Equazioni differenziali ordinarie lineari di grado n

Ultimo aggiornamento: 18 febbraio 2017

1. Equazioni differenziali ordinarie lineari

Un'equazione differenziale ordinaria lineare di ordine n è un'equazione del tipo

$$Lu = u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_2 u'' + a_1 u' + a_0 u = f \tag{1}$$

con $f, a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$ sono funzioni continue in un intervallo $I \subset \mathbf{R}$. L'equazione sarà detta *omogenea* se $f = 0$, cioè se l'equazione è

$$Lu = u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_2 u'' + a_1 u' + a_0 u = 0. \tag{2}$$

Si osservi come la derivata di ordine maggiore ha come coefficiente 1. Si osservi anche come tale equazione può essere trasformata in un'equazione differenziale ordinaria vettoriale semplicemente ponendo $U_1 := u$, $U_2 := u', \ldots U_{n-1} := u^{(n-2)}, U_n := u^{(n-1)}$ possiamo scrivere le equazioni

$$\begin{aligned} U_1' &= U_2 \\ U_2' &= U_3 \\ &\vdots \\ U_{n-1}' &= U_n \\ U_n' &= f(t) - a_{n-1}U_n - \cdots - -a_2 U_3 - a_1 U_2 - a_0 U_1 \end{aligned}$$

e ponendo

$$F(t, U) = \big(U_2, U_3, \ldots U_n, f(t) - a_{n-1}U_n - \cdots - a_2 U_3 - a_1 U_2 - a_0 U_1\big)$$

cioè

$$U' = F(t, U).$$

Osservazione 1.1. - Si osservino i seguenti fatti:

1°) se v e w sono soluzioni di $Lu = 0$ allora $av + bw$ è soluzione di $Lu = 0$ per ogni $a, b \in \mathbf{R}$ (se ammettiamo anche soluzioni complesse lo stesso vale per ogni $a, b \in \mathbf{C}$);

2°) se v e w sono soluzioni di $Lu = f$ allora $v - w$ è soluzione di $Lu = 0$;

3°) se v e w soddisfano $Lv = f$ e $Lw = g$ allora $L(v + w) = f + g$;

4°) in particolare scegliendo $g = 0$ si ottiene che se v e w soddisfano $Lv = f$ e $Lw = 0$ allora $L(v + w) = f$.

2. Equazioni a coefficienti costanti omogenee

D'ora in poi ci concentreremo nel caso in cui i coefficienti a_j nell'equazione (1) sono costanti.
In questo paragrafo inoltre affronteremo il caso delle equazioni a coefficienti costanti e omogenee (si veda (2)). In base al Teorema 2.1 per trovare tutte le soluzioni dell'equazione (2) sarà sufficiente trovare n soluzioni di (2) linearmente indipendenti.

Teorema 2.1. *L'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea* (2) *di grado n con $a_j \in \mathbf{R}$ è uno spazio vettoriale di dimensione n.*

Dimostrazione - Dobbiamo mostrare due cose: la prima è che esistono n funzioni, soluzioni di (2) e linearmente indipendenti; la seconda è che non ne possono esistere più di n, cioè che ogni altra funzione che sia soluzione di (2) è scrivibile come combinazione lineare delle n funzioni trovate precedentemente.
Si fissi $t_o \in I$ e si considerino gli n problemi di Cauchy

$$(C_1) \begin{cases} Lu = 0 \\ u^{(n-1)}(t_o) = 0 \\ \qquad \vdots \\ u'(t_o) = 0 \\ u(t_o) = 1 \end{cases}$$

$$(C_2) \begin{cases} Lu = 0 \\ u^{(n-1)}(t_o) = 0 \\ \qquad \vdots \\ u'(t_o) = 1 \\ u(t_o) = 0 \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$(C_n) \begin{cases} Lu = 0 \\ u^{(n-1)}(t_o) = 1 \\ \qquad \vdots \\ u'(t_o) = 0 \\ u(t_o) = 0. \end{cases}$$

Sappiamo che tali problemi hanno soluzione e tale soluzione è unica. Denotiamo con $v_0, v_1, \dots v_{n-1}$ le soluzioni a tali problemi soddisfacenti (δ_{jk} è detto"delta di Kronecker")

$$v_j^{(k)}(t_o) = \delta_{jk} \qquad j,k \in \{0,1,\dots n-1\}, \tag{3}$$

cioè

$$v_j^{(j)}(t_o) = 1\,, \qquad v_j^{(k)}(t_o) = 0 \quad \text{se } k \neq j.$$

Verifichiamo che tali funzioni sono linearmente indipendenti: si considerino $a_0, a_1, \dots a_{n-1} \in \mathbf{R}$ e si supponga che

$$a_0 v_0(t) + a_1 v_1(t) + \cdots + a_{n-1} v_{n-1}(t) = 0 \tag{4}$$

per ogni $t \in I$. In particolare ciò è valido per $t = t_o$, per cui

$$a_0 v_0(t_o) + a_1 v_1(t_o) + \cdots + a_{n-1} v_{n-1}(t_o) = 0\,.$$

Dalla condizione (3) si ricava che $v_0(t_o) = 1, v_1(t_o) = \cdots = v_{n-1}(t_o) = 0$ e quindi

$$a_0 = 0\,.$$

Derivando (4) e tenendo conto del fatto che $a_0 = 0$ si ottiene

$$a_1 v_1'(t) + \cdots + a_{n-1} v_{n-1}'(t) = 0\,.$$

Sfruttando (3) si ricava, analogamente a prima, che $a_1 = 0$. Iterando il procedimento si ottiene che tutti i coefficienti sono nulli.
Ora vogliamo vedere che ogni altra soluzione di $Lu = 0$ è scrivibile come combinazione lineare di $v_0, v_1, \dots v_{n-1}$. Sia y una soluzione di (2). Tale funzione soddisfa (ovviamente) il problema di Cauchy

$$(C) \begin{cases} Lu = 0 \\ u^{(n-1)}(t_o) = y^{(n-1)}(t_o) \\ \qquad \vdots \\ u'(t_o) = y'(t_o) \\ u(t_o) = y(t_o). \end{cases}$$

Si consideri la funzione

$$v(t) := y(t_o) v_0(t) + y'(t_o) v_1(t) + \cdots + y^{(n-1)}(t_o) v_{n-1}(t)$$

dove v_j è la soluzione del problema (C_j). Si può verificare facilmente che v è soluzione del problema di Cauchy (C) e quindi, per l'unicità della soluzione di (C), le funzioni v e y sono la stessa.
Concludiamo che y è combinazione lineare di $v_0, v_1, \dots v_{n-1}$. $\square$

Questo teorema ci dice prima di tutto che l'equazione ha infinite soluzioni. Non ci deve stupire dal momento che ciò si era già visto per le equazioni di primo grado.

