Equazioni differenziali esatte

Ultimo aggiornamento: 18 febbraio 2017

1. Equazioni differenziali esatte

Si consideri un'equazione della forma

$$y' F_2(x,y) + F_1(x,y) = 0 \tag{1}$$

dove F_1, F_2 sono funzioni continue delle due variabili definite in un sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$. Si supponga ora che il campo

$$F = (F_1, F_2)$$

sia conservativo, che esista cioè una funzione f tale che

$$\nabla f(x,y) = F(x,y)\,. \tag{2}$$

Si supponga ora che l'insieme di livello k di f sia il grafico di una funzione y, si avrà quindi che

$$f(x, y(x)) = k\,. \tag{3}$$

Derivando tale espressione si ritrova

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + y'(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) = 0$$

che è l'equazione (1).

Una condizione che garantisce l'esistenza di una tale y è l'esistenza di un punto (x_o, y_o) appartenente all'insieme di livello k della funzione f tale che

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) \neq 0\,. \tag{4}$$

Di conseguenza, se anziché l'equazione (1), si ha il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' F_2(x,y) + F_1(x,y) = 0 \\ y(x_o) = y_o \end{cases} \tag{5}$$

si dovrà verificare che $F_2(x_o, y_o) \neq 0$. D'altra parte si osservi che, mettendo in forma normale l'equazione, si ottiene

$$y' + \frac{F_1(x,y)}{F_2(x,y)} = 0\,, \tag{6}$$

per cui l'equazione è scrivibile in forma normale se F_2 non si annulla. Ricordiamo però che tale condizione è una condizione sufficiente, ma non necessaria, a garantire l'esistenza di una funzione y. Di conseguenza se anche $F_2(x_o, y_o)$ fosse nullo non è esclusa l'esistenza di una soluzione.

Venendo alla tecnica per risolvere l'equazione (1), bisogna prima vedere se il campo F è conservativo (quindi se il dominio di F è semplicemente connesso e se, supposto che F_1 e F_2 siano di classe C^1,

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big)$$

ed in tal caso trovarne i potenziali. Chiaramente l'insieme dei potenziali è una famiglia infinita data da tutte le funzioni

$$f(x,y) + \tilde{c} \qquad \text{al variare di } \tilde{c} \in \mathbf{R}$$

dove f risolve (2). Se dobbiamo risolvere il problema di Cauchy (5) dovremo risolvere

$$f(x,y) + \tilde{c} = k$$

(senza conoscere il vero potenziale, se non a meno di una costante, quindi senza conoscere il valore di $\tilde{c}$; si osservi che di fatto non si conosce nemmeno il valore di k, in quanto l'equazione (1) è ottenuta derivando (3) qualunque sia il valore di k). Comunque se ora chiamiamo c la quantità $\tilde{c} - k$ dobbiamo risolvere l'equazione

$$f(x,y) + c = 0\,.$$

Se si riesce a ricavare y da tale equazione si avranno tutte le soluzioni dell'equazione (1), per risolvere il problema di Cauchy si troverà il valore della costante c sfruttando l'informazione $y(x_o) = y_o$.

Si osservi che se non si riesce ad esprimere y in maniera esplicita la soluzione può rimanere in forma implicita, come visto in altri tipi di equazione (si veda, ad esempio, l'Esercizio 1.5).

Si osservi ora che se y risolve (6) allora y risolve anche

$$y' + \frac{\phi(x,y)F_1(x,y)}{\phi(x,y)F_2(x,y)} = 0$$

dove ϕ è una qualunque funzione diversa da zero.

Per cui, se per caso il campo F non fosse conservativo, potrebbe esserlo un altro campo G,

$$G = (\phi F_1, \phi F_2)$$

per una qualche $\phi(x,y) \neq 0$ per ogni (x,y). In questo caso un'ulteriore difficoltà è trovare una funzione ϕ, detta *fattore integrante*, che moltiplicata per F renda il campo conservativo, dopodiché si procede come

nel caso precedente.
Ovviamente (forse non è proprio ovvio) non c'è una strategia per trovare un fattore integrante (se non partire dalla cose più semplici possibile ed eventualmente cercare funzioni via via più complicate) dal momento che in teoria bisognerebbe risolvere un'equazione alle derivate parziali, cosa più complicata che risolvere un'equazione differenziale ordinaria. In qualche caso però si può essere fortunati e riuscire a trovare un fattore integrante semplicemente, come mostrano alcuni degli esempi che seguono.

