nello spazio, utilizzeremo invece le coordinate sferiche per ottenere

$$\text{Vol}(\overline{B}_r(0)) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^\pi d\varphi \int_0^r \rho^2 \sin \varphi d\rho = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Soluzione 1.13 La funzione ha per $\alpha < 0$ una singolarità nell'origine, quindi dobbiamo utilizzare la teoria degli integrali generalizzati. Possiamo considerare come insiemi invadenti gli insiemi $E_h = \overline{B}_r(0) \setminus B_{1/h}(0)$. Nel caso della prima funzione, passando alle coordinate polari otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{E_h} (x^2 + y^2)^\alpha dx dy &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{1/h}^r \rho^{2\alpha} \rho d\rho = 2\pi \int_{1/h}^r \rho^{2\alpha+1} d\rho \\ &= \begin{cases} \frac{\pi}{\alpha+1} (r^{2\alpha+2} - h^{-2\alpha-2}) & \alpha \neq -1 \\ 2\pi(\ln r + \ln h) & \alpha = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

La funzione sarà quindi integrabile per $\alpha > -1$ e l'integrale vale

$$\int_{\overline{B_r(0)}} f(x, y) dx dy = \frac{\pi r^{2\alpha+2}}{\alpha+1}.$$

Nella dimensione tre, si passa alle coordinate sferiche e si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{E_h} (x^2 + y^2 + z^2)^\alpha dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^\pi d\varphi \int_{1/h}^r \varrho^{2\alpha} \varrho^2 \sin\varphi d\varrho \\ &= \begin{cases} \frac{4\pi}{2\alpha+3} (r^{2\alpha+3} - h^{-2\alpha-3}) & \alpha \neq -\frac{3}{2} \\ 4\pi(\ln r + \ln h) & \alpha = -\frac{3}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi la funzione è integrabile se e solo se $\alpha > -3/2$ e

$$\int_{\overline{B_r(0)}} f(x, y, z) dx dy dz = \frac{4\pi}{2\alpha+3} r^{2\alpha+3}.$$

Soluzione 1.14 Se integriamo la funzione $f(x, y) = \operatorname{sen} x e^{-xy}$ su $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$ prima rispetto a y otteniamo

$$\int_{[0, +\infty) \times [0, +\infty)} f(x, y) dy dx = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx,$$

mentre se integriamo prima rispetto a x si ottiene

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x e^{-xy} dx dy = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2} dy = \frac{\pi}{2},$$

da cui si ricava che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Soluzione 1.15 Riscrivendo la prima curva, che è una circonferenza centrata in $(1/2, 0)$ e raggio $1/2$, in coordinate polari, abbiamo che essa è descritta dall'equazione

$$\rho = \cos \vartheta, \vartheta \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Notando a questo punto che il dominio S di cui si vuole calcolare l'area è simmetrico rispetto all'asse x (si veda la figura (1.4)), la sua area sarà data da

$$\operatorname{Area}(S) = 2\operatorname{Area}(S'),$$

dove S' è individuata, nelle coordinate polari, da $0 \leq \vartheta \leq \pi/4$. Cerchiamo anzitutto l'angolo ϑ_0 per il quale le due curve si incontrano; esso sarà individuato dalla condizione

$$\cos^2 \vartheta = 2 \cos 2\vartheta,$$

che ha come soluzione

$$\operatorname{sen} \vartheta_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos \vartheta_0 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

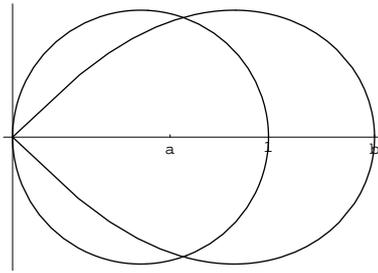


Figura 1.4:

