

Capitolo 1

Successioni e serie di funzioni

1.1 Successioni di funzioni

Esercizio 1.1 Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{nx}{n^2 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 1.2 Studiare convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \chi_{[0,n]}(x) + \frac{2n}{n+x} \chi_{(n,+\infty)}(x), \quad x \in [0, +\infty).$$

Esercizio 1.3 Studiare convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 1.4 Studiare convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n^2}\right), \quad x \in [0, +\infty).$$

Esercizio 1.5 Studiare convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \arctan(nx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 1.6 Studiare convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{x+n}{x^2+n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 1.7 Si studi la convergenza puntuale ed uniforme in $[-1, 1]$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = n \log\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

Esercizio 1.8 Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^2}{x+n} \sin nxdx.$$

1.2 Serie di funzioni

Esercizio 1.9 Studiare convergenza puntuale, uniforme e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \log \left(1 + \frac{x}{n^2} \right), \quad x \geq 0.$$

Esercizio 1.10 Studiare convergenza puntuale, uniforme e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+x}{n^3 x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 1.11 Studiare convergenza puntuale, uniforme e totale delle serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^x} \quad x \geq 0.$$

Esercizio 1.12 Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+n^2}{x^2+n^4}.$$

Esercizio 1.13 Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+n}{x^2+n^4+\log n}.$$

Esercizio 1.14 Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n+x^2)}.$$

Esercizio 1.15 Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1+|x|^n n^2}.$$

Esercizio 1.16 Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{sen} x + n}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 1.17 Studiare convergenza puntuale, uniforme e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} e^{-nx}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1.3 Serie di potenze

Esercizio 1.18 Studiare convergenza puntuale, uniforme e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}.$$

Calcolarne quindi la somma.

Esercizio 1.19 Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}.$$

Esercizio 1.20 Studiare la convergenza della seguente serie e calcolarne la somma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n-3) \left(\frac{x+1}{x}\right)^n.$$

Esercizio 1.21 Studiare la convergenza e, ove converge, calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2} \frac{x^n}{(1+x^2)^n}.$$

Esercizio 1.22 Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n.$$

Esercizio 1.23 Studiare la convergenza e calcolare la somma di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) x^n.$$

Esercizio 1.24 Studiare la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \log \frac{n+1}{n}\right) x^n.$$

1.4 Serie di Taylor

Esercizio 1.25 Sviluppare in serie di Taylor in $x = 0$ la funzione $f(x) = \arctan x$ e studiarne la convergenza.

Esercizio 1.26 Calcolare lo sviluppo di Taylor nel punto $x = 1$ della funzione $\log x$ e calcolare il valore della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}.$$

Esercizio 1.27 Calcolare lo sviluppo in serie di Taylor intorno al punto $x = 0$ della funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{2+x}{1+x^2}\right)$$

precisandone l'insieme di convergenza.

Esercizio 1.28 Scrivere lo sviluppo in serie di Taylor intorno al punto $x = 0$ della funzione

$$f(x) = (1+x)^\alpha.$$

Esercizio 1.29 Calcolare lo sviluppo in serie di Taylor intorno al punto $x = 0$ della funzione

$$f(x) = \frac{4-x}{x^2-5x+6}.$$

Esercizio 1.30 Trovare una serie di potenze la cui somma, in un opportuno intervallo, sia $\log(1+x-2x^2)$.

Esercizio 1.31 Mostrare che

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

1.5 Serie di Fourier

Esercizio 1.32 Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier della funzione 2π -periodica definita in $[0, 2\pi]$ da

$$f(x) = x.$$

Esercizio 1.33 Calcolare lo sviluppo di Fourier della funzione $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = -\chi_{(-\pi, 0]}(x) + \chi_{(0, \pi]}(x).$$

Studiarne le convergenze puntuale ed uniforme. Calcolare poi lo sviluppo di Fourier della funzione $g : (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$.

Esercizio 1.34 Calcolare lo sviluppo di Fourier della funzione $f(x) = x^2$ con $x \in (-\pi, \pi]$. Studiarne le convergenze puntuale ed uniforme. Calcolare poi il valore della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Esercizio 1.35 Calcolare lo sviluppo di Fourier della funzione $f : (-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = x\chi_{[0, 1]}(x)$$

e studiarne la convergenza. Calcolare poi la somma delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}.$$

Esercizio 1.36 Calcolare lo sviluppo di Fourier della funzione $f : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = x\chi_{[0,\pi)}(x) - (x - 2\pi)\chi_{[\pi,2\pi)}(x)$$

studiarne la convergenza e calcolare il valore delle serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}.$$

Sfruttando lo sviluppo trovato, si scriva anche lo sviluppo in serie di Fourier della funzione

$$g(x) = -\chi_{(-\pi,0]}(x) + \chi_{(0,\pi]}(x).$$

Infine, scrivere uno sviluppo della stessa funzione f in soli seni.

Esercizio 1.37 Determinare lo sviluppo in serie di Fourier della funzione

$$f(x) = 1 - \frac{2|x|}{\pi}, \quad x \in (-\pi, \pi].$$

Studiarne la convergenza puntuale e uniforme in $(-\pi, \pi]$ e calcolare la somma delle serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

Esercizio 1.38 Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier di soli coseni della funzione 2π -periodica definita in $[0, \pi]$ da

$$f(x) = x^2 - \pi x.$$

1.6 Soluzioni

Soluzione 1.1 Iniziamo col notare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{n^2 + x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x/n}{1 + x^2/n^2} = 0;$$

il limite puntuale è dato quindi dalla funzione $f \equiv 0$. Per controllare la convergenza uniforme, consideriamo la seguente successione di funzioni

$$g_n(x) = f_n(x) - f(x), \quad x \in I.$$

La verifica della convergenza uniforme si riduce quindi nel verificare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |g_n(x)| = 0.$$

Pertanto basta studiare la funzione g_n per ogni $n \in \mathbb{N}$, trovare gli estremi superiore e inferiore di tali funzioni,

$$S_n = \sup_{x \in I} g_n(x), \quad I_n = \inf_{x \in I} g_n(x),$$

tener presente che

$$\sup_{x \in I} |g_n(x)| = \max\{|I_n|, |S_n|\},$$

e verificare che questi tendano a zero per n che tende a infinito. Nel nostro caso essendo la funzione limite $f \equiv 0$, abbiamo $g_n = f_n$ e, siccome

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g_n(x) = 0^\pm,$$

gli estremi superiore e inferiore saranno massimi e minimi, che potranno essere calcolati cercando gli zeri della derivata della funzione g_n (tali funzioni sono tutte derivabili). La derivata è data da

$$g'_n(x) = \frac{n(n^2 - x^2)}{(n^2 + x^2)^2},$$

che si annulla per $x = \pm n$; in tali punti si ha

$$g_n(-n) = -\frac{1}{2}, \quad g_n(n) = \frac{1}{2}.$$

Abbiamo quindi trovato che $S_n = 1/2$ e $I_n = -1/2$, e quindi

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |g_n(x)| = \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

da cui si ricava che non ci può essere convergenza uniforme, almeno su tutto \mathbb{R} . Possiamo cercare di vedere se esistono sottoinsiemi non banali di \mathbb{R} sui quali si abbia convergenza uniforme. Si nota che nel nostro caso il massimo e il minimo delle g_n vengono assunti nei punti $x = \pm n$, che tendono a $\pm\infty$; possiamo quindi provare a chiederci se per caso si ha convergenza uniforme sui sottoinsiemi limitati di \mathbb{R} , ad esempio su intervalli del tipo $[-a, a]$ con $a > 0$ (nel nostro esempio il fatto che stiamo cercando di vedere la convergenza uniforme su di un intervallo simmetrico rispetto all'origine non è un caso, ma è suggerito dal fatto che la successione delle f_n è costituita da funzioni dispari). Quindi, se $x \in [-a, a]$, abbiamo che

$$\left| \frac{nx}{n^2 + x^2} \right| \leq \frac{|x|}{n} \leq \frac{a}{n}$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [-a, a]} |g_n(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} = 0,$$

da cui la convergenza uniforme sugli intervalli compatti di \mathbb{R} .

