Capitolo 1

Curve

Esercizio 1.1 Scrivere i versori tangenti delle seguenti curve piane:

1. $\varphi(t) = (t - 2, t + \text{sen}t)$, $t \in \mathbb{R}$;
2. $\varphi(t) = (te^t, \ln(1 + t))$, $t \in (-1, +\infty)$;
3. $\varphi(t) = (r \cos t, r\text{sen}t)$, $t \in \mathbb{R}$;
4. $\varphi(t) = (t|t|, t - \cos t)$, $t \in \mathbb{R}$;

Esercizio 1.2 Scrivere l'equazione della retta tangente alle seguenti curve nei punti indicati:

1. $\varphi(t) = (t^2, t^3)$ in $(1, 1)$;
2. $\varphi(t) = (\text{sen}t, \pi - t)$ in $(0, 0)$;
3. $\varphi(t) = (\text{sen}t \cos t - t, \cos^2 t + \frac{1}{\text{sen}t})$ in $(-\frac{\pi}{2}, 1)$;
4. $\varphi(t) = (t, t^2, \frac{1}{t^3})$ in $(1, 1, 1)$.

Esercizio 1.3 Studiare le seguenti curve parametrizzate, descrivendone le principali proprietà e calcolandone la lunghezza:

1. $\varphi : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (t, |t|)$;
2. $\varphi : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (t^2, t^3)$;
3. $\varphi : [-2, 8] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (1 - \cos t + (2 - t)\text{sen}t, \text{sen}t + (2 - t) \cos t)$;

Esercizio 1.4 Calcolare la lunghezza delle seguenti curve cartesiane del piano:

1. $y = \ln x$, $x \in [3/4, 4/3]$;
2. $y = \ln \frac{e^x+1}{e^x-1}$, $x \in [1, 2]$;
3. $x = e^y$, $y \in [1, 2]$;
4. $y = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$, $x \in [0, a]$ (asteroide);
5. $y = \frac{3x}{4} + \ln x$, $x \in [\frac{18}{25}, \frac{51}{25}]$.

Esercizio 1.5 Calcolare le lunghezze delle seguenti curve piane in coordinate polari esplicite;

1. $\varrho = 2a(1 + \cos\vartheta)$, $\vartheta \in [-\pi, \pi]$ (cardioide);
2. $\varrho = ae^{\vartheta}$, $\vartheta \in [0, \pi/6]$ (spirale Archimedea);
3. $\varrho = \vartheta^2$, $\vartheta \in [0, 3/2]$;
4. $\varrho = a\text{sen}^5(\frac{\vartheta}{5})$, $\vartheta \in [0, \frac{5\pi}{6}]$.

Esercizio 1.6 Studiare le proprietà principali, calcolandone la lunghezza, della cicloide, dell'epicicloide e dell'emicicloide, cioè delle curve $\varphi : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2$ definite da

$$\varphi(t) = (Rt - r\text{sen}t, R - r\cos t)$$

con $r = R$, $r < R$ ed $r > R$ rispettivamente.

Esercizio 1.7 Si consideri il folium di Cartesio $r : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}^2$,

$$r(t) = (t(t-1), t(t-1)(2t-1));$$

dopo averne discusso le principali proprietà, tra cui la regolarità, si scrivano le equazioni delle rette tangente e normale al sostegno della curva in $r(1/4)$.

Esercizio 1.8 Dato l'asteroide $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$,

$$r(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t),$$

si calcoli il parametro d'arco $s(t)$ per $t \in [0, \pi/2]$ e per $t \in [\pi/2, \pi]$. Si riparametrizzi quindi la curva usando tale parametro, cioé si definisca $\varphi(s) = \varphi(s(t)) := r(t)$ e si verifichi che $\|\varphi'(s)\| = 1$. Si dimostri inoltre che la curva é regolare a tratti ma non regolare. Si calcoli infine la curvatura dell'asteroide usando sia la parametrizzazione φ, che la parametrizzazione r.

Esercizio 1.9 Si studino le principali proprietà della spirale definita in coordinate polari da $\varrho : [0, 2\pi] \to [0, +\infty)$,

$$\varrho(\vartheta) = \vartheta;$$

si determini quindi la sua lunghezza e la sua curvatura.

Esercizio 1.10 Calcolare le lunghezze delle curve nello spazio definite da:

1. $\varphi : [0, 2] \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(t) = (t, t^2/\sqrt{2}, t^3/3)$;
2. $\varphi : [0, 2]$, $\varphi(t) = (t, 3t^2/2, 3t^3/2)$;
3. $\varphi : [0, \pi/2]$, $\varphi(t) = (t\cos t, t\text{sen}t, t)$;
4. $\varphi : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(t) = (\frac{\cos 2t}{4}, \cos^3 t, \text{sen}^3 t)$
5. la curva definita da
$$\begin{cases} y = x^2 \\ 3z = 2xy \end{cases}$$
e congiungente il punto $(0, 0, 0)$ al punto $(2, 4, 8/3)$;

6. $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(t) = (e^{2t}, 2e^t, t)$;

7. $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(t) = (\frac{8}{3}t^{\frac{3}{2}}, 2t^2, 2t-1)$.

Calcolare infine l'angolo tra le ultime due curve nel punto $(1,2,0)$, l'ascissa curvilinea e i versori della terna intrinseca.

Esercizio 1.11 Calcolare per la curva

$$\varphi(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, \sqrt{2}e^t)$$

l'ascissa curvilinea $s(t)$ a partire dal punto $t = 0$ e riscrivere l'equazione della curva assumendo come parametro s. Calcolare quindi la terna intrinseca e provare che formano angoli costanti con l'asse z.