L'area di S' sarà quindi data da

$$\begin{aligned}
 \text{Area}(S') &= \int_{S'} dx dy = \int_{S'} \rho d\rho d\vartheta \\
 &= \int_0^{\vartheta_0} d\vartheta \int_0^{\cos \vartheta} \rho d\rho + \int_{\vartheta_0}^{\pi/4} d\vartheta \int_0^{\sqrt{2 \cos 2\vartheta}} \rho d\rho \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{8} + \frac{\pi}{16} - \frac{\vartheta_0}{4}.
 \end{aligned}$$

In definitiva

$$\text{Area}(S) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8} - \frac{\vartheta_0}{2}.$$

Soluzione 1.16 Il tetraedro è il solido delimitato dai quattro piani $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$ e rappresentato in Figura 1.5. Per calcolare il volume di un solido S (e

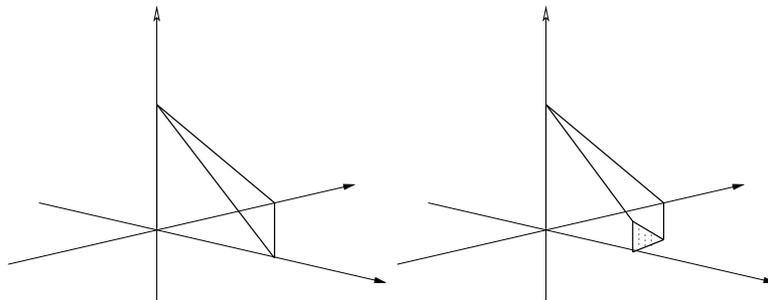


Figura 1.5:

in generale la misura n -dimensionale di un aperto in \mathbb{R}^n) si può calcolare l'integrale della funzione 1 sull'insieme S . Per cui valutiamo

$$\int_T dx dy dz.$$

Scegliendo x come variabile libera si hanno le limitazioni $0 \leq x \leq 1$. Per x fissato ora esprimiamo gli estremi per y e z (si veda il secondo disegno in Figura 1.5). Scegliendo y si

ottiene $0 \leq y \leq 1 - x$ e infine $0 \leq z \leq 1 - x - y$. Quindi

$$\begin{aligned} \text{Vol}(T) &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy(1-x-y) \\ &= \int_0^1 dx (y - xy - y^2/2) \Big|_{y=0}^{y=1-x} \\ &= \int_0^1 \left[1 - 2x + x^2 - \frac{x^2 - 2x + 1}{2} \right] dx = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Soluzione 1.17 Chiamando V il solido dato dall'intersezione di C_1 e C_2 si ha

$$\int_V dx dy dz = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dz = \frac{16}{3}.$$

Soluzione 1.18 Il toro è una figura la cui superficie può essere ottenuta ruotando una circonferenza di raggio r su una circonferenza di raggio R ortogonale alla prima, $0 < r < R$ per ottenere una figura come quella a sinistra in Figura 1.6. In generale per calcolare il

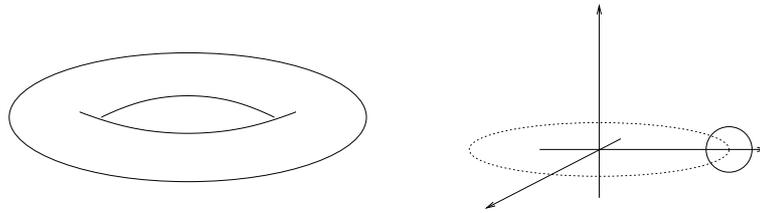


Figura 1.6:

volume di un solido di rotazione, cioè un solido la cui superficie si ottiene ruotando una curva $(z, f(z))$ nel piano con $f > 0$ (si veda la Figura 1.7), si possono usare le coordinate cilindriche. Considerando $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \geq 0$, e il solido ottenuto ruotando il grafico di f ,

