Successioni e serie di funzioni

Ultimo aggiornamento: 17 febbraio 2017

Consideriamo in questo capitolo successioni e serie di funzioni di una variabile reale e vedremo vari tipi di convergenza. Vedremo anche in un caso particolare funzioni di variabile complessa.

1. Convergenza puntuale e convergenza uniforme

Si consideri una successione di funzioni

$$f_n : I \to \mathbf{R}, \qquad I \text{ sottoinsieme di } \mathbf{R}, \quad n \in \mathbf{N}$$

e una funzione

$$f : J \to \mathbf{R}, \qquad J \text{ sottoinsieme di } I.$$

Definizione 1.1. *Si dice che la successione* $(f_n)_n$ converge puntualmente *ad* f *in* x_o, $x_o \in J$, *se*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x_o) = f(x_o)\,. \tag{1}$$

Si dice che la successione $(f_n)_n$ converge puntualmente *ad* f *in* $A \subset J$, *se*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \textit{per ogni } x \in A\,. \tag{2}$$

Si dice che la successione $(f_n)_n$ converge uniformemente *ad* f *in* $A \subset J$, *se*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0\,. \tag{3}$$

Osservazione 1.2. -

1. $\boxed{\textbf{Convergenza uniforme} \Longrightarrow \textbf{Convergenza puntuale}}$

Si osservi come la (1) sia semplicemente la convergenza di una successione numerica, la successione $(f_n(x_o))_n$, e (2) la stessa cosa valida però in ogni punto di un certo insieme A.
La (3) è invece una convergenza diversa, e risulta più forte di quella puntuale. Infatti si supponga vera la (3): fissato $x \in A$ si ha

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \sup_{y\in A} |f_n(y) - f(y)|$$

per passando al limite si ottiene che vale anche (2). Il viceversa è falso, come mostra il seguente esempio. Si consideri la successione di funzioni

$$f_n : [0,1) \to \mathbf{R}, \qquad f_n(x) = x^n\,.$$

Si vede facilmente che il limite puntuale è la funzione nulla

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \qquad \text{per ogni } x \in [0,1)$$

però

$$\sup_{x\in[0,1)} |f_n(x)| = 1$$

che non converge a 0. Si osservi che, nonostante ciò,

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,a]} |f_n(x)| = \lim_{n\to+\infty} a^n = 0 \qquad per a < 1,$$

per cui vi è convergenza uniforme di $(f_n)_n$ a zero in ogni intervallo $[0,a]$ con $a < 1$.

2. Se una successione converge (puntualmente o uniformemente) in un insieme A converge (puntualmente o uniformemente) in ogni sottoinsieme di A.

3. L'insieme J in cui è definita f può essere diverso dall'insieme I in cui sono definite le funzioni f_n. Prendendo la successione di funzioni

$$f_n : [0,2] \to \mathbf{R}, \qquad f_n(x) = x^n,$$

si vede che la funzione limite f esiste solamente per $x \in [0,1]$, infatti

$$\lim_{n\to+\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1) \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ +\infty & \text{se } x \in (1,2]. \end{cases}$$

EX - Consideriamo l'insieme delle funzioni continue su un intervallo I e a valori reali, $C([a,b])$. Si mostri che le quantità

$$\|f\|_{L^\infty([a,b])} := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

e

$$\|f\|_{L^p(a,b)} := \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}, \qquad p \in [1,+\infty).$$

sono norme sullo spazio vettoriale $C([a,b])$.
Quando non vi è ambiguità sull'insieme di definizione si scrive semplicemente $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_p$.
Si osservi come la convergenza uniforme possa allora essere letta come una convergenza nella cosiddetta norma infinito.

Abbiamo appena visto come la convergenza uniforme sia più forte di quella puntuale. C'è un caso, però, in cui dalla convergenza puntuale si può dedurre anche quella uniforme, esposto nel seguente risultato che non dimostriamo.

Teorema 1.3. *Sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni definite in $[a,b]$ e a valori reali. Si supponga che*

i) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ *per ogni $x \in [a,b]$;*

ii) $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ *oppure* $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x)$
per ogni $x \in [a,b]$ e per ogni $n \in \mathbf{N}$.

Allora $(f_n)_n$ converge uniformemente ad f in $[a,b]$.