Mentre per le equazioni di primo grado le infinite soluzioni dipendono da un solo parametro, e possono essere pensate come uno spazio vettoriale di dimensione 1, in questo caso esiste una base di n elementi, cioè n soluzioni linearmente indipendenti, le cui combinazioni lineari forniscono tutte le soluzioni dell'equazione omogenea. Ognuna di queste soluzioni dipende da n parametri, i coefficienti rispetto alla base. La base, come per ogni spazio vettoriale, non è unica. La dimostrazione che abbiamo appena visto fornisce un metodo per trovarne una.

In base a ciò è sufficiente trovare n soluzioni di (2) che siano linearmente indipendenti: una generica soluzione di (2) sarà data da una combinazione lineare di queste n funzioni.
Anche l'equazione (1) ha infinite soluzioni: per trovarle tutte basterà trovare una sola soluzione di (1) e aggiungere una generica soluzione di (2), come già fatto notare nel quarto punto dell'Osservazione 1.1.

Veniamo ora la problema di trovare esplicitamente le soluzioni di un'equazione lineare a coefficienti costanti di grado n.
Scriveremo d'ora in poi l'operatore lineare L nella seguente forma

$$P(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_2 D^2 + a_1 D + a_0$$

dove D rappresenta la derivata $\frac{d}{dt}$. Questo modo di vedere l'operatore L avrà, come vedremo, un notevole vantaggio. Infatti ci permetterà di trovare le soluzioni dell'equazione omogenea e in qualche caso particolare anche le soluzioni di equazioni non omogenee.

Commenti sull'algebra degli operatori tipo $P(D)$ - Facciamo un breve commento riguardo gli operatori differenziali a coefficienti costanti. L'operatore

$$\frac{d}{dt} : C^1(I) \to C^0(I)$$

agisce sullo spazio delle funzioni $C^1(I)$, per un dato intervallo $I \subset \mathbf{R}$, come segue: ad una funzione $y \in C^1(I)$ associa la sua derivata, che è una funzione continua, cioè

$$\frac{d}{dt} y = y' \,.$$

Parallelamente a questo si può considerare l'operatore *identità* che denoteremo con Id

$$Id : C^1(I) \to C^1(I) \qquad Id\, y = y \,.$$

In particolare si possono considerare combinazione lineari di questi due operatori che sono definiti e agiscono come segue:

$$\left(\alpha \frac{d}{dt} + \beta Id\right) : C^1(I) \to C^0(I)\,,$$
$$\left(\alpha \frac{d}{dt} + \beta Id\right) y := \alpha y' + \beta y\,.$$

Per semplicità da qui in avanti scriveremo solamente D per denotare l'operatore di derivazione $\frac{d}{dt}$ e ometteremo di scrivere l'operatore Id, per cui l'operatore definito sopra sarà scritto d'ora in poi semplicemente come

$$\alpha D + \beta$$

con l'ovvio significato. Si consideri ora un'equazione del secondo ordine, ad esempio

$$y'' + ay + b = 0\,.$$

Anche in questo caso il termine a sinistra può essere visto come l'applicazione alla funzione y di un opportuno operatore del secondo ordine, che sarà

$$\frac{d^2}{dt^2} + a\frac{d}{dt} + bId$$

che noi semplicemente scriveremo come

$$L = D^2 + aD + b\,.$$

Si osservi come questo operatore agisce dallo spazio $C^2(I)$ in $C^0(I)$. Consideriamo ora un esempio concreto: siano $a = -1$ e $b = -12$, cioè

$$L = D^2 - D - 12\,,$$

e si considerino i due operatori

$$L_1 = D - 4\,, \qquad L_2 = D + 3\,, \qquad L_j : C^1(I) \to C^0(I)\,.$$

Se applichiamo L_1 ad una funzione $y \in C^1(I)$ si ottiene

$$L_1 y = y' - 4y\,.$$

Se ora si suppone che y sia $C^2(I)$ e si applica L_2 a quanto ottenuto precedentemente si ottiene

$$L_2(y' - 4y) = D(y' - 4y) + 3(y' - 4y) = y'' - 4y' + 3y' - 12y$$

cioè, denotando con $\circ$ la composizione tra due operatori,

$$(L_2 \circ L_1)y = y'' - y' - 12y\,.$$

Analogamente si ottiene

$$(L_1 \circ L_2)y = y'' - y' - 12y\,.$$

Si è quindi ottenuto che

$$(L_2 \circ L_1) = (L_1 \circ L_2) = L\,.$$

Se scriviamo chi sono i due operatori $L_2 \circ L_1$ e $L_1 \circ L_2$ l'uguaglianza di sopra diventa

$$\begin{aligned} L_2 \circ L_1 &= (D-4) \circ (D+3) = D^2 - D - 12\,, \\ L_1 \circ L_2 &= (D+3) \circ (D-4) = D^2 - D - 12\,. \end{aligned}$$

Si osservi che l'operazione di composizione tra L_1 e L_2 commuta!
A questo punto si può pensare agli operatori differenziali L_j come polinomi nella variabile D e scrivere

$$D^2 - D - 12$$

indifferentemente come $(D-4)(D+3)$ o come $(D+3)(D-4)$.
Per un generico operatore $L = D^2 + aD + b$, dette $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}$ le sue due radici potremo quindi scrivere

$$L = D^2 + aD + b = (D - \lambda_1)(D - \lambda_2)$$

usando semplicemente l'algebra dei polinomi, cioè moltiplicazione e somma dei numeri complessi (le radici sono a priori complesse), per cui varrà anche la commutazione, per cui L sarà anche

$$L = D^2 + aD + b = (D - \lambda_2)(D - \lambda_1)\,.$$

Più in generale un operatore differenziale di ordine n agirà sullo spazio $C^n(I)$ e restituirà una funzione in $C^0(I)$ e, dette $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ le n radici complesse (ripetendo eventualmente le radici multiple), si avrà che

$$\begin{aligned} D^n + a_{n-1}D^{n-1} + a_{n-2}D^{n-2} + \cdots + a_1 D + a_0 &= \\ = (D - \lambda_1)(D - \lambda_2) \ldots (D - \lambda_n)& \end{aligned}$$

dove l'ordine dei fattori a sinistra può essere cambiato.
In conclusione, gli operatori differenziali del tipo

$$L = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + a_{n-2}D^{n-2} + \cdots + a_1 D + a_0$$

si comportano esattamente come i polinomi e noi d'ora in avanti ci riferiremo ad un operatore L come ad un polinomio P nella variabile D, cioè scriveremo

$$L = P(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + a_{n-2}D^{n-2} + \cdots + a_1 D + a_0\,.$$