Soluzione 1.2 Nello studio della successione data si noti che $\forall x \in [0, +\infty)$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $n_0 \geq x$. Quindi, fissato tale $n_0 \in \mathbb{N}$, si ha che $f_n(x) = 1$ per ogni $n \geq n_0$, da cui la convergenza puntuale ad 1. Per quanto riguarda la convergenza uniforme, posto

$$g_n(x) = f_n(x) - 1 = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq n \\ \frac{n-x}{n+x} & x \geq n, \end{cases}$$

si ha che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = -1,$$

mentre per $x > n$ abbiamo

$$g'_n(x) = -\frac{2n}{(n+x)^2} < 0,$$

da cui

$$S_n = \sup_{x \in [0, +\infty)} g_n(x) = 0, \quad I_n = \inf_{x \in [0, +\infty)} g_n(x) = -1$$

e quindi non si ha convergenza uniforme su $[0, +\infty)$. Ancora, si può provare a vedere se si ha convergenza uniforme sui sottoinsiemi limitati; consideriamo quindi l'intervallo $[0, a]$ con $a > 0$. Posto $n_0 = [a] + 1$, si ha che per ogni $n \geq n_0$ e per ogni $x \in [0, a]$, $f_n(x) = 1$ e quindi $g_n(x) = 0$, da cui la convergenza uniforme su $[0, a]$.

Soluzione 1.3 Abbiamo anzitutto che per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0,$$

e quindi la successione data converge puntualmente alla funzione $f \equiv 0$. Per quanto riguarda la convergenza uniforme, posto

$$g_n(x) = f_n(x) - f(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2},$$

abbiamo che

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g_n(x) = 0^\pm$$

mentre la derivata di g_n si annulla per $x = \pm 1/n$ e in corrispondenza di tali punti si ha $g(-1/n) = -1/2$, $g(1/n) = 1/2$; quindi non si può avere convergenza uniforme su tutto \mathbb{R} . Notiamo però che i punti di massimo e minimo per g_n sono assunti in punti sempre più vicini a 0. Possiamo vedere quindi se si ha convergenza uniforme sugli insiemi della forma $A = (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$ con $a > 0$ (ancora una volta la simmetria dell'insieme è suggerita dalla disparità della funzione g_n); si nota quindi che su tali insiemi, se $1/n < a$ (quindi per n sufficientemente grande), si ha che g_n è monotona decrescente. Quindi

$$S_n = \sup_{x \in A} g_n(x) = g_n(a), \quad I_n = \inf_{x \in A} g_n(x) = g_n(-a).$$

Si vede facilmente poi che $S_n, I_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$, da cui la convergenza uniforme su A . Osserviamo infine che i risultati del presente esercizio potevano essere ricavati da quelli dell'esercizio 1. effettuando la sostituzione $x = 1/y$.

Soluzione 1.4 Per quanto riguarda la convergenza puntuale si noti che $\forall x \in [0, +\infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n^2}\right) = 1,$$

da cui, per la continuità della funzione logaritmo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{x}{n^2}\right) = 0$$

e quindi il limite puntuale è dato da $f \equiv 0$. Per quanto riguarda la convergenza uniforme, si noti che $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x \in [0, +\infty)} \left| \ln \left(1 + \frac{x}{n^2}\right) \right| = +\infty$$

e quindi niente convergenza uniforme su $[0, +\infty)$. Ancora, proviamo a vedere se c'è convergenza uniforme sui sottointervalli compatti di $[0, +\infty)$, cioè sugli insiemi del tipo $[0, a]$ con $a > 0$. Siccome si ha la relazione $\ln(1 + y) \leq y$ per ogni $y \geq 0$, otteniamo che

$$\left| \ln \left(1 + \frac{x}{n^2} \right) \right| \leq \frac{x}{n^2} \leq \frac{a}{n^2},$$

da cui la convergenza uniforme su $[0, a]$.

Soluzione 1.5 Notiamo che se $x = 0$, allora $f_n(0) = 0$, mentre se $x > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2},$$

e se $x < 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Quindi la successione data converge puntualmente alla funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{\pi}{2} & x > 0. \end{cases}$$

Chiaramente non può esserci convergenza uniforme su tutto \mathbb{R} in quanto la funzione limite è discontinua. Vediamo se c'è convergenza uniforme sugli intervalli del tipo $A = (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$ con $a > 0$ (ancora una volta la simmetria dell'insieme è dettata dalla disparità delle funzioni della successione). Siccome le funzioni sono monotone crescenti e dispari, otteniamo che

$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = \frac{\pi}{2} - \arctan(na) \rightarrow 0, \quad \text{per } n \rightarrow +\infty,$$

da cui la convergenza uniforme.

Soluzione 1.6 Il limite puntuale è $f \equiv 1$ su tutto \mathbb{R} . Prima di tutto si osservi che (si vedano alcuni grafici in Figura 1.1)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = 0$$

e anche che

$$f_n(x) = 0 \quad \text{per } x_n = -n.$$

Per ognuna di queste ragioni

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \geq 1$$

e quindi non vi può essere convergenza uniforme su tutto \mathbb{R} e nemmeno su semirette. Vediamo che succede se consideriamo un compatto $[a, b]$. Calcoliamo la derivata e poniamola uguale a zero. Si ha

$$f'_n(x) = 0 \iff x^2 + 2n - n = 0$$

che ha come soluzioni $x_n = -n + \sqrt{n^2 + n}$ e $y_n = -n - \sqrt{n^2 + n}$. Si osservi che $x_n \rightarrow 1/2$ mentre $y_n \rightarrow -\infty$, quindi, qualunque sia $[a, b]$, y_n definitivamente non appartiene ad $[a, b]$.

Se $1/2 \in (a, b)$ allora x_n definitivamente appartiene ad $[a, b]$. In $[a, b]$ quindi o non ci sono punti stazionari o c'è solamente x_n , nel quale f_n assume il suo valore massimo che vale

$$f_n(x_n) = \frac{\sqrt{n^2 + n}}{2n(n + 1 - \sqrt{n^2 + n})} = \frac{n + \sqrt{n^2 + n}}{2n} \rightarrow 1.$$

Si osservi che il massimo di $|f_n - f|$ non è detto sia assunto in x_n . Infatti si ha

$$f_n(x) - f(x) = \frac{x(1-x)}{x^2 + n}$$

che è positiva per $x \in (0, 1)$ e negativa altrimenti. Quindi

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{-x(1-x)}{x^2 + n} \chi_{[a,0)}(x) + \frac{x(1-x)}{x^2 + n} \chi_{[0,1]}(x) - \frac{x(1-x)}{x^2 + n} \chi_{(1,b]}(x).$$

Per cui l'estremo superiore, che è un massimo, è sicuramente assunto in $x = a$ o $x = b$

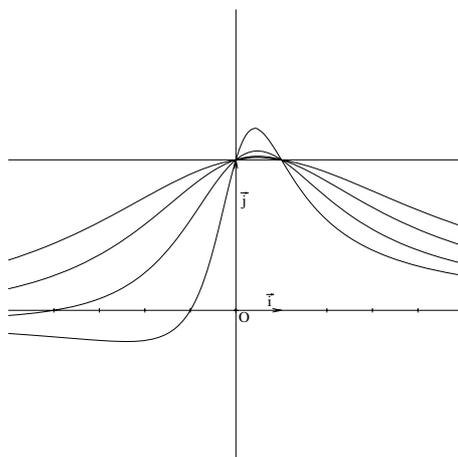


Figura 1.1:

oppure $x = x_n$. Per cui

$$\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leq \max\{f_n(a) - 1, f_n(b) - 1, f_n(x_n) - 1\}.$$

Poiché tutti e tre i valori dell'insieme a destra convergono a zero si conclude che $\{f_n\}_n$ converge uniformemente sui compatti.

Soluzione 1.7 Proponiamo due svolgimenti. Il primo scrivendo $f_n(x)$ come $\log(1 + x/n)^n$ e si ottiene che il limite puntuale è la funzione $f(x) = x$. Vediamo se tale convergenza è uniforme. Prendiamo in considerazione le funzioni $g_n(x) = (1 + x/n)^n$. Sappiamo che $(1 + x/n)^n$ è crescente in n per x positivo, mentre $(1 + x/n)^n$ è decrescente in n per x negativo e converge alla funzione $g(x) = e^x$. Derivando si ottiene

$$g'(x) - g'_n(x) = e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} \begin{cases} > 0 & \text{se } x > 0 \\ = 0 & \text{se } x = 0 \\ < 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Si osservi però che $g_n(0) = g(0) = 1$ per cui $|g(x) - g_n(x)| > 0$ tranne che per $x = 0$ che risulta essere un punto di minimo. È chiaro che il massimo è assunto quindi per $x = -1$ oppure per $x = 1$ e si ha

$$\sup_{x \in [-1, 1]} |g_n(x) - g(x)| \leq \max\{|g_n(-1) - e^{-1}|, |g_n(1) - e|\} \rightarrow 0.$$

Per cui $\{g_n\}$ converge uniformemente a g in $[-1, 1]$. Poiché la funzione $x \mapsto \log x$ è continua nell'intervallo $[e^{-1}, e]$ (nel quale assumono valori le g_n) e $\log g_n(x) = f_n(x)$, $\log g(x) = f(x)$, concludiamo che anche $\{f_n\}$ converge uniformemente a f in $[-1, 1]$.