Teorema 1.4 (Continuità della funzione limite)**.** *Il limite uniforme di funzioni continue è continuo.*

Dimostrazione - Sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni appartenenti a $C(I)$, I intervallodi $\mathbf{R}$ e si supponga che f_n convergano in I ad una funzione f. Vogliamo vedere che f è continua in I. Si fissi $x_o \in I$ e $\varepsilon > 0$. Bisogna mostrare che esiste $\delta > 0$ tale che

$$|x - x_o| < \delta,\ x \in I \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(x_o)| < \varepsilon\,.$$

Per ipotesi esiste un $\nu \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $x \in I$ si ha $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ per ogni $n \geqslant \nu$. Inoltre, dalla continuità delle f_n, si ha che esiste $\delta > 0$ tale che $|f_\nu(x) - f_\nu(x_o)| < \varepsilon/3$ se $|x - x_o| < \delta$. Quindi si ha

$$|f(x) - f(x_o)| \leqslant |f(x) - f_\nu(x)| + |f_\nu(x) - f_\nu(x_o)| + |f_\nu(x - o) - f(x_o)| < \varepsilon$$

per ogni x soddisfacente $|x - x_o| < \delta$. □

Osservazione 1.5. -

1. Se la convergenza è solo puntuale non è detto che la continuità passi al limite. Basta considerare, come nel punto 3. dell'Osservazione 1.2, $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = x^n$.

2. Nel discutere la convergenza uniforme di una successione di funzioni il teorema appena visto può essere utile in negativo: data una successione di funzioni continue $(f_n)_n$ che converge puntualmente e si conosce che il limite puntuale non è continuo si può concludere che la convergenza non può essere uniforme.

Teorema 1.6 (Passaggio al limite sotto il segno d'integrale)**.** *Sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni continue in I, uniformemente convergente in I ad una funzione f. Allora per ogni intervallo $[a, b] \subset I$ risulta*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{4}$$

Dimostrazione - Per il Teorema 1.4 f è continua, per cui tutti gli integrali in (4) sono definiti. Si fissi ora $\varepsilon > 0$: per ipotesi esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che

$$M_n = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \text{per ogni } h \geqslant \nu\,.$$

Allora

$$\Big| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \Big| \leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b M_n dx < \varepsilon(b - a)$$

per ogni $n \geqslant \nu$. □

Osservazione 1.7. - Il risultato appena visto non può essere esteso a tutto l'insieme I, ma, in genwerale, vale solo su intervalli limitati.
Esempio: si considerino le funzioni costanti

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Chiaramente f_n convergono uniformemente a $f \equiv 0$ su tutto $\mathbf{R}$, ma altrettanto chiaramente

$$+\infty = \int_{\mathbf{R}} f_n(x)\, dx \quad \not\to_n \int_{\mathbf{R}} f(x)\, dx = 0\,.$$

Anche la convergenza uniforme è ottimale, se si ha solo convergenza puntuale il risultato può non essere vero.
Esempio: si considerino le funzioni $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite da

$$f_n(x) = \begin{cases} n & x \in [0, 1/n], \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Chiaramente f_n convergono puntualmente a $f \equiv 0$ su tutto $\mathbf{R}$, ma

$$1 = \int_0^1 f_n(x)\, dx \quad \not\to_n \int_0^1 f(x)\, dx = 0\,.$$

Che regolarità possiamo aspettarci per una funzione che è il limite uniforme di funzioni di classe C^1? Vediamo di rispondere con l'esempio che segue: si considerino le funzioni (che in realtà sono derivabili ben più di una volta)

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}\,, \qquad x \in [-1, 1]\,.$$

Il limite, puntuale ed uniforme, è dato dalla funzione $f(x) = |x|$. In conclusione, Il limite uniforme di funzioni di classe C^1 (ma anche C^∞) è, a priori, solamente continuo. Per ereditare la regolarità anche sulla derivata ci vuole la convergenza uniforme anche sulla derivata, come mostra il seguente risultato.