Equazioni di grado 1 - Abbiamo già visto le equazioni lineari di grado 1 nel caso più generale in cui il coefficiente non è necessariamente costante. Ad ogni modo per completezza vediamo anche questo semplice caso, anche perché utile per capire il metodo di abbinare ad un'equazione un polinomio. In questo caso l'insieme delle soluzioni sarà uno spazio vettoriale di dimensione 1 e a noi basterà trovare una soluzione non nulla per averle trovate tutte. L'equazione (2) sarà del tipo

$$u' + a_0 u = 0$$

per cui il polinomio P è dato da

$$P(D) = D + a_0.$$

Si osservi come una soluzione di $u' + a_0 u = 0$ è data da $u(t) = e^{-a_0 t}$. L'insieme delle soluzioni è dato da tutti i possibili multipli di questa funzione, cioè $c\, e^{-a_0 t}$ con $c \in \mathbf{R}$.
L'analogia con il polinomio (differenziale) è la seguente: partendo dal presupposto che la soluzione è un'esponenziale, risolvendo l'equazione polinomiale

$$D + a_0 = 0$$

la cui soluzione è $-a_0$ deduciamo che l'esponenziale cercata è $t \mapsto e^{-a_0 t}$.

Equazioni di grado 2 - Si supponga ora che l'equazione sia

$$u'' + a_1 u' + a_0 u = 0 \tag{5}$$

per cui il polinomio P è dato da

$$P(D) = D^2 + a_1 D + a_0.$$

In questo caso la soluzione dell'equazione è meno immediata, ma cercando le soluzioni del polinomio si può capire chi siano le soluzioni dell'equazione. Si supponga che λ_1 e λ_2 siano gli zeri di P, cioè

$$P(D) = D^2 + a_1 D + a_0 = (D - \lambda_1)(D - \lambda_2).$$

Allora una soluzione di $u'' + a_1 u' + a_0 u = 0$ dovrà soddisfare

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)u = (D - \lambda_2)(D - \lambda_1)u. \tag{6}$$

Abbiamo tre possibili casi.

1°) *le due radici di P sono reali e distinte* - In questo caso si noti che una soluzione di

$$(D - \lambda_2)u = 0$$

oppure una soluzione di

$$(D - \lambda_1)u = 0$$

sarà soluzione anche di (6) poiché la soluzione nulla è sempre una soluzione dell'equazione omogenea. Infatti, se $(D - \lambda_2)u = 0$, allora

$$P(D)u = (D - \lambda_1)(D - \lambda_2)u = (D - \lambda_1)\Big[(D - \lambda_2)u\Big] = 0.$$

Analogamente se $(D-\lambda_1)u = 0$ si ha

$$\begin{aligned} P(D)u &= (D-\lambda_1)(D-\lambda_2)u = (D-\lambda_2)(D-\lambda_1)u = \\ &= (D-\lambda_2)\big[(D-\lambda_1)u\big] = 0. \end{aligned}$$

Per cui possiamo concludere che la funzione $u_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ e $u_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ sono due soluzioni dell'equazione $u'' + a_1 u' + a_0 u = 0$. Si osservi che u_1 e u_2 sono linearmente indipendenti: infatti se

$$au_1 + bu_2 = 0$$

si ha che $ae^{\lambda_1 t} + be^{\lambda_2 t} = 0$ per ogni $t \in \mathbf{R}$. Per esempio prendendo $t = 0$ e $t = 1$ si ha che $a + b = 0$ e $ae^{\lambda_1} + be^{\lambda_2} = 0$. Poiché $\lambda_1 \neq \lambda_2$ si conclude che l'unica possibilità è che $a = b = 0$.
Poiché abbiamo trovato due soluzioni lineramente indipendenti dell'equazione concludiamo che tutte le soluzioni sono date da tutte le combinazioni lineari di tali soluzioni, cioè tutte le soluzioni di (5) sono date da

$$c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.

2°) *le due radici di P sono reali e coincidenti* - Supponiamo che $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, cioè

$$P(D) = D^2 + a_1 D + a_0 = (D-\lambda)^2.$$

Una soluzione di (5) dovrà soddisfare

$$(D-\lambda)^2 u = 0.$$

Osservando che possiamo scrivere

$$(D-\lambda)^2 u = (D-\lambda)\Big[(D-\lambda)u\Big]$$

una possibile soluzione è data da una soluzione di

$$(D-\lambda)u = 0,$$

cioè da $u_1(t) = e^{\lambda t}$. Se invece u non risolvesse $(D-\lambda)u = 0$ si avrebbe $(D-\lambda)u \neq 0$. Chiamiamo v la funzione $(D-\lambda)u = u' - \lambda u$. Allora se vogliamo che u risolva $(D-\lambda)^2 u = 0$ si deve necessariamente avere

$$(D-\lambda)v = 0,$$

cioè la funzione v deve essere $e^{\lambda t}$ (o un suo multiplo). Cerchiamo allora la funzione u che risolve

$$(D-\lambda)u = u' - \lambda u = e^{\lambda t}.$$

Usando la formula risolutiva per le equazioni lineari del prim'ordine viste in precedenza si ha che l'espressione generale di una soluzione è data da

$$u(t) = e^{\lambda t}\Big[\int e^{-\lambda t} e^{\lambda t} dt + c\Big].$$

Scegliendo $c = 0$ otteniamo la soluzione

$$u_2(t) = t\, e^{\lambda t}.$$

Si osservi che

$$(D - \lambda) u_2 = e^{\lambda t} \tag{7}$$

e quindi $(D - \lambda)^2 u_2 = 0$. Si osservi che anche in questo caso u_1 e u_2 sono linearmente indipendenti. Infatti

$$a\, e^{\lambda t} + b\, t\, e^{\lambda t} = 0$$

implica che $a = b = 0$ (basti prendere $t = 0$ e $t = 1$).