Vediamo ora cosa succede in $[-1, +\infty)$. Il secondo svolgimento fa uso del seguente risultato, che è una versione un pó più generale di quanto visto a lezione. Se $(f_n)_n$ è una successione in $C^1([a, b])$ tale che

- 1) f'_n converge uniformemente ad una funzione g in $[a, b]$;
- 2) esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $f_n(x_0)$ converge.

Allora la successione $(f_n)_n$ converge uniformemente ad una funzione f . Inoltre $f \in C^1([a, b])$ e $f' = g$. Calcoliamo direttamente il limite uniforme di

$$f_n(x) = n \log(1 + x/n)$$

in $[-1, 1]$. Si ha che $f'_n(x) = \frac{n}{x+n}$ che converge uniformemente alla costante 1, inoltre $f_n(0)$ converge a 0. Per cui f_n converge uniformemente alla funzione f data da

$$f(x) = 0 + \int_0^x 1 dt = x$$

Soluzione 1.8 Ci sono due modi per svolgere tale esercizio; uno è provare a integrare la successione di funzioni data e quindi calcolare li limite (provare a farlo), oppure provare a utilizzare il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale. Per applicare tale teorema bisogna verificare la convergenza uniforme della successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x+n} \sin(nx)$$

ad una qualche funzione, sperabilmente facile da integrare. Ora, per $x \in [0, 1]$ si ha

$$0 \leq g_n(x) = \frac{x^2}{x+n} \leq \frac{x^2}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Quindi la successione di funzioni g_n converge uniformemente a 0; inoltre la successione di funzioni $h_n(x) = \sin(nx)$ è limitata e quindi

$$|f_n(x)| = |g_n(x)h_n(x)| \leq g_n(x) \leq \frac{1}{n},$$

da cui la convergenza uniforme della successione data a 0. Concludiamo quindi che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 0.$$

Soluzione 1.9 Nello studio della convergenza di una serie di funzioni ci sono due tipi di convergenza ereditate dallo studio della convergenza delle successioni di funzioni (convergenza puntuale e convergenza uniforme) e una tipica delle serie di funzioni (la convergenza totale). Nel caso della convergenza puntuale si tratta di trovare per quali $x \geq 0$ esiste il seguente limite

$$s(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} s_N(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \sqrt{n} \ln \left(1 + \frac{x}{n^2} \right).$$

Dalla stima

$$\ln(1+y) \leq y, \quad \forall y \geq 0, \quad (1.1)$$

segue la convergenza puntuale per ogni $x \geq 0$. Per quanto riguarda la convergenza uniforme, si tratta di dimostrare che

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sup_{x \geq 0} |s_N(x) - s(x)| = 0.$$

Ora, siccome

$$s(x) - s_N(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \sqrt{n} \ln \left(1 + \frac{x}{n^2} \right) \geq \sqrt{N+1} \ln \left(1 + \frac{x}{(N+1)^2} \right) \quad (1.2)$$

(i termini della serie sono tutti positivi), si ottiene che

$$\sup_{x \geq 0} |s_N(x) - s(x)| = +\infty$$

e quindi non si può avere convergenza uniforme sull'intervallo $[0, +\infty)$. D'altra parte, se si considera l'intervallo $[0, a]$ con $a > 0$, si ottiene, da (1.1), che

$$0 \leq s(x) - s_N(x) \leq a \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

da cui la convergenza uniforme su tutti gli insiemi compatti della forma $[0, a]$. Per quanto riguarda la convergenza totale, essa si potrà avere solo ancora sui sottoinsiemi compatti della forma $[0, a]$ (o su sottoinsiemi propri di tali insiemi); essa segue ancora dalla stima (1.1) in quanto i numeri

$$M_n = \sup_{x \in [0, a]} \sqrt{n} \ln \left(1 + \frac{x}{n^2} \right) \leq \frac{a}{n\sqrt{n}}$$

formano i termini di una serie numerica convergente.

Soluzione 1.10 Notiamo anzitutto che per $x = 0$ si ottiene la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n$$

che è una serie divergente. Se invece $x \neq 0$, si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \frac{n+x}{n^3 x^2 + 1} = \frac{1}{x^2},$$

e quindi la serie è asintoticamente equivalente alla serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Quindi la serie converge puntualmente per $x \in A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Grazie all'osservazione 1.6(2) delle dispense, non si può avere convergenza uniforme su tutto A . Vediamo quindi su quali insiemi si ha convergenza uniforme; siccome il problema si verifica quando x è vicino a 0, proviamo a vedere se si ha convergenza uniforme sugli insiemi della forma $(-\infty, a] \cup [b, +\infty)$ con $a < 0 < b$. Verifichiamo direttamente se c'è convergenza totale su tali insiemi; la funzione

$$f_n(x) = \frac{n+x}{n^3x^2+1}$$

ammette massimo e minimo nei punti

$$x_1^{(n)} = \sqrt{n^2 + 1/n^3} - n, \quad x_2^{(n)} = -\sqrt{n^2 + 1/n^3} - n.$$

Si ha inoltre che $x_1^{(n)} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$ e

$$f_n(x_1^{(n)}) \equiv n,$$

mentre il punto $x_2^{(n)}$ tende a 0 per n che tende a $+\infty$, mentre

$$f_n(x_2^{(n)}) \equiv \frac{1}{2n^4}$$

che formano i termini di una serie convergente. Inoltre la funzione è crescente per $x_2^{(n)} < x < x_1^{(n)}$ e $f_n(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow \pm\infty$; questo argomento implica la convergenza totale sull'insieme considerato, e quindi anche la convergenza uniforme.

Soluzione 1.11 La prima serie data converge puntualmente per $x > 1$; per quanto riguarda la convergenza uniforme, non ci può essere su tutto l'insieme $(0, +\infty)$ in quanto

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^x} \geq \frac{1}{N^x}$$

e quindi

$$\sup_{x>0} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^x} \geq 1 \not\rightarrow 0, \quad \text{per } N \rightarrow +\infty.$$

Invece se $a > 1$, allora per $x \in [a, +\infty)$ abbiamo che $1/n^x \leq 1/n^a$, da cui la convergenza totale e uniforme sugli insiemi della forma $[a, +\infty)$ per ogni $a > 1$.

La seconda serie converge puntualmente per $x > 0$; per quanto riguarda la convergenza uniforme, non ci può essere su tutto l'intervallo $(0, +\infty)$, mentre se $a > 0$ dal Teorema di Leibnitz si ha che

$$\left(\sum_{n=N}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^x} \right) \leq \frac{1}{(N+1)^x}$$

e quindi

$$\sup_{x \geq a} \left(\sum_{n=N}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^x} \right) \leq \frac{1}{(N+1)^a} \rightarrow 0.$$

Infine la convergenza totale si ottiene, come nell'esercizio precedente, sugli intervalli $[a, +\infty)$ con $a > 1$.

Soluzione 1.12 Si nota che la funzione $\frac{x+n}{x^2+n^4}$ ha due punti stazionari in $-n \pm n\sqrt{1+n^2}$ in cui vale

$$a_n = \pm \frac{\sqrt{1+n^2}}{2n^3 + 2n \mp \sqrt{1+n^2}}.$$

Dato che la funzione tende a 0 per $x \rightarrow \pm\infty$, tali punti stazionari sono di massimo e minimo. Notando infine che

$$|a_n| \sim \frac{1}{2n^2},$$

si conclude che la serie è totalmente convergente su tutto \mathbb{R} e quindi uniformemente e puntualmente convergente.

Soluzione 1.13 Puntuale per ogni $x \in \mathbb{R}$ perché, ad esempio,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x+n}{x^2+n^4+\log n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x+n|}{n^4}.$$

In generale vale, per $a, b > 0$, che $a^2 + b^2 \geq 2ab$, per cui $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$, da cui

$$\left| \frac{x+n}{x^2+n^4+\log n} \right| \leq 2 \frac{|x+n|}{2(x^2+n^4)} \leq 2|x+n| \frac{(|x+n|^2)^2}{\leq} \frac{2}{|x+n|^2} \leq \frac{2}{n^2}$$

per cui la serie converge totalmente in \mathbb{R} .