Teorema 1.8 (Passaggio al limite sotto il segno di derivata)**.** *Siano* $(f_n)_n$ *una successioni di funzioni* $C^1(I)$*,* I *intervallo di* $\mathbf{R}$*,* $x_o \in I$*,* $f, g : I \to \mathbf{R}$ *due funzioni continue tali che*

$$\begin{array}{lll} f_n & \textit{converge puntualmente ad} \quad f & \textit{in } x_o \in I, \\ f'_n & \textit{converge uniformemente a} \quad g & \textit{in } I\,. \end{array}$$

Allora

$$f \quad \textit{è derivabile in } I, \qquad f' = g,$$
$$(f_n)_n \quad \textit{converge uniformemente ad } f \quad \textit{in } [a, b] \subset I$$

per ogni $[a, b]$ *intervallo chiuso e limitato contenuto in* I*.*

Dimostrazione - Per il Teorema fondamentale del calcolo integrale si ha

$$f_n(x) = f_n(x_o) + \int_{x_o}^{x} f_n'(t)\, dt \qquad \text{per ogni } n \in \mathbf{N}, \quad \text{per ogni } x \in I\,.$$

Passando al limite, usando le ipotesi e il Teorema 1.6 si ottiene

$$f(x) = f(x_o) + \int_{x_o}^{x} g(t)\, dt \qquad \text{per ogni } x \in I\,.$$

Dal Teorema fondamentale del calcolo integrale si deduce che f è derivabile e che $f' = g$. Inoltre

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant |f_n(x_o) - f(x_o)| + \int_{x_o}^{x} |f_n'(t) - f'(t)|\, dt$$

per cui passando all'estremo superiore per $x \in [a, b]$ e al limite per $n \to +\infty$ si conclude. □

2. SERIE DI FUNZIONI

In questo paragarfo considereremo $(f_n)_n$ una successione di funzioni definite in I,

(5) $$f_n : I \longrightarrow \mathbf{R}\,, \qquad n \in \mathbf{N}, \qquad I \text{ sottoinsieme di } \mathbf{R}\,.$$

Come per le serie numeriche si può definire un'altra successione di funzioni, detta delle somme parziali, come segue

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x).$$

Quindi da un punto di vista formale per ogni x fissato si ha una serie numerica e $(S_n)_n$ rappresenta una successione di funzioni. La serie sarà denotata con

(6) $$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

Definizione 2.1. *Diciamo che la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$

1) converge puntualmente *ad* f *in* x_o, $x_o \in I$, *se*
$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x_o) = f(x_o)\,;$$
2) converge puntualmente *ad* f *in* $A \subset I$, *se*
$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = f(x) \qquad \textit{per ogni } x \in A\,;$$
3) converge uniformemente *ad* f *in* $A \subset I$, *se*
$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in A} |S_n(x) - f(x)| = 0\,.$$

Teorema 2.2 (Criterio di Cauchy per le serie di funzioni)**.** *La serie di funzioni* $\sum_n f_n(x)$ *converge puntualmente nel punto* $x_o \in I$ *se e solo se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\nu \in \mathbf{N}$ *tale che per ogni* $n \geqslant \nu$ *e per ogni* $p \in \mathbf{N}$

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon\,.$$

La serie di funzioni $\sum_n f_n(x)$ *converge uniformemente in* I *se e solo se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\nu \in \mathbf{N}$ *tale che per ogni* $n \geqslant \nu$ *e per ogni* $p \in \mathbf{N}$

$$\sup_{x \in I} \left| \sum_{k=n}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon\,.$$

Dimostrazione - Si adatti l'analoga dimostrazione per le serie numeriche. □

Come per le serie numeriche si possono dare altre definizioni di convergenza, come quella assoluta. Vediamo per le serie di funzioni le seguenti definizioni.

Definizione 2.3. *Diciamo che la serie* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$

1) converge assolutamente puntualmente *in* $A \subset I$*, se*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)| \qquad \textit{converge puntualmente in } A\,;$$

2) converge assolutamente uniformemente *in* $A \subset I$*, se*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)| \qquad \textit{converge uniformemente in } A\,;$$

3) converge totalmente *in* $A \subset I$*, se*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{x \in A} |f_n(x)| \qquad \textit{converge in } A\,.$$

Osservazione 2.4. - È immediato che, come nel caso delle serie numeriche, se una serie di funzioni converge assolutamente puntualmente (risp. uniformemente) allora converge puntualmente (risp. uniformemente).
Inoltre, è pure immediato per confronto che se la serie converge totalmente in A allora converge assolutamente puntualmente in A.

Vediamo ora un criterio che assicura la convergenza uniforme: possiamo sintetizzarlo dicendo che se una serie converge totalmente in un certo insieme allora converge anche uniformemente in tale insieme.