3°) *le due radici di P sono distinte, complesse e coniugate* - In questo caso possiamo denotare le due radici λ_1 e λ_2 con

$$\alpha + i\beta \qquad \text{e} \qquad \alpha - i\beta\,.$$

Ad ogni modo siamo sempre in presenza di due radici distinte ($\beta \neq 0$). Ragionando come nel primo caso avremo che due possibili soluzioni sono date da

$$e^{\lambda_1 t} \qquad \text{e} \qquad e^{\lambda_2 t}$$

e quindi una generica soluzione sarà data da una combinazione lineare di queste due, cioè da

$$\gamma_1 e^{\lambda_1 t} + \gamma_2 e^{\lambda_2 t}.$$

La differenza con il primo caso è che, essendo λ_1 e λ_2 complessi tale combinazione risulta essere

$$\gamma_1\, e^{\alpha t}\,(\cos\beta t + i \operatorname{sen}\beta t) + \gamma_2\, e^{\alpha t}(\cos\beta t - i \operatorname{sen}\beta t) =$$
$$= (\gamma_1 + \gamma_2)\, e^{\alpha t}\cos\beta t + i\,(\gamma_1 - \gamma_2)\, e^{\alpha t} \operatorname{sen}\beta t.$$

A priori anche i coefficienti scelti per la combinazione lineare potranno essere complessi, per cui la combinazione di sopra è soluzione per ogni $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbf{C}$. Volendo limtarsi a soluzioni reali cerchiamo di scegliere γ_1 e γ_2 opportunamente in modo tale da limitarci a selezionare le funzioni reali. Scegliendo

$$\begin{array}{l} \gamma_1 + \gamma_2 = 1\,, \\ \gamma_1 - \gamma_2 = 0\,, \end{array} \qquad \text{cioè } \gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}$$

si ottiene la funzione reale

$$u_1(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t,$$

mentre con la scelta

$$\begin{array}{l} \gamma_1 + \gamma_2 = 0\,, \\ i\,(\gamma_1 - \gamma_2) = 1\,, \end{array} \qquad \text{cioè } \gamma_1 = -\gamma_2 = -\frac{i}{2}$$

si ottiene la funzione reale

$$u_2(t) = e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}\,\beta t.$$

Si osservi che u_1 e u_2 sono linearmente indipendenti, per cui le soluzioni (reali) di (5) in questo caso sono

$$c_1\,e^{\alpha t}\cos\beta t + c_2\,e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}\,\beta t$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.

Equazioni di grado superiore al secondo - Data un'equazione lineare omogenea come (2) a coefficienti costanti si riescono a trovare le soluzioni se si riescono a trovare gli zeri del polinomio

$$P(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_2D^2 + a_1D + a_0.$$

Supponendo di conoscerli possiamo scrivere

$$P(D) = (D-\lambda_1)^{h_1}(D-\lambda_2)^{h_2}\ldots(D-\lambda_k)^{h_k}$$

con $k \leqslant n$, λ_j distinte, $h_j \in \mathbf{N}$, $h_j \geqslant 1$, e $h_1 + h_2 + \ldots h_k = n$.
Se $\lambda_1 \in \mathbf{R}$ si avranno le h_1 soluzioni

$$\begin{array}{c} e^{\lambda_1 t}, \\ t\,e^{\lambda_1 t}, \\ \vdots \\ t^{h_1-1}\,e^{\lambda_1 t}. \end{array}$$

Se h_1 fosse 1 o 2 abbiamo già visto quali sono le soluzioni. Se $h_1 = 3$ oltre a $e^{\lambda_1 t}$ e a $t\,e^{\lambda_1 t}$ si ha una eventuale funzione non nulla u per cui

$$(D-\lambda_1)^2u \neq 0$$

e

$$(D-\lambda_1)^3u = 0\,.$$

Per cui, chiamando v la funzione $(D-\lambda_1)^2u$ dove u è la funzione che stiamo cercando, si ha che $v = e^{\lambda_1 t}$ (o un suo multiplo). A questo punto si deve risolvere

$$(D-\lambda_1)^2u = e^{\lambda_1 t}.$$

Da (7) ricaviamo che

$$(D-\lambda_1)u = t\,e^{\lambda_1 t}.$$

Applicando la formula risolutiva per le equazioni lineari del primo ordine si ottiene

$$u(t) = e^{\lambda_1 t}\Big[\int e^{-\lambda_1 t} t\, e^{\lambda_1 t} dt + c\Big].$$

Considerando, ad esempio, $c = 0$, si ottiene la soluzione $t^2 e^{\lambda_1 t}$. Iterando il procedimento si ottengono tutte le altre soluzioni. Si osservi che il caso $\lambda_1 = 0$ fornisce le soluzioni

$$1, t, t^2, \ldots t^{h_1 - 1}.$$

Nel caso di radice complessa si ragiona in maniera analoga. Ricordando che se λ_2 è complesso, diciamo $\alpha + i\beta$, allora un'altra radice, diciamo λ_3, sarà $\alpha - i\beta$ e $h_2 = h_3$. Si trovano le soluzioni

$$\begin{array}{rl}
e^{\alpha t} \cos \beta t, & \quad e^{\alpha t} \operatorname{sen} t\beta t \\
t\, e^{\alpha t} \cos \beta t, & \quad t\, e^{\alpha t} \operatorname{sen} t\beta t \\
t^2 e^{\alpha t} \cos \beta t, & \quad t^2 e^{\alpha t} \operatorname{sen} t\beta t \\
\vdots & \qquad \vdots \\
t^{h_2 - 1} e^{\alpha t} \cos \beta t, & \quad t^{h_2 - 1} e^{\alpha t} \operatorname{sen} t\beta t
\end{array}$$

Esempi

1 - Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$u'' - 3u' + 2u = 0\,.$$

L'equazione può essere scritta come

$$(D^2 - 3D + 2)u = 0\,.$$

A questo punto la cosa importante è trovare le due radici dell'equazione $D^2 - 3D + 2 = 0$, oppure se si preferisce di