Esercizio 1.12 Si calcoli la curvatura della spirale cilindrica $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$$r(t) = (\cos t, \sin t, t).$$

Esercizio 1.13 (**Problema Isodiametrico**) Dimostrare che tra tutte le curve chiuse di diametro 2, la circonferenza è quella che racchiude una regione di area massima (si tenga presente che per un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$, si definisce il diametro tramite

$$\mathrm{diam} A = \sup_{x,y\in A} \|x - y\|.$$

Suggerimento: si osservi prima di tutto che conviene che l'insieme sia convesso per racchiudere area maggiore, e quindi si ponga il sistema di coordinate in un punto della curva con un asse tangente alla curva e uno perpendicolare, e calcolare quindi l'area usando le coordinate polari.

1.1 Soluzioni

Soluzione 1.1

1. Calcoliamo la derivata della curva;

$$\varphi'(t) = (1, 1 + \cos t), \qquad \|\varphi'(t)\| = \sqrt{2 + 2\cos t + \cos^2 t}$$

da cui si ottiene che il versore tangente è dato da

$$T_\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2 + 2\cos t + \cos^2 t}}(1, 1 + \cos t).$$

In particolare, per $t = \pi/2$, la curva passa per il punto $(\pi/2 - 2, \pi/2 + 1)$ ed ha in tale punto versore tangente

$$T_\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

2. Si ottiene

$$\varphi'(t) = \left(e^t(t+1), \frac{1}{t+1}\right), \qquad \|\varphi'(t)\| = \frac{\sqrt{e^{2t}(t+1)^4+1}}{t+1}$$

da cui

$$T_\varphi(t) = \frac{t+1}{\sqrt{e^{2t}(t+1)^4+1}}\left(e^t(t+1), \frac{1}{t+1}\right).$$

In particolare, per $t = 0$, la curva passa per il punto $(0,0)$ ed ha in tale punto versore tangente

$$T_\varphi(0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

3. Si ottiene

$$\varphi'(t) = (-r\mathrm{sen}t, r\cos t), \qquad \|\varphi'(t)\| = r$$

da cui

$$T_\varphi(t) = (-\mathrm{sen}t, \cos t).$$

4. Si ottiene

$$\varphi'(t) = \left(|t| + \frac{t^2}{|t|}, 1+\mathrm{sen}t\right), \qquad \|\varphi'(t)\| = \sqrt{1+4t^2+\mathrm{sen}^2t+2\mathrm{sen}t}$$

da cui

$$T_\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2+\mathrm{sen}^2t+2\mathrm{sen}t}}\left(|t| + \frac{t^2}{|t|}, 1+\mathrm{sen}t\right).$$

In particolare, per $t = \pi$, la curva passa per il punto $(\pi^2, \pi+1)$ ed ha in tale punto versore tangente

$$T_\varphi(\pi) = \left(\frac{\pi^2}{\sqrt{1+4\pi^2}}, \frac{\pi+1}{\sqrt{1+4\pi^2}}\right).$$

Soluzione 1.2

1. La curva passa nel punto indicato per $t = 1$. Inoltre,

$$\varphi'(t) = (2t, 3t^2)$$

e quindi la retta tangente, in forma parametrica, è data da

$$r(t) = \varphi(1) + t\varphi'(1) = (1,1) + t(2,3) = (2t+1, 3t+1).$$

In forma cartesiana, tale retta è individuata dall'equazione

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}.$$

2. La curva passa nel punto indicato per $t = \pi$. Inoltre,

$$\varphi'(t) = (\cos t, -1)$$

e quindi la retta tangente, in forma parametrica, è data da

$$r(t) = \varphi(\pi) + t\varphi'(\pi) = (0,0) + t(-1,-1) = (-t,-t).$$

In forma cartesiana, tale retta è individuata dall'equazione

$$y = x.$$

3. La curva passa nel punto indicato per $t = \frac{\pi}{2}$. Inoltre,

$$\varphi'(t) = \left(2\cos^2 t - 2, -2\cos t \operatorname{sen} t - \frac{\cos t}{\operatorname{sen}^2 t}\right)$$

e quindi la retta tangente, in forma parametrica, è data da

$$r(t) = \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) + t\varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(-\frac{\pi}{2}, 1\right) + t(-2, 0) = \left(-2t - \frac{\pi}{2}, 1\right).$$

In forma cartesiana, tale retta è individuata dall'equazione

$$y = 1.$$

4. La curva passa nel punto indicato per $t = 1$. Inoltre,

$$\varphi'(t) = \left(1, 2t, -\frac{3}{t^4}\right)$$

e quindi la retta tangente, in forma parametrica, è data da

$$r(t) = \varphi(1) + t\varphi'(1) = (1, 1, 1) + t(1, 2, -3) = (t + 1, 2t + 1, -3t + 1).$$

In forma cartesiana, tale retta è individuata dalle equazioni

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = 4 - 3x. \end{cases}$$

Soluzione 1.3

1. La curva data è una curva semplice, non chiusa e non regolare in quanto non derivabile per $t = 0$; si noti che non può neanche esistere una riparametrizzazione della curva che la renda regolare in quanto non esiste un versore tangente al sostegno della curva nel punto $(0, 0)$ (si veda Figura 1.1). Per vedere meglio questo fatto, possiamo considerare il versore tangente, che è dato da

$$T_\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1) & t \in [-1, 0) \\ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) & t \in (0, 1]. \end{cases}$$

Dato che tale versore è discontinuo per $t = 0$, se ne deduce che la curva non è regolare. È però regolare a tratti in quanto regolare in $[-1, 0]$ e $[0, 1]$. La sua lunghezza è data da

$$l(\varphi, [-1, 1]) = \int_{-1}^{1} \|\varphi'(t)\| dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2}.$$

Si noti infine che la curvatura è nulla in quanto $\varphi''(t) = 0$ per $t \neq 0$, mentre in 0 la derivata seconda non esiste (a meno di non considerare i limiti destro e sinistro per $t \to 0$).