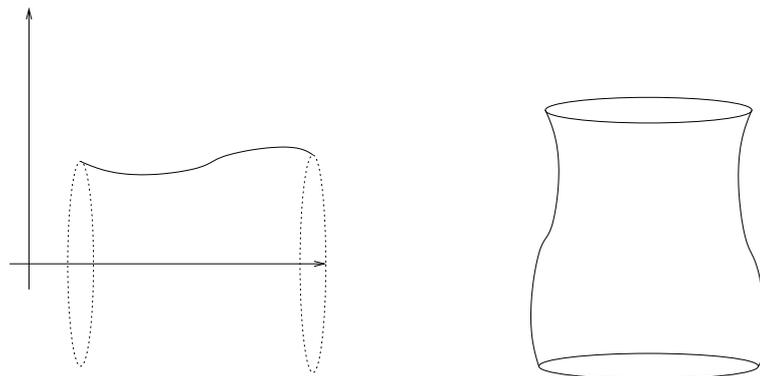


Figura 1.7:

descriviamo il solido con le coordinate

$$(\rho, \vartheta, z) \mapsto (\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta, z)$$

il cui jacobiano è ρ . Se denotiamo con S il solido, integrando si ha

$$\text{Vol}(S) = \int_a^b dz \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{f(z)} \rho d\rho = \pi \int_a^b f^2(z) dz.$$

Per calcolare il volume del toro consideriamo quindi le funzioni $f(z) = \sqrt{r^2 - z^2} + R$ e $g(z) = -\sqrt{r^2 - z^2}$ definite tra $-r$ e r valutando prima l'integrale di f^2 al quale sottraiamo l'integrale di g^2 . Si ha quindi

$$\pi \int_{-r}^r [f^2(z) - g^2(z)] dz = 4R\pi^2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - z^2} dz.$$

Si noti che l'integrale da calcolare fornisce l'area del semicerchio, per cui il volume del toro è dato da

$$4R\pi \frac{\pi r^2}{2} = 2\pi^2 R r^2.$$

Il risultato può essere interpretato come il prodotto dell'area del cerchio piccolo πr^2 moltiplicata per la lunghezza della circonferenza grande $2\pi R$.

Soluzione 1.19 L'insieme dato è invariante per rotazioni attorno all'asse y , quindi possiamo provare a passare alle coordinate cilindriche con asse lungo l'asse y , cioè

$$\begin{cases} x = \varrho \cos \vartheta \\ y = t \\ z = \varrho \sin \vartheta. \end{cases}$$

In queste nuove coordinate l'insieme E risulta essere determinato da

$$\left\{ (\vartheta, \varrho, t) \in [0, 2\pi) \times \mathbb{R}^2 \mid -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}, 1 - \frac{\sqrt{1-4t^2}}{3} \leq \varrho \leq 1 + \frac{\sqrt{1-4t^2}}{3} \right\}.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} \text{Vol}(E) &= \int_E dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{-1/2}^{1/2} dt \int_{1 - \frac{\sqrt{1-4t^2}}{3}}^{1 + \frac{\sqrt{1-4t^2}}{3}} \varrho d\varrho \\ &= \frac{4\pi}{3} \int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{1-4t^2} dt = \frac{\pi^2}{3}. \end{aligned}$$

Soluzione 1.20 L'insieme di \mathbb{R}^3 $x^2 + y^2 \leq 1$ rappresenta un cilindro centrato nell'origine e raggio 1, avente l'asse z come asse di rotazione. Si chiede pertanto di calcolare il volume della porzione di questo cilindro compreso tra il paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2 - 2$ ed il piano $z = 4 - x - y$; otteniamo quindi, dato che per tutti i punti (x, y) per i quali $x^2 + y^2 \leq 1$ vale la condizione $x^2 + y^2 - 2 \leq 4 - x - y$,

$$\text{Vol}(E) = \int_E dx dy dz = \int_B dx dy \int_{x^2+y^2-2}^{4-x-y} dz = \int_B (6 - x - y - x^2 - y^2) dx dy.$$

Quest'ultimo integrale può infine essere calcolato utilizzando le coordinate polari:

$$\text{Vol}(E) = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 (6 - \varrho \cos \vartheta - \varrho \sin \vartheta - \varrho^2) \varrho d\varrho = \frac{11}{2}\pi.$$

Soluzione 1.21 La funzione $f(x) = e^{-x^2}$ non ammette un'esplicita primitiva. Per calcolare quest'integrale usiamo un trucco: passiamo attraverso un integrale in \mathbb{R}^2 . Valutiamo