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0\,.$$

Le due radici sono 1 e 2, quindi abbiamo due radici reali e distinte. Due soluzioni linearmente indipendenti (ma non è l'unica scelta) sono

$$u_1(t) = e^t \qquad \text{e} \qquad u_2(t) = e^{2t}\,.$$

Tutte le soluzioni dell'equazione data sono allora

$$c_1 e^t + c_2 e^{2t}\,, \qquad\qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}\,.$$

2 - Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$u'' - 6u' + 9u = 0\,.$$

Il polinomio è allora $D^2 - 6D + 9 = (D-3)^2$. Abbiamo quindi due radici reali e coincidenti. Due soluzioni linearmente indipendenti sono allora

$$u_1(t) = e^{3t} \qquad \text{e} \qquad u_2(t) = t\, e^{3t}\,.$$

Tutte le soluzioni dell'equazione data sono allora

$$c_1\, e^{3t} + c_2\, t\, e^{3t}\,, \qquad\qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}\,.$$

3 - Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$u'' - 4u' + 5u = 0\,.$$

I due zeri del polinomio $D^2 - 4D + 5$ sono $2+i$ e $2-i$, siamo quindi nel caso di due radici complesse e coniugate. Due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale sono allora

$$u_1(t) = e^{2t} \cos t \qquad \text{e} \qquad u_2(t) = e^{2t} \operatorname{sen} t\,.$$

Tutte le soluzioni dell'equazione data sono allora

$$c_1\, e^{2t} \cos t + c_2\, e^{2t} \operatorname{sen} t\,, \qquad\qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}\,.$$

4 - Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione di terzo grado

$$u''' - u = 0\,.$$

Il problema è quello di trovare gli zeri del polinomio

$$D^3 - 1\,.$$

Quando il polinomio, come in questo caso, ha grado superiore al secondo la cosa può essere complicata o impossibile. In questo caso ci si accorge facilmente che 1 è uno zero del polinomio. Per trovare gli altri due basterà allora dividere per $D-1$ e trovare gli zeri del polinomio di secondo grado così ottenuto. Si ottiene

$$D^3 - 1 = (D-1)(D^2 + D + 1)\,.$$

Gli zeri di $D^2 + D + 1$ sono

$$\frac{1}{2}\big(-1 - i\sqrt{3}\big) \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{2}\big(-1 + i\sqrt{3}\big)$$

per cui tre soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale $u''' - u = 0$ sono

$$u_1(t) = e^t\,, \qquad u_2(t) = e^{-\frac{t}{2}} \cos \sqrt{3}\, t\,, \qquad u_3(t) = e^{-\frac{t}{2}} \operatorname{sen} \sqrt{3}\, t\,.$$

Tutte le soluzioni sono date da

$$c_1\, e^t + c_2\, e^{-\frac{t}{2}} \cos \sqrt{3}\, t + c_3\, e^{-\frac{t}{2}} \operatorname{sen} \sqrt{3}\, t\,.$$

5 - Si risolva il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} u''' - 2u'' + 4u' - 8u = 0 \\ u''(0) = 1 \\ u'(0) = 0 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Se ci si accorge che 2 è una radice del polinomio $D^3 - 2D^2 + 4D - 8$ si ottiene

$$D^3 - 2D^2 + 4D - 8 = (D-2)(D^2+4)\,.$$

Le radici di tale polinomio sono quindi $2, 2i, -2i$ e di conseguenza la soluzione generale dell'equazione omogenea è data da

$$u(t) = c_1\, e^{2t} + c_2 \cos 2t + c_3 \operatorname{sen} 2t\,.$$

Per trovare la soluzione del problema di Cauchy dobbiamo imporre le condizioni iniziali. Deriviamo quindi l'espressione generale della soluzione si ha

$$\begin{aligned} u'(t) &= 2c_1\, e^{2t} - 2c_2 \operatorname{sen} 2t + 2c_3 \cos 2t\,, \\ u''(t) &= 4c_1\, e^{2t} - 4c_2 \cos 2t - 4c_3 \operatorname{sen} 2t\,. \end{aligned}$$

Imponendo le condizioni si ha

$$\begin{aligned} u(0) &= c_1 + c_2 = 0\,, \\ u'(0) &= 2c_1 + 2c_3 = 0\,, \\ u''(0) &= 4c_1 - 4c_2 = 1\,, \end{aligned}$$

da cui $c_1 = 1/8$, $c_2 = c_3 = -1/8$ da cui la soluzione cercata del problema di Cauchy è

$$u(t) = \frac{1}{8}\, e^{2t} - \frac{1}{8} \cos 2t - \frac{1}{8} \operatorname{sen} 2t\,.$$

6 - Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione ($u^{(4)}$ denota la derivata quarta di u)

$$u^{(4)} - u = 0\,.$$

Le soluzioni dell'equazione $D^4 - 1 = 0$ sono

$$1\,, -1\,, i\,, -i\,,$$

da cui le soluzioni dell'equazione differenziale sono

$$c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \operatorname{sen} t\,, \qquad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}\,.$$

7 - Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione

$$u^{(5)} - 2u^{(4)} + 4u^{(3)} - 8u^{(2)} = 0\,.$$

In linea di principio dovremmo risolvere un polinomio di quinto grado, cioè risolvere

$$D^5 - 2D^4 + 4D^3 - 8D^2 = 0\,.$$

Raccogliendo D^2 però ci si riduce ad un polinomio di terzo grado che ha tra le radici 2, per cui, come nell'esempio 5, si ottiene:

$$D^5 - 2D^4 + 4D^3 - 8D^2 = D^2(D^3 - 2D^2 + 4D - 8) = D^2(D-2)(D^2+4)\,.$$

Per cui le radici sono: 0 con molteplicità 2, 2, $2i$ e $-2i$, di conseguenza cinque soluzioni linearmente indipendenti sono

$$e^{2t}, \cos 2t,\ \operatorname{sen} t, 1, t$$

e una generica soluzione sarà

$$c_1\, e^{2t} + c_2 \cos 2t + c_3 \operatorname{sen} 2t + c_4 + c_5 t\,. \tag{8}$$

Lo stesso risultato si può ottenere anche ponendo $u'' = v$ e trasformando l'equazione in

$$v''' - 2v'' + 4v' - 8v = 0\,.$$

Come nell'esempio 5 si ottiene che una generica soluzione sarà data da

$$v(t) = u''(t) = c_1\, e^{2t} + c_2 \cos 2t + c_3 \operatorname{sen} 2t\,,$$

e ora integrando due volte si ottiene prima

$$u'(t) = \frac{c_1}{2}\, e^{2t} + \frac{c_2}{2} \operatorname{sen} 2t - \frac{c_3}{2} \cos 2t + c_4$$

e infine

$$u(t) = \frac{c_1}{4}\, e^{2t} - \frac{c_2}{4} \cos 2t - \frac{c_3}{4} \operatorname{sen} 2t + c_4 t + c_5\,.$$

A patto di rinominare la costanti questa soluzione è la stessa di (8).