2. La curva è semplice, non chiusa e non regolare in quanto $t = 0$ si ha $\varphi'(0) = 0$; anche in questo caso, non esistendo un versore tangente al sostegno nel punto $(0, 0)$ (si veda sempre la Figura 1.1), non potrà esistere una riparametrizzazione che la rende una curva regolare. Per vedere meglio questo, basta scrivere il versore tangente
$$T_\varphi(t) = \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|} = \frac{1}{|t|\sqrt{4+9t^2}}(2t, 3t^2),$$
notando che
$$\lim_{t\to 0^-} T_\varphi(t) = (-1, 0), \qquad \lim_{t\to 0^+} T_\varphi(t) = (1, 0).$$
La curva è però regolare a tratti e la sua lunghezza è data da
$$\begin{aligned} l(\varphi, [-1, 1]) &= \int_{-1}^{1} \|\varphi'(t)\| dt = \int_{-1}^{1} |t|\sqrt{4+9t^2} dt = 2\int_0^1 t\sqrt{4+9t^2} dt \\ &= \frac{2}{27}(13\sqrt{13} - 8). \end{aligned}$$
L'accelerazione scalare sarà data da
$$a(t) = \langle \varphi''(t), T_\varphi(t)\rangle = \frac{2t(2+9t^2)}{|t|\sqrt{4+9t^2}}.$$
La curvatura si puó determinare dalla relazione
$$v^2(t)k(t)N_\varphi(t) = \varphi''(t) - a(t)T_\varphi(t) = \frac{6t}{4+9t^2}(-3t, 2),$$
da cui, tenendo conto che $v^2(t) = t^2\sqrt{4+9t^2}$,
$$k(t) = \frac{6}{t\sqrt{4+9t^2}^3}$$

3. La curva non è semplice, non è chiusa e non è regolare (vedere figura Figura 1.1). Per la regolarità, si nota che
$$\varphi'(t) = (2-t)(\cos t, \mathrm{sen} t),$$
da cui
$$T_\varphi(t) = \frac{2-t}{|2-t|}(\cos t, -\mathrm{sen} t) = \begin{cases} (\cos t, -\mathrm{sen} t) & \text{se } t < 2 \\ (-\cos t, \mathrm{sen} t) & \text{se } t > 2. \end{cases}$$
Si nota quindi la non continuità del vettore tangenge per $t = 2$. È regolare a tratti e la sua lunghezza è data da
$$\begin{aligned} l(\varphi, [-2, 8]) &= \int_{-2}^{8} \|((2-t)\cos t, -(2-t)\mathrm{sen} t)\| dt = \int_{-2}^{8} |2-t| dt \\ &= \int_{-2}^{2} (2-t) dt + \int_2^8 (t-2) dt = 26. \end{aligned}$$
Scrivendo quindi
$$\varphi''(t) = (-\cos t, \mathrm{sen} t) - (2-t)(\mathrm{sen} t, \cos t),$$

si ricava subito che

$$a(t) = -\frac{2-t}{|2-t|},$$

mentre dalla formula

$$v^2(t)k(t)N_\varphi(t) = \varphi''(t) - a(t)T_\varphi(t) = -(2-t)(\text{sen}t, \cos t),$$

si ricava che

$$k(t) = \frac{1}{|2-t|},$$

mentre

$$N_\varphi(t) = \begin{cases} -(\text{sen}t, \cos t) & \text{se } t < 2 \\ (\text{sen}t, \cos t) & \text{se } t > 2. \end{cases}$$

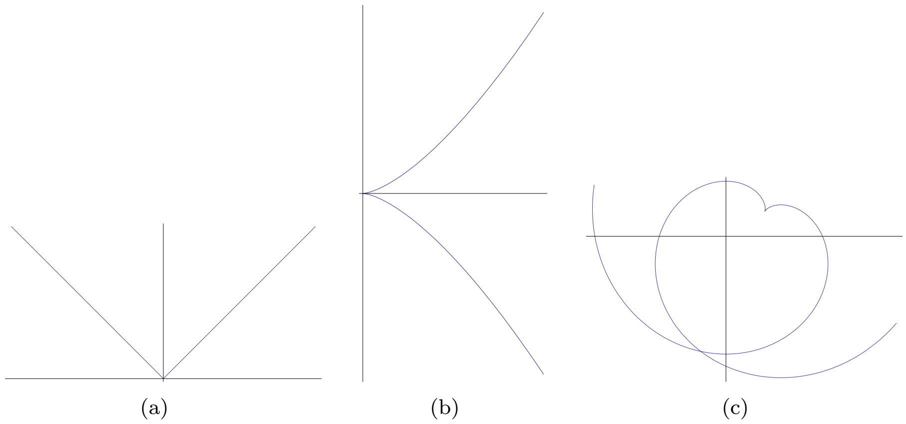

Figura 1.1: Sostegni delle curve $(t, |t|)$, (t^2, t^3), e $(1 - \cos t + (2-t)\text{sen}t, \text{sen}t + (2-t)\cos t)$.

Soluzione 1.4

1. La curva che stiamo considerando è data dalla funzione $\varphi : [3/4, 4/3] \to \mathbb{R}^2$,

$$\varphi(x) = (x, \ln x);$$

quindi siccome

$$\varphi'(x) = \left(1, \frac{1}{x}\right)$$

troviamo che

$$l(\varphi, [3/4, 4/3]) = \int_{3/4}^{4/3} \|\varphi'(x)\| dx = \int_{3/4}^{4/3} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx = \frac{5}{12} + \ln\frac{3}{2}.$$

Ponendo $v(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$, troviamo anche che

$$T_\varphi(x) = \frac{1}{v(x)}\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}(x, 1).$$

Inoltre, dato che

$$\varphi''(x) = \left(0, -\frac{1}{x^2}\right),$$

ne ricaviamo che $a(x) = -\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$, e quindi, dalla relazione

$$v^2(x)k(x)N_\varphi(x) = \varphi''(x) - a(x)T_\varphi(x),$$

se ne deduce che

$$N_\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^6}}(x^3, -1), \qquad k(x) = \frac{\sqrt{1+x^6}}{x^2(1+x^2)^2}.$$