Soluzione 1.14 Per ogni $x \in \mathbb{R}$ $1/\log(n+x^2)$ è decrescente in n per cui la serie è convergente per ogni x . La stima del resto

$$\left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n+x^2)} - \sum_{n=2}^{m-1} \frac{(-1)^n}{\log(n+x^2)} \right| \leq \frac{1}{\log(m+x^2)} \leq \frac{1}{\log m} \rightarrow 0$$

quindi vi è convergenza uniforme su tutto \mathbb{R} . Ovviamente non vi è la totale: si ha che

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{(-1)^n}{\log(n+x^2)} \right| = \frac{1}{\log n}$$

(il massimo è assunto per $x = 0$, come si deduce calcolando la derivata) e la serie $\sum_n (\log n)^{-1}$ diverge. Non c'è convergenza totale nemmeno in nessun intervallo (a, b) (o $[a, b]$) poiché

$$\sup_{x \in (a,b)} \left| \frac{(-1)^n}{\log(n+x^2)} \right| = \max \left\{ \frac{1}{\log(n+a^2)}, \frac{1}{\log(n+b^2)} \right\}.$$

Soluzione 1.15 Per $x \geq 1$ si ha che

$$\frac{nx^n}{1+|x|^n n^2} \geq \frac{nx^n}{2|x|^n n^2} = \frac{1}{2n}$$

per cui la serie diverge. Per $x \in (-1, 1)$ si ha che

$$\left| \frac{nx^n}{1+|x|^n n^2} \right| \leq n|x|^n$$

per cui vi è convergenza assoluta. Per $x \leq -1$

$$\frac{nx^n}{1+|x|^nn^2} = (-1)^n \frac{n|x|^n}{1+|x|^nn^2}, \quad \text{e} \quad \frac{n|x|^n}{1+|x|^nn^2} \leq \frac{1}{n}.$$

Verifichiamo che è monotona decrescente in n : mi chiedo se

$$\frac{(n+1)|x|^{n+1}}{1+|x|^{n+1}(n+1)^2} \leq \frac{n|x|^n}{1+|x|^nn^2}$$

cioè se

$$n|x|^n + n(n+1)^2|x|^{2n+1} \geq (n+1)|x|^{n+1} + (n+1)n^2|x|^{2n+1}$$

il che è equivalente a

$$(n+1)|x| \leq n(n+1)|x|^{n+1} + n$$

che è vero per ogni $x \leq -1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$. Usando il criterio di Leibniz si conclude che la serie converge in $(-\infty, -1]$. Quindi converge puntualmente in $(-\infty, 1)$.

Dalla stima in $(-1, 1)$ si vede che vi è convergenza totale in $[0, a]$ per ogni $0 < a < 1$, ma non può esservi in $[0, 1)$. Infatti

$$\sup_{[0,1)} \left| \sum_{n=1}^N \frac{nx^n}{1+|x|^nn^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1+|x|^nn^2} \right| = \sup_{[0,1)} \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{nx^n}{1+|x|^nn^2} \right| = +\infty$$

in quanto le funzioni $\frac{nx^n}{1+|x|^nn^2}$ sono continue (anche in $x = 1$), ma la loro somma su n diverge a $+\infty$ in $x = 1$. Per x negativo si ha:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1+|x|^nn^2} - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{nx^n}{1+|x|^nn^2} \right| \leq \frac{m|x|^m}{1+|x|^mm^2} \leq \frac{1}{m} \rightarrow 0.$$

In conclusione, vi è convergenza puntuale in $(-\infty, 1)$, uniforme e totale su tutti gli insiemi del tipo $(-\infty, a]$ con $a < 1$.

Soluzione 1.16 Si nota che

$$\frac{n-1}{n^2} \leq \frac{\operatorname{sen}x + n}{n^2} \leq \frac{n+1}{n^2},$$

da cui si deduce che

$$\frac{n-1}{n^2} \leq \sup_{x \in I} \left| \frac{\operatorname{sen}x + n}{n^2} \right| \leq \frac{n+1}{n^2},$$

per ogni $I \subset \mathbb{R}$. Di conseguenza, non ci può essere convergenza totale in nessun sottoinsieme $I \subset \mathbb{R}$. Per quanto riguarda la convergenza semplice e uniforme, osserviamo che anzitutto $\operatorname{sen}x + n \geq 0$ e che

$$\frac{\operatorname{sen}x + n + 1}{(n+1)^2} \leq \frac{\operatorname{sen}x + n}{n^2},$$

in quanto equivalente a

$$\left(2 + \frac{1}{n}\right) \operatorname{sen}x + 2n + 1 \geq 0,$$

dal criterio di Leibniz si deduce la convergenza e la stima

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{sen}x + n}{n^2} - \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^n \frac{\operatorname{sen}x + n}{n^2} \right| \leq \frac{\operatorname{sen}x + N}{N^2},$$

da cui la convergenza uniforme su tutto \mathbb{R} .

Soluzione 1.17 Per $x < 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} xn^{-1}e^{-nx} = -\infty$ per cui la serie diverge. Per $x \geq 0$ la serie invece converge (per $x = 0$ è identicamente nulla, per $x > 0$ si può usare, ad esempio, il criterio del rapporto). Vediamo che in $[0, +\infty)$ la serie converge totalmente. Derivando si ottiene che il punto $x_n = 1/n$ è stazionario. Poiché $f_n(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ e $f_n \geq 0$ x_n risulta punto di massimo. Quindi

$$|f_n(x)| \leq f_n(1/n) = \frac{1}{n^2} \frac{1}{e} \rightarrow 0.$$

Soluzione 1.18 Mediante il cambio di variabili $y = x/2$ si ottiene una serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+1}}{n+1}.$$

Tale serie ha raggio di convergenza $R = 1$ in quanto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} = 1.$$

Quindi la serie converge per $y \in (-1, 1)$, totalmente ed uniformemente negli intervalli $[a, b] \subset (-1, 1)$. Per $y = 1$ e $y = -1$ si ottengono le due serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1},$$

e quindi la convergenza puntuale in $[-1, 1)$. La convergenza non potrà essere uniforme in tutto $[-1, 1)$, altrimenti si avrebbe convergenza anche per $y = 1$. Per quanto riguarda la convergenza uniforme nell'intervallo $[-1, 0]$ possiamo utilizzare il criterio di Leibniz per ottenere la stima, per $y \in [-1, 0]$,

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^N \frac{y^{n+1}}{n+1} \right| \leq \frac{|y|^{N+2}}{N+2} \leq \frac{1}{N+2},$$

da cui si deduce la convergenza uniforme su $[-1, 0]$. Quindi abbiamo convergenza puntuale in $[-1, 1)$ e uniforme in $[-1, a]$ per ogni $a < 1$ alla funzione

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+1}}{n+1}.$$

Per il calcolo della somma, andiamo a considerare la serie delle derivate

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^n;$$

tale serie è convergente in $(-1, 1)$; questa volta la convergenza uniforme e totale può essere solo sugli intervalli $[a, b] \subset (-1, 1)$; questo implica la convergenza uniforme alla funzione

$$g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} y^n = \frac{1}{1-y}$$

della serie delle derivate, da cui il fatto che f è derivabile su ogni $[a, b] \subset (-1, 1)$ e quindi $f \in C^1(-1, 1)$

$$f'(y) = g(y) = \frac{1}{1-y}.$$

Se ne deduce che

$$f(y) = f(0) + \int_0^y g(t) dt = -\log(1-y) = \log \frac{1}{1-y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+1}}{n+1}.$$

Ripassando alla variabile $x = 2y$, si ottiene infine che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} = \log \frac{2}{2-x}.$$

Soluzione 1.19 Supponiamo per il momento di dover studiare semplicemente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x)^n}.$$

Ci si può ridurre a studiare la serie geometrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} y^n$$

pensando poi a sostituire a y $1/(1+x)$. Sappiamo che la serie geometrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n - 1, \quad |q| < 1.$$

Di conseguenza la serie appena scritta converge alla funzione

$$\frac{y}{1-y}$$

puntualmente in $(-1, 1)$ ed uniformemente e totalmente solo nei compatti $[a, b] \subset (-1, 1)$. Infatti, se vi fosse convergenza uniforme in $[0, 1)$ o $(-1, 0]$, allora vi sarebbe convergenza uniforme (e quindi anche puntuale) anche in $[0, 1]$ o $[-1, 0]$.

Sugli insiemi compatti $[a, b] \subset (-1, 1)$ si ha convergenza totale per quanto visto a teoria sulle serie di potenze. Questo si traduce, per la serie considerata, ripassando a $x = \frac{1-y}{y}$, nella convergenza alla funzione

$$\frac{\frac{1}{1+x}}{1 - \frac{1}{1+x}} = \frac{1}{x}$$

puntualmente in $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ e uniformemente e totalmente negli insiemi $(-\infty, \alpha]$, $[\beta, +\infty)$ con $\alpha < -2$ e $\beta > 0$. Infatti la trasformazione $g(x) = 1/(1+x)$ manda l'intervallo $[a, 0]$, con $-1 < a$, in $(-\infty, \frac{1-a}{a}]$, e l'intervallo $[0, b]$, con $b < 1$, in $[\frac{1-b}{b}, +\infty)$. Se, ad esempio, $a = -\frac{1}{1+\delta}$ con $\delta > 0$, cioè a compreso tra -1 e 0 , si ottiene che $\frac{1-a}{a} = -2 - \delta$, cioè un numero strettamente minore di -2 . Analogamente si vede che $\frac{1-b}{b}$ è strettamente positivo.