3. Equazioni a coefficienti costanti non omogenee

Si consideri l'equazione (1). Per trovare tutte le soluzioni di tale equazione è in realtà sufficiente trovarne una sola, dopodiché sommarci tutte le possibili soluzioni dell'equazione omogenea (2).

L'obiettivo di questo paragrafo è mostrare come trovare una soluzione dell'equazione non omogenea (solo in alcuni casi particolari).

Ci sono dei metodi per trovare una soluzione dell'equazione non omogenea (1). Noi ne vedremo uno che funziona solo per una classe di funzioni particolare; tale metodo va sotto il nome di *metodo degli annichilatori*.

Riscriviamo l'equazione (1) come al solito: detto P il polinomio $P(D) =$

$D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_2D^2 + a_1D + a_0$ l'equazione può essere scritta come

$$P(D)u = f\,. \tag{9}$$

Il metodo che presentiamo si basa sulla seguente supposizione: che f sia a sua volta una soluzione di una equazione differenziale a coefficienti costanti che scriveremo

$$Q(D)f = 0$$

dove Q è un polinomio, diciamo

$$Q(D) = D^k + b_{k-1}D^{k-1} + \cdots + b_2D^2 + b_1D + b_0\,.$$

Allora applicando l'operatore differenziale $Q(D)$ ad entrambi i membri di (9) si ottiene l'equazione omogenea

$$Q(D)P(D)u = 0\,. \tag{10}$$

Questo ci dice le due seguenti cose:

A) che se u è una soluzione di (9), allora u è anche soluzione di (10), per cui possiamo cercare una soluzione di (9) tra le soluzioni di (10);

B) tra le soluzioni di (10) ci sono anche le soluzioni dell'equazione omogenea

$$P(D)u = 0\,. \tag{11}$$

Si osservi inoltre, come già detto nell'Osservazione 1.1, quarto punto, che se u risolve (9) e v risolve (11) allora $u + v$ risolve (9). Quindi se ad una soluzione di (9) sommiamo tutte le funzioni dello spazio vettoriale dato dalle soluzioni dell'omogenea troviamo ancora soluzioni dell'equazione non omogenea (9). In realtà è evidente che non c'è niente altro. Per cui le soluzioni di (9) sono della forma

$$u(t) = c_1u_1(t) + c_2u_2(t) + \cdots + c_nu_n(t) + \bar{u}(t)$$

dove, se P ha grado n, $u_1, \ldots u_n$ sono n soluzioni linearmente indipendenti di (11) e $\bar{u}$ è una soluzione arbitraria di (9).

Quindi una soluzione dell'equazione (9) **va cercata fra le soluzioni (tutte!) di** (10).
Le soluzioni di (9) sono date da una qualunque soluzione di (10) sommata a tutte le soluzioni dell'equazione omogenea, le quali però non ci aiutano nella ricerca di una soluzione $\bar{u}$ di (9). Per cui, tenendo conto delle osservazioni fatte nei punti A) e B), per trovare una soluzione di (9) è sufficiente limitarsi a cercare nell'insieme

$$\{\text{soluzioni di } (10)\} \setminus \{\text{soluzioni di } (11)\}\,. \tag{12}$$

L'insieme indicato in (12) è semplicemente dato delle soluzioni dell'equazione

$$Q(D)u = 0$$

nel caso in cui il polinomio Q **non abbia** radici in comune con il polinomio P. Nel caso in cui il polinomio Q abbia radici in comune con P bisogna tener conto della molteplicità di tali radici, come sarà illustrato in alcuni esempi che seguono (si vedano gli esempi **11.** e **13.**).

Una difficoltà, solo teorica, è che il polinomio QP ha un grado maggiore di quello di P, ma ammesso che si sappia fattorizzare sia P che Q, si sa fattorizzare anche QP. Un'altra difficoltà è trovare il polinomio Q, ma ora vedremo come sia relativamente facile.
Gli operatori differenziali Q sono detti annichilatori.
Nel paragrafo precedente abbiamo visto quali possono essere le soluzioni di un'equazione omogenea: se il dato f deve risolvere l'equazione $Q(D)f = 0$, f dovrà essere una funzione di quelle elencate nel paragrafo precedente.
Ad esempio, se $f(t) = e^t$ l'annichilatore è dato da $Q(D) = D - 1$, e lo stesso sarà per $c\,e^t$ con $c \neq 0$. Vediamo un elenco di possibili dati e dei corrispondenti annichilatori:

$$\begin{array}{cc}
\text{funzione} & \text{annichilatore} \\
 & \\
t^k & D^{k+1} \\
t^k e^{\alpha t} & (D-\alpha)^{k+1} \\
\left.\begin{array}{c} t^k \cos\beta t \\ t^k \operatorname{sen}\beta t \end{array}\right\} & (D^2+\beta^2)^{k+1} \\
\left.\begin{array}{c} t^k\, e^{\alpha t} \cos\beta t \\ t^k\, e^{\alpha t} \operatorname{sen}\beta t \end{array}\right\} & (D^2 - 2\alpha D + \alpha^2 + \beta^2)^{k+1}
\end{array}$$

dove si osservi che

$$D^2 - 2\alpha D + \alpha^2 + \beta^2 = \big(D - (\alpha + i\beta)\big)\big(D - (\alpha - i\beta)\big)\,.$$

Gli annichilatori elencati sopra valgono anche per le medesime funzioni moltiplicate per una costante (diversa da zero) e inoltre valgono per ogni $k \in \mathbf{N}$, per cui anche per $k = 0$, e $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Per cui di fatto le espressioni di f date da $t^k\, e^{\alpha t} \cos\beta t$ e $t^k\, e^{\alpha t} \operatorname{sen}\beta t$ sono le più generali e sarebbero sufficienti: infatti considerando $\beta = 0$ si ritrova $t^k\, e^{\alpha t}$, considerando $\alpha = 0$ si ritrova $t^k \cos\beta t$, considerando $\alpha = \beta = 0$ si ritrova t^k. Nei casi in cui $\beta = 0$ l'annichilatore però ha grado più alto di quello ottimale: ad esempio considerando le due funzioni

$$t^k \cos\beta t \qquad t^k \operatorname{sen}\beta t$$

Osservazione 3.1. - È facile verificare (lo si faccia per esercizio) che se al posto di t^k si sostituisce un generico polinomio di grado k gli annichilatori rimangono gli stessi.