2. Una parametrizzazione è data da $\varphi : [1,2] \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi(t) = \left(t, \ln\frac{e^t+1}{e^t-1}\right);$$

la curva è regolare, semplice e non chiusa con

$$\begin{aligned} l(\varphi,[1,2]) &= \int_1^2 \left\| \left(1, \frac{e^t-1}{e^t+1}\frac{e^t(e^t-1)-e^t(e^t+1)}{(e^t-1)^2}\right) \right\| dt \\ &= \int_1^2 \frac{e^{2t}+1}{e^{2t}-1} dt = \ln(e^2+1) - 1. \end{aligned}$$

3. Una parametrizzazione è data da $\varphi : [1,2] \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi(t) = (e^t, t)$$

ma anche da $\psi : [e, e^2] \to \mathbb{R}^2$

$$\psi(t) = (t, \ln t).$$

In ogni caso si vede che la curva è semplice, regolare non chiusa con

$$\begin{aligned} l(\varphi,[1,2]) &= \int_1^2 \sqrt{1+e^{2t}}dt = \int_{e^2}^{e^4} \frac{\sqrt{1+s}}{2s} ds \\ &= \int_{\sqrt{1+e^2}}^{\sqrt{1+e^4}} \frac{\tau^2}{(\tau^2-1)} d\tau \\ &= \sqrt{1+e^4} - \sqrt{1+e^2} + \ln\sqrt{\frac{\sqrt{1+e^4}-1}{\sqrt{1+e^4}+1}\frac{\sqrt{1+e^2}+1}{\sqrt{1+e^2}-1}}. \end{aligned}$$

4. La curva è semplice, regolare e non chiusa, con parametrizzazione data ad esempio da $\varphi : [0,a] \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi(t) = (t, (a^{2/3} - t^{2/3})^{3/2});$$

avendosi

$$\varphi'(t) = \left(1, -t^{-1/3}(a^{2/3} - t^{2/3})^{1/2}\right)$$

la sua lunghezza sarà data da

$$l(\varphi,[0,a]) = \int_0^a \sqrt{1 + t^{-2/3}(a^{2/3} - t^{2/3})}dt = a^{1/3}\int_0^a t^{-1/3}dt = \frac{3}{2}a.$$

5. Possiamo parametrizzare la curva con $\varphi : [\frac{18}{25}, \frac{51}{25}] \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi(t) = \left(t, \frac{3}{4}t + \ln t\right)$$

ottenendo quindi

$$\varphi'(t) = \left(1, \frac{3}{4} + \frac{1}{t}\right).$$

La lunghezza della curva data risulterà quindi data da

$$\begin{aligned} l\left(\varphi, \left[\frac{18}{25}, \frac{51}{25}\right]\right) =& \int_{\frac{18}{25}}^{\frac{51}{25}} \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{t}\right)^2} dt \\ =& \frac{31}{20} + \ln\frac{27}{17} + \frac{3\ln 2}{5} \end{aligned}$$

Soluzione 1.5

1. Possiamo applicare la formula

$$l(\varphi, [\vartheta_1, \vartheta_2]) = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{\varrho(\vartheta)^2 + \varrho'(\vartheta)^2} d\vartheta$$

per ottenere che

$$\begin{aligned} l(\varphi, [-\pi, \pi]) =& 2a \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{(1 + \cos\vartheta)^2 + \operatorname{sen}^2\vartheta} d\vartheta = 4a\sqrt{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos\frac{\vartheta}{2} d\vartheta \\ =& 8a\sqrt{2} \left[\operatorname{sen}\frac{\vartheta}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 16a\sqrt{2}. \end{aligned}$$

2. Possiamo calcolare direttamente la lunghezza della curva dalla formula

$$l(\varphi, [0, \pi/6]) = a\sqrt{2} \int_0^{\pi/6} e^{\vartheta} d\vartheta = a\sqrt{2}(e^{\pi/6} - 1).$$

3. Si ottiene che

$$\begin{aligned} l(\varphi, [0, \frac{3}{2}]) =& \int_0^{3/2} \sqrt{\vartheta^4 + 4\vartheta^2} d\vartheta = \int_0^{3/2} \vartheta\sqrt{4 + \vartheta^2} d\vartheta \\ =& \frac{61}{24}. \end{aligned}$$

4. Abbiamo che

$$l\left(\varphi, \left[0, \frac{5\pi}{6}\right]\right) = a \int_0^{\frac{5\pi}{6}} \left|\operatorname{sen}^4\frac{\vartheta}{5}\right| d\vartheta = -\frac{5a}{64}(7\sqrt{3} - 4\pi).$$

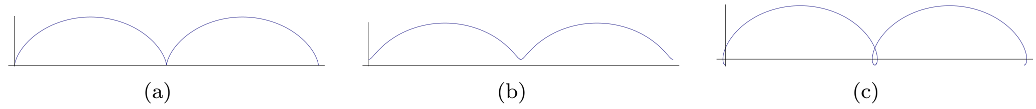

Figura 1.2: Sostegni delle cicloidi con $R = 1$ e $r = 1$, $r = \frac{3}{4}$ e $r = \frac{5}{4}$ rispettivamente.