Veniamo ora all'esercizio proposto: poiché la serie data è il limite, per $N \rightarrow +\infty$, di $\sum_{n=1}^N \frac{x}{(1+x)^n}$ per le somme finite si ha

$$\sum_{n=1}^N \frac{x}{(1+x)^n} = x \sum_{n=1}^N \frac{1}{(1+x)^n}.$$

Per cui l'insieme di convergenza puntuale contiene sicuramente l'insieme nel quale converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x)^n}$, cioè $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$. Si osservi però che la serie data converge anche per $x = 0$ (infatti ogni termine è identicamente nullo). Perciò l'insieme di convergenza puntuale è $(-\infty, -2) \cup [0, +\infty)$ e la funzione limite è

$$h(x) = \chi_{(-\infty, -2)}(x) + \chi_{(0, +\infty)}(x)$$

(poiché $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x)^n} = 1/x$). Per quanto riguarda le convergenze uniformi e totale si può ragionare come prima per ottenere che vi è convergenza negli insiemi del tipo $(-\infty, \alpha]$, $[\beta, +\infty)$ con $\alpha < -2$ e $\beta > 0$. Non può esservi convergenza uniforme, e di conseguenza nemmeno totale, nell'insieme $[0, +\infty)$ dal momento che la funzione limite è discontinua in tale insieme mentre le somme parziali sono ovviamente continue. Si provi come esercizio a vedere cosa succede con la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x)^n}.$$

Soluzione 1.20 Posso fare il cambio $y = (x+1)/x$ e studiare $\sum_{n=0}^{\infty} (n-3)y^n$. Il raggio di convergenza è 1, per cui la serie converge puntualmente per $y \in (-1, 1)$. La convergenza, al solito, è totale nei compatti $[a, b] \subset (-1, 1)$, ma non in $(-1, 1)$. Posso scrivere

$$(n-3)y^n = y^4(n-3)y^{n-4}$$

e vedere $(n-3)y^{n-4}$ come la derivata di y^{n-3} . Abbiamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n-3)y^n = -3 - 2y - y^2 + \sum_{n=4}^{\infty} (n-3)y^n = -3 - 2y - y^2 + \sum_{k=1}^{\infty} ky^{3+k}$$

e

$$y^4 \sum_{k=1}^{\infty} ky^{k-1} = y^4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dy} y^k = y^4 \frac{d}{dy} \sum_{k=1}^{\infty} y^k = y^4 \frac{d}{dy} \frac{y}{1-y} = \frac{y^4}{(1-y)^2}$$

In conclusione,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n-3)y^n = -3 - 2y - y^2 + \frac{y^4}{(1-y)^2}$$

dove la convergenza è puntuale per $y \in (-1, 1)$ e totale sui compatti $[a, b] \subset (-1, 1)$. La funzione $f(x) = (x+1)/x$ ha il grafico in Figura 1.2 per cui, tornando a considerare x , si ha che

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n-3) \left(\frac{x+1}{x} \right)^n = -3 - 2 \frac{x+1}{x} - \left(\frac{x+1}{x} \right)^2 + \frac{(x+1)^4}{x^2}$$

dove la convergenza è puntuale per $x \in (-\infty, -1/2)$ e totale negli insiemi del tipo $[a, b] \subset (-\infty, -1/2)$. Infatti

$$\left| \frac{x+1}{x} \right| < 1, \quad \text{per } x \in (-\infty, -1/2).$$

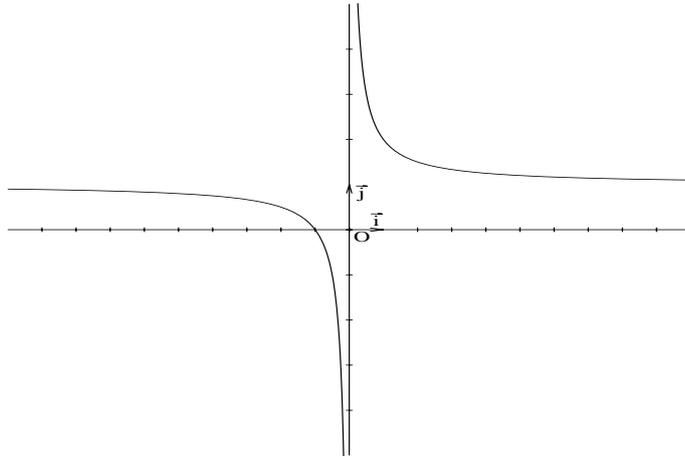


Figura 1.2:

Soluzione 1.21 La serie dell'esercizio non è una serie di potenze. Tuttavia lo studio di tale serie può essere ricondotto allo studio di una serie di potenze. Innanzitutto si osservi che

$$\lim_n \left[\frac{n}{n+2} \frac{|x|^n}{(1+x^2)^n} \right]^{1/n} = \frac{|x|}{1+x^2}$$

che è sempre minore di 1 (per esercizio vedere che $\frac{|x|}{1+x^2} \leq 1/2$). Di conseguenza la serie converge assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$. Calcoliamo la somma della serie (per $|y| < 1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2} y^n.$$

Si ha che

$$\frac{n}{n+2} y^n = \frac{n+2-2}{n+2} y^n = \left[1 - \frac{2}{n+2} \right] y^n = y^n - \frac{2}{y^2} \frac{1}{n+2} y^{n+2}$$

A questo punto, osservando che $\lim_n (a_n + b_n) = \lim_n a_n + \lim_n b_n$, otteniamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2} y^n = \sum_{n=1}^{\infty} y^n - \frac{2}{y^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2} y^{n+2}.$$

Prendiamo in esame il secondo termine:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2} y^{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^y t^{n+1} dt = \int_0^y \left(\sum_{n=1}^{\infty} t^{n+1} \right) dt = \int_0^y \left(\sum_{n=2}^{\infty} t^n \right) dt = \int_0^y \frac{t^2}{1-t} dt$$

dove i passaggi precedenti sono leciti se la convergenza è uniforme, cosa che succede se y è fissato tra -1 e 1 . Per integrare $\frac{t^2}{1-t}$ dividiamo t^2 per $1-t$ e scriviamo

$$t^2 = (1-t)(-1-t) + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{t^2}{1-t} = -(1+t) + \frac{1}{1-t}$$

e quindi integrando

$$\int_0^y \frac{t^2}{1-t} dt = -y - \frac{y^2}{2} - \log(1-y).$$

Tirando le fila si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2} y^n = \frac{y}{1-y} - \frac{2}{y^2} \left[-y - \frac{y^2}{2} - \log(1-y) \right] = \frac{y}{1-y} + \frac{2}{y} + 1 + \frac{2}{y^2} \log(1-y).$$

Si osservi che questa funzione è regolare anche se sembra avere singolarità in $y = 0$. Infatti $\log(1-y) = -y + y^2/2 + o(y^2)$ e quindi

$$\begin{aligned} \frac{y}{1-y} + \frac{2}{y} + 1 + \frac{2}{y^2} \log(1-y) &= \frac{1}{y^2} \left[\frac{y^3}{1-y} + 2y + y^2 + 2\log(1-y) \right] \\ &= \frac{1}{y^2} \left[\frac{y^3}{1-y} + 2y + y^2 - 2y + y^2 + o(y^2) \right] \end{aligned}$$

Tornando al nostro problema, poiché la quantità $\frac{x^n}{(1+x^2)^n}$ è sempre minore di 1 la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2} \frac{x}{1+x^2}$$

converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$; converge pure uniformemente e totalmente su \mathbb{R} poiché $\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$. Si conclude sostituendo nell'espressione di sopra $\frac{x}{1+x^2}$ al posto di y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2} \frac{x^n}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{1+x^2-x} - \frac{x}{1+x^2} - \frac{x^2}{2(1+x^2)^2} - \log \frac{1+x^2-x}{1+x^2}.$$

Soluzione 1.22 Calcoliamo il raggio di convergenza studiando seguente limite

$$\lim_n \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \lim_n \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{e}$$

quindi vi è convergenza puntuale in $(-e, e)$ e non vi è in $(-\infty, -e) \cup (e, +\infty)$. Vediamo gli estremi:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \text{quindi per } x = n \quad e^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} \geq n^n n!$$

per cui

$$\frac{n!}{n^n} e^n \geq 1. \tag{1.3}$$

La serie quindi non converge per $x = -e$ e diverge a $+\infty$ per $x = e$. Ovviamente converge totalmente e uniformemente in tutti gli intervalli $[a, b] \subset (-e, e)$. Come al solito si ha che la serie non può convergere uniformemente in $(-e, e)$. Anziché la stima (1.3) si può usare, per studiare il comportamento della serie in $x = e$ la formula di Stirling