Teorema 2.5 (Criterio di Weierstrass)**.** *Siano* I *e* $(f_n)_n$ *come in* (5)*. Supponiamo esista una successione* $(M_n)_n$ *di numeri reali tali che*

$$\sup_{x \in I} |f_n(x)| \leqslant M_n \quad \textit{per ogni } n \in \mathbf{N} \qquad e \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} M_n < +\infty.$$

Allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *converge totalmente e uniformemente (assolutamente).*

Dimostrazione - Che la serie converga totalmente è ovvio dal criterio del confronto per le serie numeriche. Quindi si ha anche la convergenza assoluta puntuale, dal confronto con quella totale, e da quella assoluta si ha la convergenza puntuale semplice. Quindi esiste la somma della serie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \qquad \text{per ogni } x \in \mathbf{R}\,.$$

Per quanto riguarda la convergenza uniforme: si fissi innanzitutto $\varepsilon > 0$. Dal criterio di Cauchy per le serie numeriche si ha che esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n \geqslant \nu$ si ha che

$$\sum_{k=n}^{n+p} M_k < \varepsilon \qquad \text{per ogni } p \in \mathbf{N}\,.$$

Poiché

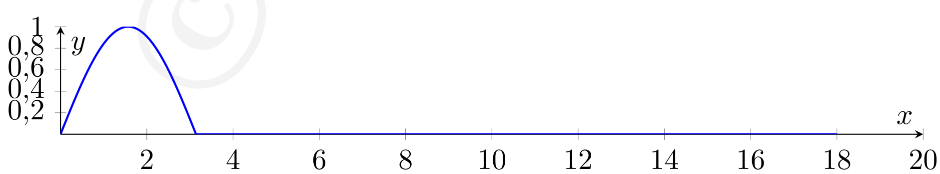
$$\sup_{x\in I} \left| \sum_{k=n}^{n+p} f_k(x) \right| \leqslant \sup_{x\in I} \sum_{k=n}^{n+p} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} \sup_{x\in I} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} M_k < \varepsilon\,.$$

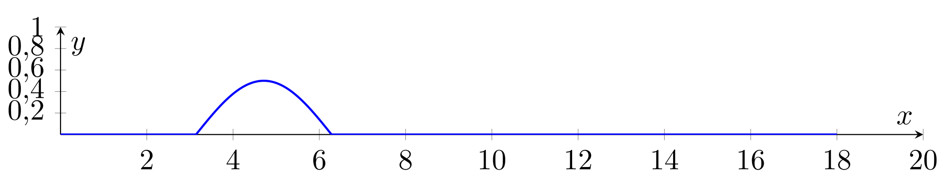
Dal Teorema 2.2 si conclude. □

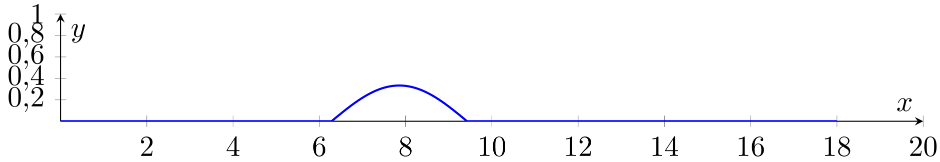
La convergenza totale è uno strumento molto utile per lo studio della convergenza uniforme di serie di funzioni, ma è molto più forte della convergenza uniforme. Può quindi capitare che vi sia convergenza uniforme anche se non vi è convergenza totale. Per capire bene la differenza tra i due tipi di convergenza vediamo un esempio.

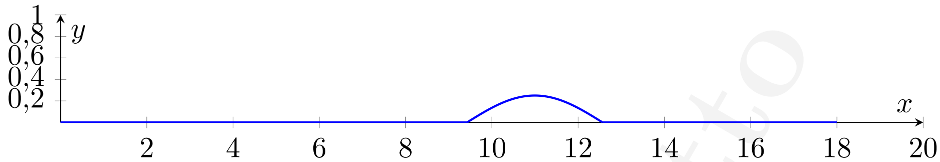
Esempio 2.6. - Si consideri la successione di funzioni ($n \geqslant 1$), alcune delle quali sono riportate in figura,

$$f_n : [0, +\infty) \to \mathbf{R}, \qquad f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}\,|\mathrm{sen}\, x| & \text{se } x \in [(n-1)\pi, n\pi], \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$