Soluzione 1.6 Le curve che dobbiamo studiare sono rappresentate in Figura 1.2. Noi considereremo qui solo il caso $r = R$, lasciando gli altri due casi come esercizio. La curva è semplice, regolare a tratti (per $t = 2\pi$ si ha uno spigolo) non chiusa e la sua lunghezza è data da

$$\begin{aligned} l(\varphi, [0, 4\pi]) = &\int_0^{4\pi} \|\varphi'(t)\| dt = R\int_0^{4\pi} \|(1-\cos t, \mathrm{sen} t)\| dt = R\int_0^{4\pi} \sqrt{2 - 2\cos t} dt \\ =&2R\sqrt{2}\int_0^{4\pi} \left|\mathrm{sen}\frac{t}{2}\right| dt = 16R\sqrt{2} \end{aligned}$$

Soluzione 1.7 La funzione data è una curva in quanto le funzioni $t^2 - t$ e $2t^3 - 3t^2 + t$ che definiscono le componenti della funzione r sono continue; sono anche funzioni derivabili con derivata continua, da cui si deduce che r è di classe C^1. Per studiarne la regolarità come curva scriviamo

$$r'(t) = (2t - 1, 6t^2 - 6t + 1);$$

la prima componente di tale derivata si annulla unicamente per $t = 1/2$, ma in corrispondenza di tale valore di t la seconda componente vale $-1/2$, quindi la condizione $r'(t) \neq 0$ è sempre verificata, cioé la curva è regolare. Per dimostrare che la curva è semplice, possiamo sia disegnare il sostegno della curva e rendersi conto che la curva non è semplice. La dimostrazione analitica di questo fatto passa però per lo studio di

$$r(t_1) = r(t_2), \qquad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Se tale identità è verificata se e solo se $t_1 = t_2$, allora la curva sarà semplice, altrimenti se esistono due diversi tempi $t_1 \neq t_2$ che la verificano, allora avremo violato l'iniettività della funzione r. Si tratta quindi di studiare il sistema di equazioni

$$\begin{cases} t_1^2 - t_1 = t_2^2 - t_2 \\ 2t_1^3 - 3t_1^2 + t_1 = 2t_2^3 - 3t_2^2 + t_2. \end{cases}$$

La prima equazione è equivalente a $(t_1 - t_2)(t_1 + t_2 - 1) = 0$; una soluzione sará quindi ovviamente $t_1 = t_2$, che possiamo scartare. Consideriamo quindi il caso $t_1 + t_2 = 1$; la seconda equazione è equivalente a $(t_1 - t_2)(2(t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2) - 3(t_1 + t_2) + 1) = 0$ che ha ancora per soluzione $t_1 = t_2$ che scartiamo. Ponendo $t_1 + t_2 = 1$ si ricava quindi l'equazione

$$t_2^2 - t_2 = 0$$

che ha come soluzione $t_2 = 0$ e $t_2 = 1$, con corrispondenti valori di $t_1 = 1$ e $t_1 = 0$. Questo vuol dire che $r(0) = r(1)$, cioè la curva non è semplice.

La curva non é chiusa; la definizione di curva chiusa è stata data per curve definite su intervalli chiusi e limitati, mentre nel nostro caso $I = \mathbb{R}$. Si potrebbe estendere la definizione di curva chiusa chiamando $a = \inf I$ e $b = \sup I$ (finiti o infiniti che siano) e verificare se

$$\lim_{t\to a} r(t) = \lim_{t\to b} r(t), \tag{1.1}$$

se i due limiti sopra esistono e definiscono un elemento di $\mathbb{R}^n$ (si potrebbe dimostrare che se ciò accade, allora la curva può essere riparametrizzata su di un intervallo chiuso e limitato in modo da definire una curva chiusa). Nel nostro caso però si nota che prendendo le componenti r_2 si ha che

$$\lim_{t\to-\infty} r_2(t) = -\infty, \qquad \lim_{t\to+\infty} r_2(t) = +\infty,$$

quindi la (1.1) non vale.

La retta tangente alla curva nel punto $r(1/4)$ sará data in forma parametrica da

$$r(1/4) + tr'(1/4) = \Big(-\frac{3}{16}, \frac{3}{32}\Big) + t\Big(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}\Big) = \Big(-\frac{3}{16} - \frac{t}{2}, \frac{3}{32} - \frac{t}{8}\Big).$$

Per scrivere tale retta in forma cartesiana, basta ricavare il parametro t dalle equazioni

$$\begin{cases} x = -\dfrac{3}{16} - \dfrac{t}{2} \\ \\ y = \dfrac{3}{32} - \dfrac{t}{8} \end{cases}$$

per ottenere l'equazione

$$y = \frac{x}{4} + \frac{9}{64}.$$

Per la retta normale si procede in modo analogo, considerando l'equazione parametrica

$$\Big(-\frac{3}{16}, \frac{3}{32}\Big) + t\Big(\frac{1}{8}, -\frac{1}{2}\Big) = \Big(-\frac{3}{16} + \frac{t}{8}, \frac{3}{32} - \frac{t}{2}\Big)$$

che in coordinate cartesiane diventa

$$y = -4x - \frac{21}{32}.$$

Soluzione 1.8 Per calcolare il parametro d'arco o ascissa curvilinea, consideriamo

$$r'(t) = 3\sin t\cos t(-\sin t, \cos t)$$

e calacoliamo $v(t) = \|r'(t)\| = 3|\sin t| \cdot |\cos t|$. Abbiamo quindi che per $t \in [0, \pi/2]$

$$s(t) = 3\int_0^t \sin\tau\cos\tau d\tau = \frac{3}{2}\sin^2 t.$$

Se invece consideriamo $t \in [\pi/2, \pi]$, si trova che

$$\begin{aligned} s(t) =& 3\int_0^t |\sin\tau| \cdot |\cos\tau| d\tau = 3\int_0^{\pi/2} \sin\tau\cos\tau d\tau - 3\int_0^t \sin\tau\cos\tau d\tau \\ =& 3 - \frac{3}{2}\sin^2 t. \end{aligned}$$

Se vogliamo riparametrizzare la curva usando l'ascissa curvilinea, dobbiamo ricavarci t in funzione di s; nel caso in cui $t \in [0, \pi/2]$, abbiamo che $s \in [0, 3/2]$ e quindi abbiamo che

$$s = \frac{3}{2}\sin^2 t \qquad \text{se e solo se} \qquad t = \arcsin\sqrt{\frac{2s}{3}}.$$

Nel caso invece in cui $t \in [\pi/2, \pi]$, abbiamo che $s \in [3/2, 3]$; quindi non possiamo considerare direttamente la funzione arcsin in quanto t non appartiene all'intervallo di invertibilitá della funzione sin. Ma se scriviamo $\sin t = \sin(\pi - t)$, possiamo quindi ricavare che

$$s = 3 - \frac{3}{2}\sin^2 t \qquad \text{se e solo se} \qquad t = \pi - \arcsin\sqrt{2 - \frac{2s}{3}}.$$