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} (1 + O(1/n)).$$

Soluzione 1.23 Si ha che

$$\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)!}$$

per cui, usando il criterio del rapporto, si deduce che il raggio di convergenza è $+\infty$ dato che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)}{(n+2)!} \frac{(n+1)!}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n(n+2)} = 0.$$

La serie converge quindi per ogni $x \in \mathbb{R}$. Prima di studiare le convergenze uniforme e totale calcoliamo la somma della serie. Sappiamo che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Si ha che

$$\frac{n}{(n+1)!} x^n = x \frac{d}{dx} \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{1}{x} \right]$$

per cui, grazie alla convergenza uniforme posso invertire il segno di derivata con il limite e ottenere

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} x \frac{d}{dx} \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{1}{x} \right] = x \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right] = x \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x} (e^x - 1 - x) \right] \\ &= x \left[-\frac{1}{x^2} (e^x - 1 - x) + \frac{1}{x} (e^x - 1) \right] = e^x - \frac{1}{x} (e^x - 1). \end{aligned}$$

Vediamo la convergenza uniforme in \mathbb{R} :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} x^k - \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} x^k \right| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} x^k \right| = +\infty$$

quindi non vi è convergenza uniforme in \mathbb{R} . Nemmeno se ci limitiamo a semirette $[a, +\infty)$, perché l'estremo superiore è $+\infty$ proprio perché consideriamo la semiretta fino a $+\infty$. Vediamo cosa succede se consideriamo $(-\infty, 0]$;

$$\sup_{x \in (-\infty, 0]} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} x^k - \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} x^k \right| = \sup_{x \in (-\infty, 0]} \left| e^x - \frac{1}{x} (e^x - 1) - \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} x^k \right| = +\infty$$

perché $f(x) = e^x - \frac{1}{x} (e^x - 1)$ è limitata in $(-\infty, 0]$. Per $x \in [-a, a]$ con a positivo

$$\left| \frac{k}{(k+1)!} x^k \right| \leq \frac{k}{(k+1)!} a^k.$$

La serie $\sum_n \frac{na^n}{(n+1)!}$ converge per ogni a reale per cui si ha convergenza totale e uniforme in ogni compatto.

Soluzione 1.24 Si nota che dallo sviluppo di Taylor del logaritmo si ricava che

$$a_n = \frac{1}{n} - \log \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n} - \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right).$$

Quindi a_n è asintoticamente equivalente a $1/2n^2$. Se ne deduce che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

e quindi il raggio di convergenza della serie di potenze è 1; per $x = \pm 1$ si ottengono le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n.$$

Siccome gli a_n sono positivi e asintoticamente equivalenti a $1/(2n^2)$, la serie di potenze converge in $[-1, 1]$ e la convergenza è totale in tale intervallo. Questo è un fatto generale delle serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

nal caso in cui i coefficienti c_n abbiano segno costante (cioè o tutti positivi o tutti negativi) o sono di segno alterno (cioè $c_n = (-1)^n |c_n|$ o $c_n = (-1)^{n+1} |c_n|$): se la convergenza è puntuale in $[x_0 - R, x_0 + R]$, allora sullo stesso intervallo la convergenza è totale in quanto

$$\sup_{[x_0 - R, x_0 + R]} |c_n (x - x_0)^n| = |c_n| R^n$$

questo ultimo termine coincide con $|c_n R^n|$ che altro non è che $|c_n (x - x_0)^n|$ quando $x - x_0 = \pm R$ e nelle ipotesi di cui sopra

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \right| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| R^n$$

per $x - x_0 = \pm R$.

Soluzione 1.25 Sappiamo che la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}, \quad \text{per } |q| < 1.$$

Possiamo allora concludere che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n \quad \text{converge a} \quad \frac{1}{1 + x^2} \quad \text{per } |x| < 1.$$

Studiamo questa serie. Converge puntualmente in $(-1, 1)$. Per $x = 1$ e per $x = -1$ ovviamente non converge. Al solito, la serie non convergerà uniformemente in $(-1, 1)$, ma è facile vedere che converge totalmente in tutti i compatti $[a, b]$ contenuti in $(-1, 1)$. Calcoliamo la derivata di $f(x) = \arctan x$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Integrando termine a termine si ha, posto $f_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k}$, grazie alla convergenza uniforme

$$\lim_n \int_0^x f_n(t) dt = \int_0^x \lim_n f_n(t) dt = \int_0^x \frac{1}{1 + t^2} dt = \arctan x.$$

Ora

$$\int_0^x (-1)^k t^{2k} dt = (-1)^k \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}$$

per cui

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

per ogni $x \in [-1, 1]$ e la convergenza uniforme solo sui compatti contenuti in $(-1, 1)$.

Soluzione 1.26 Calcoliamo lo sviluppo sfruttando il fatto che la derivata di $f(x) = \log x$ è data da

$$f'(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{1+(x-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$$

dove l'ultima identità è valida per $|x-1| < 1$. La serie è una serie geometrica centrata in $x=1$ e con raggio di convergenza 1; quindi si ha convergenza totale e uniforme per ogni intervallo chiuso e limitato $[a, b] \subset (0, 2)$, ma non si potrà avere convergenza uniforme in $(0, 2)$. Per il teorema di integrazione per serie si ottiene quindi che

$$\log x = \int_1^x f'(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}. \quad (1.4)$$

Tale identità vale per ogni $x \in (0, 2)$. Si nota ora che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}.$$

converge in realtà anche in $(0, 2]$, con convergenza uniforme negli intervalli $(a, 2]$ per ogni $a > 0$ grazie al Teorema di Leibniz. Grazie alla continuità del logaritmo al fatto che si ha convergenza uniforme fino al punto 2, si ricava il fatto che l'identità (1.4) può essere estesa anche per $x=2$, dal quale si ricava che

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Soluzione 1.27 Dalla soluzione dell'esercizio 1.26 abbiamo che per $y \in (-1, 1]$

$$\log(1+y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} y^n}{n}.$$

Otteniamo quindi che

$$\begin{aligned} f(x) &= \log\left(\frac{2+x}{1+x^2}\right) = \log 2 + \log\left(1 + \frac{x}{2}\right) - \log(1+x^2) \\ &= \log 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} y^n}{n 2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{n} \end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio è valido se sono contemporaneamente verificate le condizioni $x/2 \in (-1, 1]$ e $x^2 \in (-1, 1]$, cioè se $x \in [-1, 1]$. L'esercizio si conclude con l'osservazione che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{n}$$

è riconducibile ad una serie di potenze, ma è anche direttamente una serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

dove i coefficienti b_n sono nulli se n è dispari mentre se n è pari, $n = 2k$, allora $b_n = (-1)^{k+1}/k$. Si ottiene in definitiva che

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

con

$$c_n = \begin{cases} \log 2 & n = 0 \\ \frac{(-1)^{n+1}}{n2^n} & n \text{ dispari} \\ \frac{(-1)^n}{n2^n} - \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1} 2}{n} & n \text{ pari } \geq 2. \end{cases}$$

Soluzione 1.28 Se consideriamo la funzione

$$f(x) = (1+x)^\alpha,$$

calcolando le derivate di f e valutandole in $x = 0$ si trova che

$$f^{(k)}(0) = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - k + 1).$$

Definendo quindi il coefficiente binomiale per $\alpha \in \mathbb{R}$ come

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha \cdot \dots \cdot (\alpha - k + 1)}{k!},$$

con l'estensione ad 1 nel caso $k = 0$, possiamo definire la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Studiamo la convergenza di tale serie; dal criterio del rapporto troviamo che

$$\frac{\binom{\alpha}{k+1}}{\binom{\alpha}{k}} = \frac{\alpha - k}{k+1} \rightarrow -1,$$

quindi la serie converge per $x \in (-1, 1)$, con convergenza uniforme in $[a, b] \subset (-1, 1)$. La serie quindi definisce in $(-1, 1)$ una funzione g di classe C^∞ ; resta da dimostrare che $g = f$; non possiamo utilizzare in questo esempio il criterio di sviluppabilità in quanto la stima

$f^{(k)}(0) \leq ML^k$ fallisce per ogni scelta di $M, L > 0$. Possiamo però considerare la funzione $h(x) = (1+x)^{-\alpha}g(x)$; derivando troviamo che

$$\begin{aligned} h'(x) &= -\alpha(1+x)^{-\alpha-1}g(x) + (1+x)^{-\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} k \binom{\alpha}{k} x^{k-1} \\ &= \alpha(1+x)^{-\alpha-1} \left(-g(x) + (1+x) \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha-1}{k-1} x^{k-1} \right) \\ &= \alpha(1+x)^{-\alpha-1} \left(-\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{k} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha-1}{k-1} x^k \right) \\ &= \alpha(1+x)^{-\alpha-1} \left(-\binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha-1}{0} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha-1}{k} + \binom{\alpha-1}{k-1} \right] x^k \right) = 0, \end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che

$$k \binom{\alpha}{k} = \alpha \binom{\alpha-1}{k-1}$$

e l'identità, valida per $k \geq 1$,

$$-\binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha-1}{k} + \binom{\alpha-1}{k-1} = 0.$$