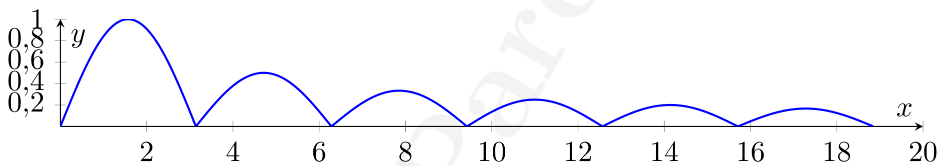




Sommando le f_n è evidente che si ottiene la funzione

$$f(x) = \frac{1}{n}|\operatorname{sen} x| \qquad \text{per } x \in [(n-1)\pi, n\pi]$$

il cui grafico è



D'altra parte è pure evidente che $\sup_{x \geqslant 0} f_n(x) = \dfrac{1}{n}$ e che $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n} = +\infty$, per cui vi è convergenza puntuale, assoluta, uniforme della serie alla funzione f, ma non convergenza totale!

Passiamo ora a vedere l'analogo di alcuni risultati visti nel paragrafo per le successioni. Rienunciamo i fatti più importanti, che risultano semplicemente corollari dei corrispondenti risultati principali, per cui le dimostrazioni sono lasciate per esercizio o accennate.

Continuità del limite - Data una successione $(f_n)_n$ di funzioni continue in $I \subset \mathbf{R}$, se la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente in I ad una funzione f, allora f è continua in I.

Integrazione per serie - Sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni continue in I tale che $\sum_n f_n$ sia uniformemente convergente in I ad una funzione f. Allora per ogni intervallo $[a, b] \subset I$ risulta

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,dx.$$

Dimostrazione - Si applichi il Teorema 1.6 a $F_n := \sum_{k=0}^{n} f_k$. $\square$

Derivazione per serie - Siano $(f_n)_n$ una successioni di funzioni $C^1(I)$, I intervallo di $\mathbf{R}$, $x_o \in I$, $f : I \to \mathbf{R}$ una funzione continua tali che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \quad \text{converge puntualmente a} \quad f \quad \text{in } x_o \in I,$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} f'_n \quad \text{converge uniformemente a} \quad \text{in } I\,.$$

Allora

$$f \quad \text{è derivabile in } I,$$
$$\sum_n f_n \quad \text{converge uniformemente ad } f \quad \text{in } [a,b] \subset I$$

per ogni $[a,b]$ intervallo chiuso e limitato contenuto in I e inoltre

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx} f_n(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \qquad x \in I\,.$$

Dimostrazione - Si applichi il Teorema 1.8 a $F_n := \sum_{k=0}^{n} f_k$. $\square$

3. Serie di potenze reali e complesse

Vedremo in questo paragrafo particolari serie di funzioni, dette serie di potenze. Per questo caso vedremo il caso anche di funzioni a variabile complessa, per questo introdurremo alcune definizioni e risultati preliminari.

3.1. Funzioni di una variabile complessa.

Una funzione di variabile complessa è semplicemente una funzione

$$f : D \to \mathbf{C}, \qquad D \subset \mathbf{C}\,.$$

Supponiamo che D sia un apero di $\mathbf{C}$ e fissiamo $z_o \in D$. La funzione f si dirà derivabile in z_o se il seguente limite esiste ed è un numero complesso

$$\lim_{\substack{z \to z_o,\\ z \in D}} \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o}\,. \tag{7}$$

In tal caso si scrive

$$\lim_{\substack{z \to z_o, \\ z \in D}} \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o} = f'(z_o).$$

La funzione f si dirà derivabile in $\Omega \subset D$ se è derivabile in ogni punto di Ω.

Si faccia attenzione al seguente fatto: scrivendo $z = x + iy$ e $z_o = x_o + iy + o$ $(x, y, x_o, y_o \in \mathbf{R})$, dire che $z \to z_o$ in D significa $|z - z_o| \to 0$, cioè

$$\big|x - x_o + i(y - y_o)\big| = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2} \to 0\,.$$

Di conseguenza il limite in (7) è un limite nella variabile complessa z, ma può essere visto come un limite nelle due variabili reali x e y.
Una funzione complessa derivabile in D che abbia anche derivata continua in D è detta *olomorfa*. Riprenderemo la definizione di funzione olomorfa più avanti.
La definizione di derivata appena vista, che in apparenza è del tutto simile a quella per una funzione scalare di variabile reale, nasconde qualcosa di molto più profondo.
Infatti se una funzione $f : D \to \mathbf{C}$ è olomorfa in D è infinitamente derivabile in D.