La curva riparametrizzata diventa quindi $\varphi : [0,3] \to \mathbb{R}^2$,

$$\varphi(s) = r(t(s)) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt{3}}((3-2s)^{3/2}, (2s)^{3/2}) & s \in [0, 3/2] \\ \\ \frac{1}{3\sqrt{3}}(-(2s-3)^{3/2}, (6-2s)^{3/2}) & s \in [3/2, 3]. \end{cases}$$

Verifichiamo la condizione $\|\varphi'(s)\| = 1$; per $s \in (0, 3/2)$, abbiamo

$$\varphi'(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(-(3-2s)^{1/2}, (2s)^{1/2}) = T_\varphi(s)T_\varphi(s)$$

ed è facile la verifica che tale vettore ha norma 1. Notiamo inoltre che

$$\lim_{s \to 3/2^-} \varphi'(s) = (0, 1). \tag{1.2}$$

Infine, per $s \in (3/2, s)$ otteniamo

$$\varphi'(s) = -\frac{1}{\sqrt{3}}((2s-3)^{1/2}, (6-2s)^{1/2}) = T_\varphi(s);$$

si nota quindi che

$$\lim_{s \to 3/2^+} \varphi'(s) = (0, -1). \tag{1.3}$$

Si osserva quindi che $\phi'(s)$ non può essere esteso in $s = 3/2$ in modo da ottenere una funzione continua, quindi la curva è regolare ma non regolare a tratti.

Calcoliamo infine la curvatura di φ; la calcoliamo solo per $s \in (0, 3/2)$, in quanto per gli altri valori di s la si potrà dedurre da ragionamenti di simmetria. Abbiamo che

$$\varphi''(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\frac{1}{\sqrt{3-2s}}, \frac{1}{\sqrt{2s}}\Big),$$

da cui

$$k_\varphi(s) = \|\varphi''(s)\| = \frac{1}{\sqrt{2s(3-2s)}}.$$

Si noti che la curvatura tende a $+\infty$ per $s \to 0$ e $s \to 3/2$, da cui il fatto che il raggio di curvatura tende a 0 in tali punti. Il versore normale alla curva sarà in ultimo dato da

$$N_\varphi(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2s}, \sqrt{3-2s}).$$

Per calcolare la curvatura dell'asteroide usando la parametrizzazione r (considereremo $t \in [0, \pi/2]$), utilizziamo la formula

$$r''(t) = a(t)T_r(t) + v^2(t)k_r(t)N_r(t),$$

dove $a(t) = v'(t)$ con $v(t) = \|r'(t)\|$. Abbiamo già calcolato $v(t)$ che per $t \in [0, \pi/2]$ vale $3\sin t \cos t$; derivando la quantità $r'(t) = 3\sin t\cos t(-\sin t, \cos t)$ si ottiene

$$r''(t) = \underbrace{(3 - 6\sin^2 t)}_{a(t)}\underbrace{(-\sin t, \cos t)}_{T_r(t)} + \underbrace{3\sin t\cos t}_{v^2(t)k_r(t)}\underbrace{(-\cos t, -\sin t)}_{N_r(t)},$$

da cui il fatto che,

$$k_r(t) = \frac{1}{3\sin t\cos t}.$$

Si noti infine che ponendo $t = \arcsin\sqrt{\frac{2s}{3}}$, si ottiene che $k_r(t) = k_\varphi(s)$.

Soluzione 1.9 La curva che in coordinate polari è definita da $\varrho(\vartheta) = \vartheta$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$ definisce una curva $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$$r(\vartheta) = (\vartheta\cos\vartheta, \vartheta\sin\vartheta).$$

Tale curva è di classe C^1, non chiusa e semplice; queste ultime due proprietà si possono ricavare dal fatto che $\vartheta \mapsto \|r(\vartheta)\|$ è una funzione strettamente monotona crescente. Per la regolarità, consideriamo

$$r'(\vartheta) = (\cos\vartheta - \vartheta\sin\vartheta, \sin\vartheta + \vartheta\cos\vartheta),$$

da cui $\|r'(\vartheta)\| = \sqrt{1+\vartheta^2} > 0$; quindi la curva è regolare. La sua lunghezza, tenendo conto del cambio di variabili $x = \sqrt{1+\vartheta^2} - \vartheta$, sarà data da

$$\begin{aligned} l(r, [0, 2\pi]) = &\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\vartheta^2}d\vartheta = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{1+4\pi^2}-2\pi}^{1} \Big(x + \frac{1-x^2}{2x}\Big)\frac{x^2+1}{x^2}dx \\ =&\frac{1}{2}\log(2\pi + \sqrt{4\pi^2+1}) + \pi\sqrt{4\pi^2+1}. \end{aligned}$$

Per calcolare la curvatura, scriviamo $v(\vartheta) = \sqrt{1+\vartheta^2}$, $a(\vartheta) = v'(\vartheta) = \frac{\vartheta}{\sqrt{1+\vartheta^2}}$ e

$$T_r(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{1+\vartheta^2}}(\cos\vartheta - \vartheta\sin\vartheta, \sin\vartheta + \vartheta\cos\vartheta).$$

Ricaviamo la curvatura quindi dalla formula

$$\begin{aligned} v(\vartheta)^2 k_r(\vartheta)N_r(\vartheta) =&r''(\vartheta) - a(\vartheta)T_r(\vartheta) \\ =&\frac{\vartheta^2+2}{\sqrt{1+\vartheta^2}}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+\vartheta^2}}(-\sin\vartheta - \vartheta\cos\vartheta, \cos\vartheta - \vartheta\sin\vartheta)}_{N_r(\vartheta)}, \end{aligned}$$

da cui

$$k_r(\vartheta) = \frac{\vartheta^2+2}{(1+\vartheta^2)^{3/2}}.$$

Soluzione 1.10

1. La curva data è semplice, regolare e non chiusa e la sua lunghezza è data da

$$l(\varphi, [0, 2]) = \int_0^2 \|(1, t\sqrt{2}, t^2)\|dt = \int_0^2 \sqrt{1+2t+t^2}dt = \int_0^2 (1+t)dt = 4.$$