Quindi la funzione h è costante e dato che $h(0) = 1$, ne segue che

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Soluzione 1.29 Spezzando il polinomio $x^2 - 5x + 6$ come prodotto di $x-3$ e $x-2$ si ottiene che

$$f(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{2}{x-2}.$$

Sapendo che, per $|q| < 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ converge al valore $\frac{1}{1-q}$ si può scrivere

$$\frac{1}{x-3} = -\frac{1}{3-x} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{x}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n$$

che converge per $|\frac{x}{3}| < 1$, cioè per $|x| < 3$. L'altro termine:

$$-\frac{2}{x-2} = \frac{2}{2-x} = \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$$

che converge per $|\frac{x}{2}| < 1$, cioè per $|x| < 2$. Sarà possibile effettuare la somma solo dove convergono entrambe, quindi sicuramente per $x \in (-2, 2)$ si ha che

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^{n+1}} \right] x^n.$$

Soluzione 1.30 Si può fare seguendo la soluzione dell'Esercizio precedente osservando che $1 + x - 2x^2 = (2x + 1)(1 - x)$.

Soluzione 1.31 La funzione data è definita per $x \in (-1, 1)$ ed in tale intervallo abbiamo l'identità

$$\begin{aligned} f(x) &= \log \frac{1+x}{1-x} = \log(1+x) - \log(1-x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (-1)^k x^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} + 1}{k} x^k = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \end{aligned}$$

in quanto $(-1)^{k+1} + 1$ è nullo se k è pari, mentre vale 2 per k dispari.

Soluzione 1.32 Con un calcolo diretto si ottiene che

$$\begin{aligned} a_0 &= 2\pi \\ a_n &= 0 \\ b_n &= -\frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Quindi la serie di Fourier sarà data da

$$F(x) = \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx;$$

il fatto che i termini a_n sono tutti nulli si poteva anche dedurre dal fatto che la funzione $f(x)$ non è dispari, ma $g(x) = f(x) - \pi$ lo è e quindi tutti gli a_n di g sono nulli e concludere notando che traslare di una costante una funzione non si fa altro che modificare il coefficiente a_0 lasciando inalterati tutti i rimanenti coefficienti. Tale serie converge puntualmente su tutto $[0, 2\pi)$, non può convergere uniformemente su tutto $[0, 2\pi)$ ma solo sui compatti in esso contenuti (la funzione data è discontinua in 0) mentre non ci sarà convergenza totale in quanto i b_n sono i termini di una serie divergente.

Notiamo infine che applicando la formula di Parseval si ottiene l'identità

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Soluzione 1.33 Poiché la funzione è dispari lo sviluppo è di soli seni. Si ha

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ \frac{4}{\pi n} & n \text{ dispari}, \end{cases}$$

quindi lo sviluppo è

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)} \operatorname{sen}(2n+1)x.$$

La media di f è nulla, per cui a_0 è nullo. Usando la formula che lega i coefficienti di Fourier di una funzione con quelli di una sua primitiva, si ha che lo sviluppo di

$$F(x) = \int_{-\pi}^x f(t) dt = |x| - \pi$$

è dato da

$$|x| - \pi = -\frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)^2} \cos(2n+1)x$$

dove $A_0 = \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} [|x| - \pi] dx = -\pi^2/\pi = -\pi$. Per cui lo sviluppo di $|x|$ in $(-\pi, \pi]$ è

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)^2} \cos(2n+1)x.$$

Soluzione 1.34 La funzione è pari, per cui il suo sviluppo è fatto di soli coseni. Si ha che $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = 2\pi^3/3$ e

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \, dx &= x^2 \frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x \frac{\sin nx}{n} dx \\ &= 2x \frac{\cos nx}{n^2} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} 2 \frac{\cos nx}{n^2} dx = (-1)^n \frac{4\pi}{n^2} \end{aligned}$$

per cui lo sviluppo è dato da

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nx.$$

Poiché l'estensione a tutto \mathbb{R} è C^1 a tratti e continua si ha convergenza uniforme su tutto \mathbb{R} . In particolare per $x = \pi$ si ha

$$f(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} (-1)^n = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

da cui si ricava

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Soluzione 1.35 Il periodo T è 2, calcoliamo quindi i coefficienti:

$$a_0 = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1}^1 f(x) \cos nx\pi \, dx = \int_0^1 x \cos nx\pi \, dx \\ &= x \left(\frac{1}{n\pi} \sin nx\pi \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{n\pi} \sin nx\pi \, dx \\ &= -\frac{1}{n\pi} \left(-\frac{1}{n\pi} \cos nx\pi \right) \Big|_0^1 = \begin{cases} -\frac{2}{n^2\pi^2} & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \int_{-1}^1 f(x) \cos nx\pi \, dx = \int_0^1 x \operatorname{sen} nx\pi \, dx \\
&= x \left(-\frac{1}{n\pi} \cos nx\pi \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{n\pi} \cos nx\pi \, dx \\
&= (-1)^{n+1} \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{n\pi} \left(\frac{1}{n\pi} \operatorname{sen} nx\pi \right) \Big|_0^1 = (-1)^{n+1} \frac{1}{n\pi}
\end{aligned}$$

quindi lo sviluppo è

$$\frac{1}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)^2 \pi^2} \cos(2n+1)\pi x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen} nx\pi.$$

Converge puntualmente ad $f(x)$ per $x \in (-1, 1)$, ad $\frac{1}{2}$ per $x = -1$ e $x = 1$. La convergenza uniforme c'è solo negli insiemi del tipo $[a, b] \subset (-1, 1)$ visto che il limite non è continuo. Valutiamo ora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$. Per $x = 1$ la serie converge al valore $1/2$ per cui

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \frac{1}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)^2 \pi^2} \cos(2n+1)\pi + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen} nx\pi \\
&= \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)^2} \pi^2
\end{aligned}$$

da cui

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Ora per la somma $\sum_n \frac{1}{(2n)^2}$ possiamo procedere in due modi: sfruttare l'esercizio precedente dal quale sappiamo che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ per cui otteniamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{24},$$

oppure, ignorando il risultato dell'esercizio precedente, osservare che $\sum_n \frac{1}{(2n)^2} = \sum_n \frac{1}{4n^2}$ per cui da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

dedurre che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \frac{4}{3} \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{24}.$$

Soluzione 1.36 Possiamo semplificare i calcoli tracciando il grafico della estensione periodica di f e notando che su $(-\pi, \pi]$ la funzione coincide con $|x|$ (si veda la Figura 1.3). Calcoleremo quindi

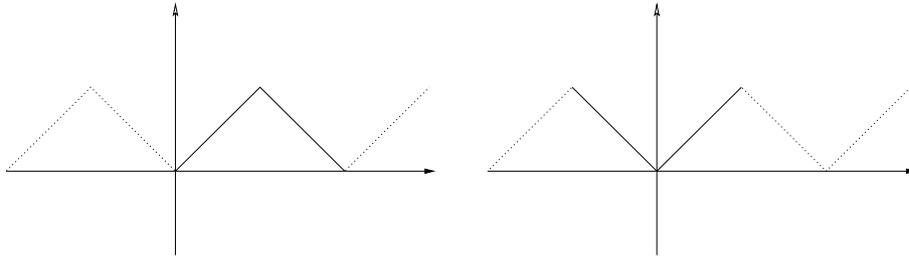


Figura 1.3:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx dx = 2 \int_0^{\pi} x \cos nx dx.$$

Quindi i coefficienti sono dati da:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \pi$$

e per $n > 0$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x}{n} \operatorname{sen} nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \operatorname{sen} nx dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[0 + \frac{1}{n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{2}{\pi n^2} [(-1)^n - 1] \end{aligned}$$

per cui

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ pari} \\ -\frac{4}{\pi n^2} & \text{se } n \text{ dispari.} \end{cases} \quad (1.5)$$

Lo sviluppo risulta quindi essere

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)^2} \cos(2k+1)x. \quad (1.6)$$

La convergenza è puntuale e uniforme su tutto \mathbb{R} (perché la funzione è continua e C^1 a tratti), in particolare sull'intervallo $[0, 2\pi]$ al quale eravamo interessati. Se valutiamo la serie per $x = 0$ questa convergerà al valore $f(0) = 0$, per cui si ha

$$\frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)^2} = 0, \quad \text{da cui} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Per l'altra serie sfruttiamo l'uguaglianza di Parseval:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