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

Usando le coordinate polari, il cui jacobiano è ρ , otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho = \pi.$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \int_{\mathbb{R}} dx \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2-y^2} dy \right) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} dx \left(e^{-x^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy \right) = \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt \right)^2 \end{aligned}$$

da cui si conclude che $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ e più in generale

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = (\pi)^{n/2}.$$

Soluzione 1.22 Uso le coordinate polari modificate che possiamo chiamare coordinate ellittiche

$$(\rho, \vartheta) \mapsto (a\rho \cos \vartheta, b\rho \sin \vartheta)$$

che ha jacobiano $ab\rho$. L'area diventa

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \rho ab d\rho = \pi ab.$$

In altro modo, si può fare il cambio di variabili

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b} \right)$$

in modo che l'ellisse data venga trasformata nel cerchio unitario; il determinante della matrice Jacobiana di tale cambiamento di variabili è dato da $\frac{1}{ab}$, e quindi

$$\text{Area}(E) = \int_E dx dy = ab \int_E \frac{1}{ab} dx dy = ab \text{Area}(B_1(0)) = \pi ab.$$

Per l'ellissoide possiamo considerare il cambio di variabili

$$(x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c} \right)$$

che trasforma l'ellissoide nella palla unitaria. Il determinante della matrice Jacobiana è $\frac{1}{abc}$ e quindi

$$\text{Vol}(E) = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Soluzione 1.23 Sfruttando la simmetria sia rispetto al piano x, y che rispetto al piano y, z il volume del solido risulta essere quattro volte il volume del solido delimitato inoltre dalle condizioni $x > 0$ e $z > 0$.

A questo punto usiamo le coordinate cilindriche con asse lungo l'asse z e centrate nell'origine: il cilindro è determinato dall'equazione

$$\rho^2 \cos^2 \vartheta + (\rho \sin \vartheta - a)^2 = a^2$$

che equivalentemente può essere scritto come

$$\rho(\rho - 2a \sin \vartheta) = 0$$

che ha soluzioni $\rho = 0$ e $\rho = 2a \sin \vartheta$. Quindi le limitazioni per le variabili sono

$$0 \leq \vartheta \leq \pi/2, \quad 0 \leq \rho \leq 2a \sin \vartheta.$$

Infine da $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ si ricava $z^2 = 4a^2 - \rho^2$ da cui le limitazioni sulla z diventano

$$0 \leq z \leq \sqrt{4a^2 - \rho^2}.$$

Quindi il volume è dato da

$$V = 4 \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{2a \sin \vartheta} d\rho \int_0^{\sqrt{4a^2 - \rho^2}} \rho dz$$

che fornisce, usando il fatto che per $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$ $\sqrt{1 - \sin^2 \vartheta} = \cos \vartheta$, il seguente risultato

$$V = \frac{16}{9}(3\pi - 4)a^3.$$

Soluzione 1.24 L'insieme delimitato dagli estremi -1 e 1 per la variabile x e $|x| \leq \sqrt{2 - x^2}$ per la variabile y è quello in Figura 1.8. Quindi l'integrale diventa

$$\int_0^1 dy \int_{-y}^y f(x, y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx.$$

Soluzione 1.25 Uso le coordinate cilindriche

$$\int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{z/\sqrt{\alpha}} \rho d\rho = \frac{h^3 \pi}{3\alpha}.$$

Provare alternativamente ad usare la formula per i solidi di rotazione.