2. La curva è semplice, regolare e non chiusa e la sua lunghezza è data da

$$l(\varphi, [0,2]) = \int_0^2 \|(1, 3t, 9t^2/2)\| dt = \int_0^2 \sqrt{1 + 9t^2 + \frac{81}{4}t^4} dt = \int_0^2 \left(\frac{9}{2}t^2 + 1\right) dt = 14.$$

3. La curva è semplice, regolare e non chiusa e la sua lunghezza è data da

$$\begin{aligned} l(\varphi, [0, \pi/2] &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \|(\cos t - t\mathrm{sen}t, \mathrm{sen}t + t\cos t, 1)\| dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 + t^2} dt \\ &= \frac{\pi}{8}\sqrt{8 + \pi^2} + \mathrm{arcsenh}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

4. La curva data è semplice, regolare a tratti e non chiusa e la sua lunghezza è data da

$$l(\varphi, [-\pi/2, \pi/2]) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{10} |\mathrm{sen}t \cos t| dt = 2\sqrt{10} \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}t \cos t dt = \sqrt{10}.$$

5. La curva che stiamo considerando può essere espressa dalla funzione $\varphi : [0, 2] \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\varphi(t) = \left(t, t^2, \frac{2}{3}t^3\right),$$

che è una curva semplice, regolare e non chiusa. Quindi si ottiene che $\varphi'(t) = (1, 2t, 2t^2)$, da cui

$$l(\varphi, [0, 2]) = \int_0^2 (1 + 2t^2) dt = \frac{22}{3}.$$

6. L'ascissa curvilinea è data

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{4e^{4\tau} + 4e^{2\tau} + 1} d\tau = e^{2t} + t - 1,$$

e quindi

$$l(\varphi, [0, 1]) = s(1) = e^2.$$

7. L'ascissa curvilinea è data da

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{16\tau^2 + 16\tau + 4} d\tau = 2t^2 + 2t,$$

da cui

$$l(\varphi, [0, 1]) = s(1) = 4.$$

Indichiamo ora con φ la curva del punto 6. e con $\tilde{\varphi}$ quella del punto 7. Per calcolare l'angolo θ tra le due curve nel punto $(1, 2, 0)$, bisogna prima di tutto calcolare i valori di t e s per i quali $\varphi(t) = \tilde{\varphi}(s) = (1, 2, 0)$, e poi sfruttare la formula

$$\langle \varphi'(t), \tilde{\varphi}'(s) \rangle = |\varphi'(t)| \cdot |\tilde{\varphi}'(s)| \cos\theta.$$

Si trova che $t = 0$ mentre $s = 1$, da cui

$$\cos\theta = 1,$$

cioè $\theta = 0$; questo si può ricavare direttamente osservando che $\tilde{\varphi}'(1) = 2\varphi'(0)$, cioè i due vettori sono paralleli e con lo stesso verso.

Per quanto riguarda l'ultimo punto dell'esercizio, serve dare la nozione di terna intrinseca. Con essa si intende un sistema di riferimento ortonormale individuato dalla curva stessa e denominato anche *Terna di Frenet*. Il primo elemento di tale base è individuato dal versore tangente; il secondo è individuato dalla derivata rispetto all'ascissa curvilinea del versore tangente; infatti, si nota che il vettore $\frac{d}{ds}T_\varphi(s)$ è ortogonale a $T_\varphi(s)$. Il modulo di tale derivata è la curvatura della curva, mentre il suo versore indica il secondo versore della base intrineca, cioè si ha

$$\frac{d}{ds}T_\varphi(s) = k(s)N_\varphi(s)$$

con $k(s)$ curvatura della curva. La terna intrinseca viene quindi completata da un terzo versore $B_\varphi(s)$, detto anche binormale alla curva, in modo tale che T_φ, N_φ e B_φ sia un sistema ortonormale sinistrorso, cioè $B_\varphi = T_\varphi \wedge N_\varphi$, con $\wedge$ prodotto vettoriale.

Tornando all'esercizio, calcoliamo la terna intrinseca solo per la curva del punto 6., lasciando il punto 7. come esercizio; abbiamo calcolato l'ascissa curvilinea $s(t) = e^{2t} + t - 1$. Per calcolare la terna intrinseca, riparametrizziamo la curva per lunghezza d'arco, consideriamo cioè la curva $\psi : [0, e^2] \to \mathbb{R}^3$, $\psi(s) = \psi(s(t)) = \varphi(t)$. Il versore tangente sarà dato da

$$T_\varphi(t) = T_\psi(s(t)) = \frac{d}{ds}\psi(s) = \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|} = \frac{1}{2e^{2t}+1}(2e^{2t}, 2e^t, 1)$$

mentre

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}T_\psi(s) =& \frac{1}{s'(t)}\frac{d}{dt}T_\varphi(s(t))\\ =& \frac{1}{2e^{2t}+1}\frac{d}{dt}\left(\frac{2e^{2t}}{2e^{2t}+1}, \frac{2e^t}{2e^{2t}+1}, \frac{1}{2e^{2t}+1}\right)\\ =& \frac{1}{(2e^{2t}+1)^3}(4e^{2t}, 2e^t - 4e^{3t}, -4e^{2t}).\end{aligned}$$

La curvatura è quindi data da

$$k_\varphi(t) = \frac{2e^t}{(2e^{2t}+1)^2}$$

mentre

$$N_\varphi(t) = \frac{1}{(2e^{2t}+1)}(2e^t, 1 - 2e^{2t}, -2e^t).$$

La terna intrinseca viene completata dalla binormale

$$B_\varphi(t) = T_\varphi(t) \wedge N_\varphi(t) = \frac{1}{(2e^{2t}+1)^2}(-3e^{2t} - 1, 4e^{3t} + 2e^t, -2e^{4t} - 2e^{2t}).$$