Infine (le verifiche sono analoghe al caso reale) è bene sapere che le regole di derivazione sono le stesse che per le funzioni reali: in particolare le formule per la derivazione del prodotto e della composizione di due funzioni sono le stesse che le funzioni reali e analogamente le derivate di tutte le (naturali estesioni) di funzioni elementari.
Esempio: la derivata di $f(z) = z^n$ è $g(z) = nz^{n-1}$ se $n \in \mathbf{N}$, ma anche $n \in \mathbf{Z}$ se si esclude dal dominio di f l'origine.

3.2. Serie di potenze.

Una serie di potenze, reale o complessa, è una particolare serie di funzioni $\sum f_n$ dove f_n è una funzione tipo "potenza intera". Tutti i risultati e le definizioni che vedremo saranno enunciati per serie a termini complessi e valgono, ovviamente, anche per serie a termini reali. Precisamente si ha:

Definizione 3.1 (Serie di potenze)**.** *Si dice* serie di potenze di centro $z_o \in \mathbf{C}$ e coefficienti $(a_n)_n \subset \mathbf{C}$ *la serie di funzioni*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_o)^n, \qquad z \in \mathbf{C} \tag{8}$$

con la convenzione che $a_0(z - z_o)^0 = 0$ *anche per* $z = z_o$.

Osservazione 3.2. - L'insieme di convergenza di una serie di potenze non è mai vuoto, contiene sempre almeno il punto z_o. Può capitare che sia fatto da un solo punto, come nel caso (la serie in questo caso è reale)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n! x^n .$$

Spesso una serie di potenze è scritta nella forma $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Chiaramente è solo un fatto di semplicità e ci si può sempre ridurre a questo caso con una traslazione. D'ora in poi anche noi supporremo $z_o = 0$.

Definizione 3.3 (Raggio di convergenza)**.** *Data una serie di potenze* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *si consideri la quantità*

$$\ell := \limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, +\infty] .$$

Si definisce raggio di convergenza la quantità

$$\rho := \begin{cases} \dfrac{1}{\ell} & \text{se } \ell \in (0, +\infty) , \\ +\infty & \text{se } \ell = 0 , \\ 0 & \text{se } \ell = +\infty . \end{cases} \tag{9}$$

Spesso scriveremo $\rho = \dfrac{1}{\ell}$ anche quando $\ell = 0$ oppure $\ell = +\infty$ sottointendendo (9).

Teorema 3.4 (Proprietà delle serie di potenze)**.** *Si consideri una serie di potenze come in* (8) *e sia* $\rho \in [0, +\infty]$ *il suo raggio di convergenza. Allora: se* $\rho = 0$ *allora la serie converge solo per* $z = z_o$*. Se* $\rho \neq 0$ *si ha*

i) la serie converge assolutamente in $\big\{ z \in \mathbf{C} \,\big|\, |z| < \rho \big\}$*;*

ii) la serie converge totalmente in $\big\{ z \in \mathbf{C} \,\big|\, |z| \leqslant r \big\}$ *con* $0 < r < \rho$*;*

iii) la serie non converge in $\big\{ z \in \mathbf{C} \,\big|\, |z| > \rho \big\}$*.*

Dimostrazione - Al solito, supponiamo per semplicità che $z_o = 0$. Useremo il criterio della radice, o meglio il suo corollario, per le serie numeriche. Si consideri la serie (a termini reali)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| |z|^n .$$

Per $\rho \in (0, +\infty)$ si ha che (si osservi che $|z^n| = |z|^n$)

$$\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n| |z^n|} = |z| \limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|z|}{\rho} .$$

Dal criterio della radice si ha che la serie data converge assolutamente (e quindi anche semplicemente) se

$$\frac{|z|}{\rho} < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad |z| < \rho ;$$

d'altra parte se $|z| > \rho$, cioè se

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n||z^n|} > 1\,,$$

si ha che $\lim_{n\to+\infty} a_n z^n$ non è zero, per cui la serie $\sum a_n z^n$ non può convergere.
Per provare il punto *ii*) si consideri la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\, r^n\,.$$