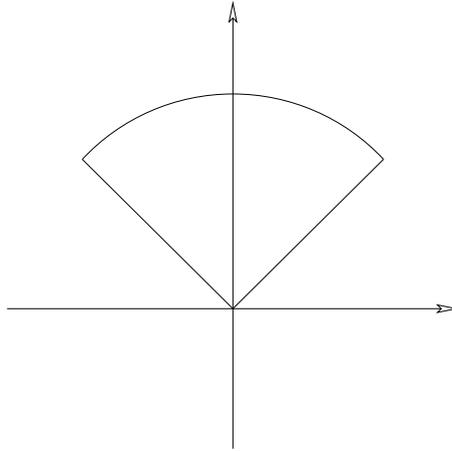


Figura 1.8:

Soluzione 1.26 Utilizziamo le coordinate cilindriche

$$x = \rho \cos \vartheta, \quad y = t, \quad z = \rho \sin \vartheta,$$

con $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, $0 \leq \rho \leq 1$ e $\rho \leq t \leq \sqrt{2 - \rho^2}$. L'integrale diventa

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 d\rho \int_\rho^{\sqrt{2-\rho^2}} \left(\rho \frac{\rho^2 \cos^2 \vartheta}{\rho^2} \right) dt = (2\sqrt{2} - 2) \frac{\pi}{3}.$$

In questo caso potrebbe sembrare più naturale utilizzare le coordinate sferiche: convincersi che non è così.

Soluzione 1.27 L'insieme E è quello a sinistra in Figura 1.9. Sicuramente l'integrale esiste perché la funzione integranda è limitata e quindi $|\int_E f dx dy| \leq |E|$.

Un modo di risolvere questo integrale è effettuare il cambio di variabile

$$\phi(s, t) = \left(\frac{s}{1+t}, \frac{st}{1+t} \right), \quad 0 \leq s \leq 2, 1 \leq t \leq 2.$$

che porta il rettangolo \tilde{E} in E . Il cambio ϕ si ottiene ponendo $y/x = t$ e $x + y = s$. Lo

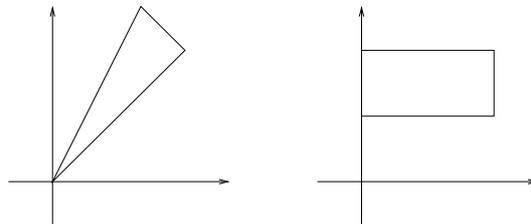


Figura 1.9: a sinistra l'insieme E , a destra \tilde{E}

Jacobiano è dato da $\frac{s}{(1+t)^2}$, per cui si perviene all'integrale

$$\int_0^2 ds \int_1^2 \frac{s}{(1+t)^2} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{1+t} \right) dt$$

che risolto è

$$\int_0^2 \frac{s}{\pi} \cos \frac{\pi}{1+t} \Big|_{t=1}^{t=2} ds = \int_0^2 \frac{s}{\pi} \left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{2} \right) ds = \frac{1}{\pi}.$$

Provare anche con il cambio di variabile

$$\psi(s, t) = (s - ts, ts), \quad 0 \leq s \leq 2, \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{2}{3}.$$

che mappa \tilde{E} in E come indicato in Figura 1.10.

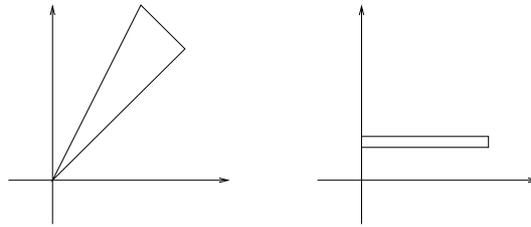


Figura 1.10: a sinistra l'insieme E , a destra \tilde{E}

Soluzione 1.28 Per calcolare l'integrale dato, proviamo ad effettuare un cambio di variabili in modo che la funzione integranda si semplifichi ed in modo tale che la matrice del cambiamento di coordinate non dia problemi nell'integrazione e, ancora, che nel nuovo sistema di riferimento l'insieme su cui si vuole integrare non si complichino. Per non avere problemi con la matrice del cambiamento di coordinate si può fare in modo che tale matrice abbia determinante pari a 1; particolari trasformazioni con tale determinante sono le rotazioni, trasformazioni che hanno il vantaggio nel nostro caso di trasformare la palla B centrata nell'origine e di raggio 1 in se stessa. Cerchiamo quindi una rotazione dello spazio che ad esempio mandi il piano $x + y + z = 0$ nel piano determinato nelle nuove coordinate (u, v, w) ad esempio da $u = 0$. Una tale rotazione è data da