Soluzione 1.11 Calcoliamo l'ascissa curvilinea:

$$s(t) = \int_0^t \|\varphi'(\tau)\| d\tau = 2e^t - 2.$$

Quindi per poter riscrivere la curva in funzione di s, bisogna ricavarsi t e sostituire, cioè

$$\varphi(s) = \frac{s+2}{2}\left(\cos\ln\left(\frac{s+2}{2}\right), \sin\ln\left(\frac{s+2}{2}\right), \sqrt{2}\right).$$

Provare a verificare che $|\varphi'(s)| = 1$; per calcolare la terna intrinseca, il versore tangente è dato dalla velocità della curva normalizzata in modo da avere norma 1, cioè

$$T_\varphi(t) = \frac{1}{2}(\cos t - \sin t, \cos t + \sin t, \sqrt{2})$$

se si utilizza la parametrizzazione in t, mentre se si passa alla variabile s e quindi alla riparametrizzazione dell curva $\psi(s) = \psi(s(t)) = \varphi(t)$, si ha

$$T_\psi(s) = \frac{1}{2}\left(\cos\ln\left(\frac{s+2}{2}\right) - \sin\ln\left(\frac{s+2}{2}\right), \cos\ln\left(\frac{s+2}{2}\right) + \sin\ln\left(\frac{s+2}{2}\right), \sqrt{2}\right).$$

Si noti che il versore normale altro non è che

$$T_\psi(s) = \frac{d\psi(s)}{ds}$$

che, come si può facilmente notare, è parallelo alla velocità della curva ed ha norma 1; si noti infatti che

$$\frac{d\psi(s)}{ds} = \frac{d\varphi(t)}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|}.$$

Per quanto riguarda il versore normale, siccome $|T_\psi(s)| = 1$ per ogni s, allora se si calcola la derivata, non cambiando il modulo, si ottiene sempre e solo la variazione del verso di tale vettore, e tale variazione è ortogonale a T_ψ stesso. Quindi ha senso definire il versore normale come tale derivata, normalizzata in modo da avere norma 1. Quindi, in definitiva:

$$N_\psi(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\cos\ln\left(\frac{s+2}{2}\right) - \sin\ln\left(\frac{s+2}{2}\right), \cos\ln\left(\frac{s+2}{2}\right) - \sin\ln\left(\frac{s+2}{2}\right), 0\right).$$

La binormale B_ψ è semplicemente il versore normale ad entrambi i versori precedenti ed in modo tale che (T_ψ, N_ψ, B_ψ) formino una terna sinistrorsa (come la terna cartesiana $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$). Quindi si trova che

$$B_\psi(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\ln\left(\frac{s+2}{2}\right) - \sin\ln\left(\frac{s+2}{2}\right), \cos\ln\left(\frac{s+2}{2}\right) + \sin\ln\left(\frac{s+2}{2}\right), 0\right).$$

Infine l'angolo con l'asse z è dato dai prodotti scalari

$$\begin{aligned} T_\psi(s) \cdot (0,0,1) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ N_\psi(s) \cdot (0,0,1) &= 0 \\ B_\psi(s) \cdot (0,0,1) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

che non dipendono da s.

Soluzione 1.12 Calcoliamo le derivate della funzione r:

$$r'(t) = (-\sin t, \cos t, 1), \qquad r''(t) = (-\cos t, -\sin t, 0).$$

Quindi $v(t) = \|r'(t)\| = \sqrt{2}$ da cui $a(t) = v'(t) = 0$. La derivata seconda si decompone quindi come

$$r''(t) = v^2(t)k_r(t)N_r(t),$$

da cui il fatto che $N_r(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)$ e

$$k_r(t) = \frac{1}{v^2(t)} = \frac{1}{2}.$$

Soluzione 1.13 Data una curva chiusa $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, una prima osservazione da fare è che se γ racchiude una regione di area massima, allora tale regione deve essere convessa (se non lo fosse, se cioè ci fosse una regione di non convessità, si potrebbe 'tappare' tale regione convessificando l'insieme, operazione che aumenterebbe l'area della regione senza aumentare il diametro dell'insieme). Quindi, se la regione è convessa, ogni punto della curva vede ogni altro punto della curva stessa; possiamo quindi porre un sistema di coordinate centrate in un punto O della curva stessa in cui l'asse y è tangente alla curva e l'asse x è perpendicolare alla curva, diretto verso l'interno della curva. Scrivendo quindi la curva in coordinate polari centrate in tale punto O, otterremmo

$$\begin{cases} x = \varrho \cos\theta \\ \\ y = \varrho \sin\theta \end{cases}$$

con $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ e a θ fissato, il raggio ϱ varia tra 0 e un certo raggio $\varrho(\theta)$. Otteniamo quindi per l'area il seguente risultato

$$A(\gamma) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\varrho(\theta)} \varrho d\varrho d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\varrho(\theta)^2}{2} d\theta.$$

A questo punto notiamo che possiamo restringere l'integrale a $\theta \in [0, \pi/2]$, se oltre a $\varrho(\theta)^2$ consideriamo anche $\varrho(\theta - \pi/2)^2$, e notare infine che $\varrho(\theta)$ e $\varrho(\theta - \pi/2)$ sono i due cateti di un triangolo rettangolo la cui ipotenusa ha estremi che stanno sulla curva, e quindi la sua lunghezza è minore del diametro dell'insieme, cioè

$$\varrho(\theta)^2 + \varrho(\theta - \pi/2) \leq (\mathrm{diam}(\gamma))^2 \leq 4.$$

In definitiva, troviamo che

$$A(\gamma) \leq \pi,$$

e quest'ultimo altro non è che l'area del cerchio di diametro 2.