Esempi

8 - Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$u'' - 3u' + 2u = e^{-t}\,.$$

Si è già visto nell'esempio 1 che tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono

$$c_1\, e^t + c_2\, e^{2t}\,, \qquad\qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}\,.$$

Per trovarne una dell'equazione data usiamo il metodo degli annichilatori. Poiché e^{-t} è annichilato da $Q(D) = D + 1$ andremo a cercare una soluzione dell'equazione non omogenea $u'' - 3u' + 2u = e^{-t}$ tra tutte le soluzioni dell'equazione omogenea

$$(D + 1)(D^2 - 3D + 2)u = 0\,,$$

cioè tra tutte le funzioni del tipo

$$c_1\, e^t + c_2\, e^{2t} + c_3\, e^{-t}\,, \qquad\qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}\,.$$

In realtà per trovare una soluzione dell'equazione è sufficiente limitarci a quelle del tipo

$$v(t) = c_3\, e^{-t}\,,$$

come già fatto osservare in (12), visto che le $c_1\, e^t + c_2\, e^{2t}$ risolvono l'omogenea. Derivando v si ottiene

$$v'(t) = -c_3\, e^{-t}\,, \qquad\qquad v''(t) = c_3\, e^{-t}\,,$$

per cui inserendo questi dati nell'equazione si ottiene

$$c_3\, e^{-t} + 3\, c_3\, e^{-t} + 2\, c_3\, e^{-t} = e^{-t}$$

da cui $c_3 = 1/6$. Le soluzioni dell'equazione data sono allora tutte e sole le funzioni

$$c_1\, e^t + c_2\, e^{2t} + \frac{1}{6} e^{-t}\,, \qquad\qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}\,.$$

9 - Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$u'' - 3u' + 2u = 3\, t\, e^{-t}\,.$$

L'annichilatore per tale dato è $Q(D) = (D + 1)^2$. Le soluzioni di $u'' - 3u' + 2u = t\, e^{-t}$ vanno cercate fra le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea

$$(D + 1)^2(D^2 - 3D + 2)u = 0\,.$$

Cerchiamo una soluzione fra le funzioni del tipo

$$v(t) = c_3\, e^{-t} + c_4\, t\, e^{-t}\,, \qquad\qquad c_3, c_4 \in \mathbf{R}\,.$$

Derivando v si ottiene

$$\begin{aligned} v'(t) &= -c_3\, e^{-t} + c_4\, e^{-t} - c_4\, t\, e^{-t}\,, \\ v''(t) &= c_3\, e^{-t} - c_4\, e^{-t} - c_4\, e^{-t} + c_4\, t\, e^{-t}\,. \end{aligned}$$

Inserendo queste informazioni nell'equazione si ha

$$\begin{aligned} & c_3\, e^{-t} - c_4\, e^{-t} - c_4\, e^{-t} + c_4\, t\, e^{-t} + \\ & \qquad - 3\big(- c_3\, e^{-t} + c_4\, e^{-t} - c_4\, t\, e^{-t}\big) + \\ & \qquad\qquad + 2\big(c_3\, e^{-t} + c_4\, t\, e^{-t}\big) = 3\, t\, e^{-t} \end{aligned}$$

da cui $c_3 = 5/12$ e $c_4 = 1/2$. Tutte le soluzioni saranno

$$c_1\, e^t + c_2\, e^{2t} + \frac{5}{12}\, e^{-t} + \frac{1}{2}\, t\, e^{-t}\,, \qquad\qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}\,.$$

10 - Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$u'' - 3u' + 2u = 3\, t^4 + t\,.$$

L'annichilatore del dato $3\, t^4 + t$ è D^5. Cerchiamo una soluzione tra le soluzioni dell'omogenea

$$D^5(D^2 - 3D + 2)u = 0\,. \tag{13}$$

Si osservi che le radici sono 0, con molteplicictà 5, e 1 e 2 con molteplicità 1.
Cerchiamo una soluzione tra le funzioni del tipo

$$v(t) = c_3\, t^4 + c_4\, t^3 + c_5\, t^2 + c_6\, t + c_7$$

che sono tutte le possibili soluzioni dell'omogenea (13) senza considerare le soluzioni di $(D^2 - 3D + 2)u = 0$. Derivando si ha

$$\begin{aligned} v'(t) &= 4\, c_3\, t^3 + 3\, c_4\, t^2 + 2\, c_5\, t + c_6\,, \\ v''(t) &= 12\, c_3\, t^2 + 6\, c_4\, t + 2\, c_5\,. \end{aligned}$$

Inserendo nell'equazione si ha

$$\begin{aligned} & 12\, c_3\, t^2 + 6\, c_4\, t + 2\, c_5 - 3\big(4\, c_3\, t^3 + 3\, c_4\, t^2 + 2\, c_5\, t + c_6\big) + \\ & \qquad + 2\big(c_3\, t^4 + c_4\, t^3 + c_5\, t^2 + c_6\, t + c_7\big) = 3\, t^4 + t \end{aligned}$$

per cui si ha

$$\begin{cases} 2\,c_3 = 3 \\ -12\,c_3 + 2\,c_4 = 0 \\ 12\,c_3 - 9\,c_4 + 2\,c_5 = 0 \\ 6\,c_4 - 6\,c_5 + 2\,c_6 = 1 \\ 2\,c_5 - 3\,c_6 + 2\,c_7 = 0 \end{cases}$$

da cui si ricavano

$$c_3 = \frac{3}{2}\,, \quad c_4 = 9\,, \quad c_5 = \frac{63}{2}\,, \quad c_6 = 68\,, \quad c_7 = \frac{141}{2}\,.$$