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

In tal modo l'integrale diventa

$$\int_B \operatorname{sen}(x + y + z) dx dy dz = \int_B \operatorname{sen}(u\sqrt{3}) du dv dw.$$

A questo punto notiamo che la funzione integranda è dispari nella variabile u e il dominio B è simmetrico rispetto a tale variabile, e quindi si ottiene che

$$\int_B \operatorname{sen}(u\sqrt{3}) du dv dw = 0.$$

Soluzione 1.29 Notiamo che l'insieme di integrazione è invariante per rotazioni intorno all'asse z ; seguendo la discussione del punto precedente, cerchiamo una rotazione dello spazio in modo che il piano $x + y = 0$ si trasformi, nelle nuove coordinate (u, v, w) , nel piano $u = 0$ e consideriamo una rotazione che lasci inalterato l'insieme di integrazione, cioè una rotazione effettuata attorno all'asse z . Una tale rotazione è data ad esempio da

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

L'integrale diventa quindi

$$\int_E e^{\frac{x+y}{\sqrt{2}}} dx dy dz = \int_E e^u du dv dw = \int_{I_u} e^u A_u du,$$

dove A_u è l'area dell'ellisse

$$E_u = \left\{ (v, w) \in \mathbb{R}^2 : \frac{v^2}{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{b^2} \frac{w^2}{a^2 - u^2} = 1 \right\}$$

e $I_u = [-a, a]$. In definitiva troviamo che

$$\int_E e^{\frac{x+y}{\sqrt{2}}} dx dy dz = \int_{-a}^a e^u \pi \frac{b}{a} (a^2 - u^2) du = 2\pi \frac{b}{a} ((a-1)e^a + (a+1)e^{-a})$$

Soluzione 1.30 L'insieme E è normale rispetto al piano xy , quindi

$$\operatorname{Vol}(E) = \int_D \sqrt{xy} dx dy$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq (1 - \sqrt{x})^2\}$. Quindi

$$\begin{aligned} \operatorname{Vol}(E) &= \int_0^1 dx \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} \sqrt{xy} dy = \frac{2}{3} \int_0^1 \sqrt{x} (1 - \sqrt{x})^{3/2} dx \\ &= \frac{4}{3} \int_0^1 s^2 (1 - s)^3 ds = \frac{1}{45}. \end{aligned}$$

Il baricentro è invece dato dal punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ con

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{1}{\operatorname{Vol}(E)} \int_E (x, y, z) dx dy dz,$$

Abbiamo quindi che

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 45 \frac{2}{3} \int_0^1 x \sqrt{x} (1 - \sqrt{x})^{3/2} dx \\ &= 30 \int_0^1 s^4 (1 - s)^3 ds = \frac{3}{28},\end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned}\bar{y} &= 45 \int_D \sqrt{xy^3} dx dy = 45 \frac{2}{5} \int_0^1 \sqrt{x} (1 - \sqrt{x})^{5/2} dx \\ &= 36 \int_0^1 s^2 (1 - s)^5 ds = \frac{3}{14}\end{aligned}$$

ed infine

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \frac{45}{2} \int_D xy dx dy = \frac{45}{4} \int_0^1 x (1 - \sqrt{x})^4 dx \\ &= \frac{45}{2} \int_0^1 s^3 (1 - s)^4 ds = \frac{9}{112}.\end{aligned}$$

Quindi il baricentro ha coordinate $(3/28, 3/14, 9/112)$.

Soluzione 1.31 Dire che la lamina è omogenea significa dire che la sua densità di massa è costante, che supporremo essere uguale ad 1. La distanza di un punto (x, y, z) dall'asse x è dato $\sqrt{y^2 + z^2}$. E è un insieme bidimensionale con $z = 0$, quindi il suo momento d'inerzia è dato da

$$I_x = \int_E y^2 dx dy = \int_0^\pi \int_0^{\text{sen}x} y^2 dy = \frac{1}{3} \int_0^\pi \text{sen}^3 x dx = \frac{4}{9}.$$