Per cui da $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = 2\pi^3/3$ otteniamo

$$\frac{2\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(2k+1)^4}$$

e infine

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^2}{16} \left(\frac{2\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{2} \right) = \frac{\pi^4}{96}.$$

Ora valutiamo lo sviluppo della funzione g : si osservi che nell'intervallo $(-\pi, \pi]$ la funzione $f(x) = |x|$ è una primitiva della funzione g , e precisamente

$$f(x) = \pi + \int_{-\pi}^x g(t)dt, \quad \text{cioè} \quad f(x) - \pi = \int_{-\pi}^x g(t)dt.$$

Se denotiamo con α_n e β_n i coefficienti di g

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos nx dx, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \operatorname{sen} nx dx$$

si ha che $\alpha_0 = 0$ e dalle formule che legano i coefficienti della funzione derivata a quelli della funzione si ricava

$$\beta_n = -na_n, \quad \alpha_n = nb_n$$

quindi, conoscendo a_n (si veda (1.5)) e b_n ($b_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$) si ricava immediatamente

$$\beta_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ pari} \\ \frac{4}{\pi n} & \text{se } n \text{ dispari.} \end{cases}$$

per cui

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} \operatorname{sen}(2k+1)x.$$

Infine, quando si chiede uno sviluppo in soli seni o in soli coseni, si sta sottintendendo che la funzione da sviluppare sia o dispari o pari. Se quindi la funzione è definita su di un intervallo del tipo $[0, T]$, si considererà prima l'estensione dispari o pari e quindi si calcoleranno i coefficienti di tale estensione. Ad esempio, se vogliamo lo sviluppo di soli coseni di una data funzione $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, si considera $\tilde{h} : (-T, T]$

$$\tilde{h}(x) = h(x)\chi_{[0, T]}(x) + h(-x)\chi_{(-T, 0)}(x)$$

ed estendendo poi per periodicità a tutto \mathbb{R} tale funzione. Poiché la funzione \tilde{h} è pari il suo sviluppo sarà di soli coseni e

$$\int_{-T}^T \tilde{h}(x) \cos \frac{n\pi}{T} x dx = 2 \int_0^T h(x) \cos \frac{n\pi}{T} x.$$

Se vogliamo uno sviluppo di soli seni si considera

$$\tilde{h}(x) = h(x)\chi_{[0, T]} - h(-x)\chi_{(-T, 0)}(x).$$

Nel nostro caso estendiamo la funzione nel modo seguente:

$$\tilde{f}(x) = -(x+2\pi)\chi_{(-2\pi, -\pi]}(x) + x\chi_{(-\pi, \pi]}(x) - (x-2\pi)\chi_{(\pi, 2\pi]}(x)$$

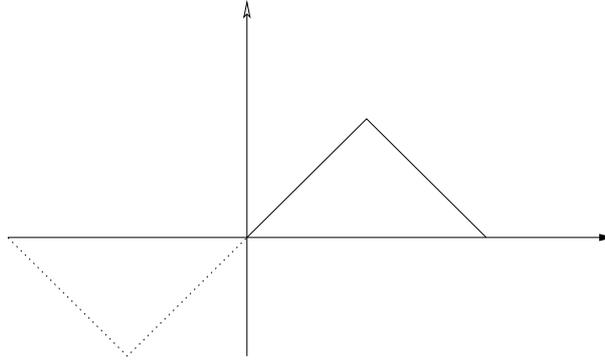


Figura 1.4:

e poi estendo \tilde{f} periodicamente su tutto \mathbb{R} (a questo punto avremo una funzione periodica di periodo 4π). La restrizione di \tilde{f} a $[0, 2\pi]$ è sempre la nostra f . La funzione estesa risulta essere dispari fornendo i coefficienti dei coseni nulli. Valutiamo i coefficienti:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} \frac{n}{2} x dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} \frac{n}{2} x dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} \frac{n}{2} x dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \operatorname{sen} \frac{n}{2} x dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} [-x + 2\pi] \operatorname{sen} \frac{n}{2} x dx. \end{aligned}$$

Abbiamo che

$$\int x \operatorname{sen} \frac{n}{2} x dx = -\frac{2}{n} x \cos \frac{n}{2} x + \frac{4}{n^2} \operatorname{sen} \frac{n}{2} x$$

per cui

$$\begin{aligned} &\text{tra } 0 \text{ e } \pi - \frac{2}{n} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \\ &\text{tra } \pi \text{ e } 2\pi \frac{1}{\pi} \left[- \left(-\frac{4\pi}{n} \cos n\pi + \frac{2\pi}{n} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2} \operatorname{sen} n\pi - \frac{4}{n^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 2\pi \left(-\frac{2}{n} \cos n\pi + \frac{2}{n} \cos \frac{n\pi}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Sommando, poiché

$$\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari,} \end{cases}$$

si ha

$$b_n = \frac{8}{n^2\pi} \operatorname{sen} n \frac{\pi}{2} = \frac{8}{n^2\pi} \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari,} \end{cases}$$

La serie è data dalla somma dei seguenti termini

$$\sum_{n \text{ dispari}} \frac{8}{n^2\pi} \operatorname{sen} n \frac{\pi}{2} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{(2n+1)^2\pi} \operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} x$$

Lo sviluppo trovato è lo sviluppo in soli seni della funzione \tilde{f} , quello in (1.6) è lo sviluppo della funzione f : convergono entrambi (uniformemente) alla funzione originale nell'intervallo $[0, 2\pi)$, ma a funzioni diverse nell'intervallo $(-2\pi, 0]$ (si vedano le Figura 1.3 e Figura 1.4).

Soluzione 1.37 La funzione

$$f(x) = 1 - \frac{2|x|}{\pi}, \quad x \in (-\pi, \pi].$$

come si vede dal grafico, è una funzione pari per cui $b_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si verifica

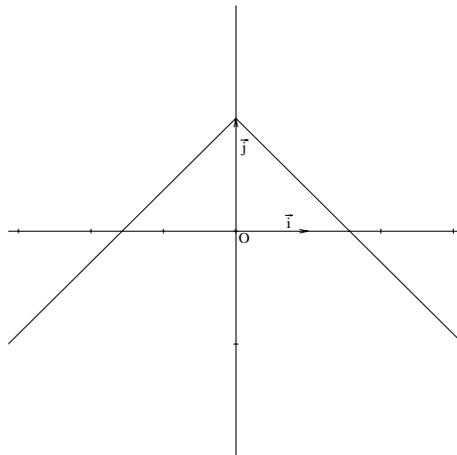


Figura 1.5:

facilmente che anche $a_0 = 0$. Gli altri coefficienti sono dati ($n > 0$)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos nt - \frac{2}{\pi} |t| \cos nt \right] dt \\ &= -\frac{2}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} |t| \cos nt \, dt = -\frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} t \cos nt \, dt = \\ &= -\frac{4}{\pi^2} \left[\frac{t}{n} \operatorname{sen} nt \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \operatorname{sen} nt \, dt \right] \\ &= -\frac{4}{\pi^2} \left[-\frac{1}{n} \left(-\frac{1}{n} \cos nt \right) \right] \Big|_0^{\pi} = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ \frac{8}{n^2 \pi^2} & n \text{ dispari} \end{cases} \end{aligned}$$

per cui la serie è data da

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{(2n+1)^2 \pi^2} \cos(2n+1)x$$

che converge uniformemente su tutto \mathbb{R} (visto che il prolungamento periodico a tutto \mathbb{R} di f è continuo e C^1 a tratti). La serie converge anche totalmente visto che

$$\sup_{x \in (-\pi, \pi]} \left| \frac{8}{(2n+1)^2 \pi^2} \cos(2n+1)x \right| = \frac{8}{(2n+1)^2 \pi^2}.$$

Per calcolare le due serie, si può valutare la funzione in $x = 0$ e usare l'uguaglianza di Parseval.

Soluzione 1.38 Richiedere lo sviluppo in serie di soli coseni significa voler scrivere

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

e quindi significa richiedere che la funzione assegnata deve essere pari. Nel testo la funzione viene assegnata su di un intervallo di ampiezza π e si richiede che deve essere 2π , quindi bisogna estendere tale funzione, e l'estensione che quindi si farà sarà l'estensione pari. Sfruttando la parità della funzione, abbiamo che

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = -\frac{\pi^2}{3} \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{n^2} ((-1)^n + 1) \\ b_n &= 0. \end{aligned}$$

Quindi la serie di Fourier sarà totalmente convergente in quanto gli a_n sono i termini di una serie convergente, e quindi converge uniformemente su tutto $(-\pi, \pi]$.