Tutte le soluzioni saranno

$$c_1\,e^t + c_2\,e^{2t} + \frac{3}{2}\,t^4 + 9\,t^3 + \frac{63}{2}\,t^2 + 68\,t + \frac{141}{2}\,, \qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}\,.$$

11 - Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$u'' - 3u' + 2u = e^t\,.$$

Questo caso, che sembra molto simile all'esempio 8, mette bene in evidenza come bisogna procedere.
Poiché in questo caso l'annichilatore è $Q(D) = D - 1$ e il polinomio Q ha come radice 1, che è anche radice di $P(D) = D^2 - 3D + 2$, e poiché le soluzioni vanno cercate tra le soluzioni dell'equazione omogenea

$$Q(D)P(D)u = 0\,,$$

guardando le radici del polinomio QP si ha che 1 ha molteplicità 2. Questo ci dice che le soluzioni dell'omogenea di terzo grado $Q(D)P(D)u = 0$ sono del tipo

$$c_1\,e^t + c_2\,e^{2t} + c_3\,t\,e^t\,, \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}\,.$$

Scartando $c_1\,e^t + c_2\,e^{2t}$ che risolvono l'omogenea andiamo a cercare una soluzione della non omogenea tra le funzioni del tipo

$$c_3\,t\,e^t$$

(e non $c_3\,e^t$!). Chiamando $v(t)$ la funzione $c_3\,t\,e^t$ e derivando si ottiene

$$v'(t) = c_3\,e^t + c_3\,t\,e^t\,, \qquad v''(t) = 2\,c_3\,e^t + c_3\,t\,e^t\,.$$

Inserendo queste informazioni nell'equazione si ha

$$2\,c_3\,e^t + c_3\,t\,e^t - 3\,c_3\,e^t - 3\,c_3\,t\,e^t + 2\,c_3\,t\,e^t = e^t$$

da cui $c_3 = -1$. Le soluzioni sono quindi

$$c_1\,e^t + c_2\,e^{2t} - t\,e^t\,, \qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}\,.$$

12 - Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$u'' - 3u' + 2u = e^{-t} + e^t\,.$$

Ricordando il terzo punto dell'Osservazione 1.1 per trovare tutte le soluzioni si procede prima cercando quelle dell'omogenea, poi una soluzione dell'equazione $u'' - 3u' + 2u = e^{-t}$, poi una soluzione dell'equazione $u'' - 3u' + 2u = e^t$ e infine sommando tutto. Utilizzando gli esercizi precedenti possiamo concludere che l'insieme delle soluzioni è dato da

$$c_1\, e^t + c_2\, e^{2t} + \frac{1}{6} e^{-t} - t\, e^t\,, \qquad\qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}\,.$$

13 - Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$y'' + y = \operatorname{sen} t\,.$$

Cominciamo con il risolvere l'equazione omogenea, che possiamo riscrivere come $(D^2+1)y = 0$. Il polinomio D^2+1 ha come zeri i e $-i$ per cui le soluzioni dell'omogenea sono

$$c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t \qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}\,. \tag{14}$$

Poiché l'annichilatore di $f(t) = \operatorname{sen} t$ è $Q(D) = D^2 + 1$ dobbiamo cercare una soluzione dell'equazione data tra le soluzioni dell'equazione omogenea

$$Q(D)P(D)y = (D^2+1)^2 y = 0\,.$$

In questo caso le radici del polinomio $(D^2+1)^2$ sono i e $-i$ con molteplicictà 2, per cui una soluzione dell'equazione va ricercata fra le funzioni del tipo

$$v(t) = c_3\, t \cos t + c_4\, t \operatorname{sen} t.$$

A priori vanno considerate anche le funzioni in (14), ma poiché risolvono l'equazione omogena $y'' + y = 0$ qualunque c_1 e c_2 andranno bene, mentre le costanti c_3 e c_4 vanno determinate. Derivando

$$\begin{aligned} v'(t) &= c_3 \cos t - c_3\, t \operatorname{sen} t + c_4 \operatorname{sen} t + c_4\, t \cos t\,,\\ v''(t) &= -\, c_3 \operatorname{sen} t - c_3 \operatorname{sen} t - c_3\, t \cos t + \\ &\qquad + c_4 \cos t + c_4 \cos t - c_4\, t \operatorname{sen} t\,. \end{aligned}$$

Si ha

$$\begin{aligned} &-c_3 \operatorname{sen} t - c_3 \operatorname{sen} t - c_3\, t \cos t + \\ &\qquad + c_4 \cos t + c_4 \cos t - c_4\, t \operatorname{sen} t + \\ &\qquad\qquad + c_3\, t \cos t + c_4\, t \operatorname{sen} t = \operatorname{sen} t \end{aligned}$$

da cui $c_3 = -1/2$ e $c_4 = 0$. Le soluzioni cercate sono

$$c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t - \frac{1}{2}\, t \cos t \qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}\,.$$

14 - Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$y'' + y = t\, e^t \operatorname{sen} 2t\,.$$

Dall'esempio precedente sappiamo che le soluzioni dell'omogenea sono

$$c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t \qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}\,.$$

Un annichilatore per il dato è l'operatore

$$Q(D) = (D^2 - 2D + 5)^2\,.$$

Cerchiamo una soluzione tra le soluzioni dell'equazione omogenea

$$Q(D)P(D)y = 0\,,$$

dove $P(D) = D^2 + 1$, trascurando le soluzioni dell'omogenea. Poiché il polinomio Q non ha radici in comune con il polinomio P possiamo limitarci a cercare tra le soluzioni dell'equazione

$$Q(D)y = 0\,.$$

Le soluzioni di questa equazione sono tutte e sole le funzioni del tipo

$$v(t) = c_3\, e^t \operatorname{sen} 2t + c_4\, e^t \cos 2t + c_5\, t\, e^t \operatorname{sen} 2t + c_6\, t\, e^t \cos 2t$$

con $c_3, c_4, c_5, c_6 \in \mathbf{R}$. Derivando e inserendo nell'equazione si trovano i valori di c_3, c_4, c_5, c_6.