Si osservi che $M_n := |a_n|\, r^n$ soddisfa $M_n \geqslant |a_n\, z^n|$. Sempre dal criterio della radice si ha

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|\, r^n} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{M_n} = \frac{r}{\rho} < 1,$$

per cui la serie $\sum M_n$ converge e dal Teorema 2.5 si deduce che la serie converge totalmente e quindi anche uniformemente in $\big\{z \in \mathbf{C} \,\big|\, |z| \leqslant r\big\}$.
I casi $\rho = 0$ e $\rho = +\infty$ sono simili e lasciati per esercizio. $\square$

Osservazione 3.5. - Si osservi come nel Teorema 3.4 per un valore di z per cui $|z| = \rho$ nulla viene detto, e nulla si può sapere in generale a priori.
Esempio: si consideri la serie (a termini complessi)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\, z^n\,.$$

Il raggio di convergenza è chiaramente 1. Si deducono le due seguenti cose:
i) la serie converge nel disco, o nel cerchio, $D = \big\{z \in \mathbf{C} \,\big|\, |z| < 1\big\}$;
ii) la serie non converge in $\mathbf{C} \setminus D$.
Per quanto riguarda i punti della circonferenza identificata da $|z| = 1$, a priori non si può dire nulla. Ad esempio considerando $z = 1$ e $z = -1$ si ottengono due serie (reali) che hanno comportamenti opposti, precisamente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}.$$

Osservazione 3.6. - Se si studia una serie di potenze a termini reali lo studio della convergenza risulta più semplice. Infatti i punti nei quali non si ricavano informazioni dal Teorema 3.4 sono sempre e solo due, per cui la verifica può essere fatta singolarmente. Ad esempio, considerando la stessa serie vista nell'osservazione precedente, ma a termini reali

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\, x^n\,, \qquad x \in \mathbf{R}\,,$$

dal teorema si deduce che converge in $(-1,1)$ e non converge in $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$.

Gli unici punti che rimangono esclusi da questa analisi possono essere studiati separatamente. Si conclude che la serie converge puntualmente in $[-1,1)$ e non converge in $(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)$. Dal Teorema 3.4 si conclude anche che la serie $\sum \frac{1}{n}\,x^n$ converge totalmente, e quindi uniformemente in ogni intervallo $[a,b]\subset(-1,1)$. Si può dire qualcosa in più? Sì. Infatti dal criterio di Leibniz per una serie a segni alterni $\sum(-1)^n a_n$ si sa che

$$\left|\sum_{n=k}^{+\infty}(-1)^n a_n\right| \leqslant a_{k+1}\,.$$

Nel nostro esempio, detta f la somma della serie in $[-1,1)$, si ha per $x\in[-1,0]$

$$\begin{aligned}\left|f(x)-\sum_{n=1}^{k-1}(-1)^n\frac{|x|}{n}\right| &= \left|\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{|x|}{n}-\sum_{n=1}^{k-1}(-1)^n\frac{|x|}{n}\right| = \\ &= \left|\sum_{n=k}^{+\infty}(-1)^n\frac{|x|}{n}\right| \leqslant \frac{|x|}{k+1}.\end{aligned}$$

Passando all'estremo superiore su x e poi al limite per $k\to+\infty$ si ottiene

$$\lim_{k\to+\infty}\sup_{x\in[-1,0]}\left|f(x)-\sum_{n=1}^{k-1}(-1)^n\frac{|x|}{n}\right| \leqslant \lim_{k\to+\infty}\sup_{x\in[-1,0]}\frac{|x|}{k+1} \leqslant \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k+1}=0,$$

per cui si ha convergenza uniforme in $[-1,0]$. Riassumendo la serie $\sum\frac{1}{n}\,x^n$:

converge puntualmente in $[-1,1)$,

converge assolutamente in $(-1,1)$,

converge uniformemente in $[-1,b]$ per ogni $b<1$ (e $b>-1$),

converge totalmente in $[a,b]$ per ogni $[a,b]\subset(-1,1)$.

Più in generale (rispetto a quanto visto nell'osservazione precedente) vale il seguente risultato.