Esercizio 1.1. - Si risolva il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x + \cos y}{x \operatorname{sen} y} \\ y(1) = \dfrac{\pi}{2}\,. \end{cases}$$

L'equazione può essere scritta come $\big(x \operatorname{sen} y\big)y' - \big(x + \cos y\big) = 0$. Poiché

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(x \operatorname{sen} y\big) = -\frac{\partial}{\partial y}\big(x + \cos y\big)$$

il campo $F(x,y) = \big(-x - \cos y, x \operatorname{sen} y\big)$ è conservativo. I potenziali sono dati da

$$f(x,y) = -\frac{x^2}{2} - x\cos y + c\,.$$

A questo punto possiamo procedere in due modi per trovare la soluzione: eguagliando a zero l'espressione del potenziale, il primo è ricavare esplicitamente (se possibile) y. Nel nostro caso, poiché il valore di $y(1)$ sta nell'intervallo $[0,\pi]$ si ha che $\arccos\cos y = y$, si ricava

$$y(x) = \arccos\frac{-\frac{x^2}{2} + c}{x}\,;$$

dopodiché ricavare c dal dato iniziale, cioè

$$\frac{\pi}{2} = \arccos\frac{-\frac{1}{2} + c}{1}$$

cioè $c = 1/2$. Diversamente, sfruttando l'uguaglianza

$$-\frac{x^2}{2} - x\cos y + c = 0$$

possiamo prima ricavare il valore della costante c, che talvolta può essere utile nella successiva ricerca della soluzione y. SI ha quindi

$$-\frac{1}{2} - \cos\frac{\pi}{2} + c = 0$$

da cui si ricava $c = 1/2$. Dopodiché, inserendo il valore di c appena trovato, ricaviamo

$$y(x) = \arccos\left(\frac{1}{2x} - \frac{x}{2}\right).$$

Esercizio 1.2. - Si trovi la soluzione del problema

$$y'(2xy + y^3) + 3x + y^2 = 0\,, \qquad y(0) = -1\,.$$

Poiché

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(2xy + y^3\big) = -\frac{\partial}{\partial y}\big(3x + y^2\big)$$

esiste un potenziale. Si ricava che i potenziali sono

$$f_c(x, y) = \frac{1}{4}y^4 + xy^2 + \frac{3}{2}x^2 + c\,.$$

Imponendo la condizione iniziale si ricava che $c = -\frac{1}{4}$. Cercando y si ottiene

$$y^2 = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 - (3x^2/2 + c)}}{1/2} = -2x \pm 2\sqrt{-\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}}\,.$$

Poiché per $x = 0$ si otterrebbe un valore negativo per y^2 va scelta, fra le due possibilità,

$$y^2 = -2x + 2\sqrt{-\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}}\,.$$

Ora però, tendo conto del dato iniziale che in 0 è negativo, si avrà

$$y(x) = -\sqrt{-2x + 2\sqrt{-\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}}}\,.$$

Esercizio 1.3. - Si risolva

$$\begin{cases} y' + \dfrac{y(x + y + 1)}{2y + x} = 0 \\ y(1) = -1\,. \end{cases}$$

Si osserva che

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} \neq \frac{\partial F_1}{\partial y}\,.$$

Come osservato precedentemente potrebbe comunque esistere una funzione ϕ tale che

$$\frac{\partial}{\partial x}(\phi F_2) = \frac{\partial}{\partial y}(\phi F_2)\,.$$

Valutando tali derivate ad eguagliandole si ottiene

$$(2y + x)\frac{\partial \phi}{\partial x} + \phi = y(x + y + 1)\frac{\partial \phi}{\partial y} + (2y + x + 1)\phi\,.$$

Riscrivendo questa espressione come segue

$$(2y+x)\frac{\partial\phi}{\partial x} - y(x+y+1)\frac{\partial\phi}{\partial y} = (2y+x)\phi$$

ci si accorge che ϕ_x e ϕ sono moltiplicate per la stessa quantità, per cui se ϕ non dipendesse dalla variabile y tale espressione si ridurrebbe a

$$\phi_x = \phi$$

cioè $\phi(x,y) = e^x$ (oppure $\phi(x,y) = c\,e^x$ con $c \in \mathbf{R}$, $c \neq 0$).
In effetti il campo

$$G(x,y) = \big(e^x y(x+y+1), e^x(2y+x)\big)$$

risulta conservativo. I potenziali per tale G sono dati da

$$e^x(y^2+xy) + c\,.$$

Imponendo la condizione iniziale si trova $e(1-1)+c = 0$ da cui $c = 0$, per cui rimane da risolvere

$$e^x(y^2+xy) = 0$$

che dà come soluzioni $y \equiv 0$ e $y = -x$, ma poiché la soluzione in 1 non è nulla la soluzione sarà $y(x) = -x$.

Esercizio 1.4. - Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione

$$x^2y' + 4xy\log y - 3y = 0$$

per $y > 0$. Chiaramente $\frac{\partial F_2}{\partial x} \neq \frac{\partial F_1}{\partial y}$. Cerchiamo quindi un fattore integrante ϕ: si ottiene

$$x^2\frac{\partial\phi}{\partial x} + 2x\,\phi = (4xy\log y - 3y)\frac{\partial\phi}{\partial y} + (4x\log y + 4x - 3)\phi\,.$$

cioè

$$x^2\frac{\partial\phi}{\partial x} - 2x\,\phi = y(4x\log y - 3)\frac{\partial\phi}{\partial y} + (4x\log y - 3)\phi\,.$$

Ora, se per caso entrambi i termini di questa uguaglianza fossero zero si avrebbe

$$x^2\phi_x - 2x\,\phi = 0\,, \qquad \text{e} \qquad y(4x\log y - 3)\phi_y + (4x\log y - 3)\phi = 0$$

da cui

$$\frac{\phi_x}{\phi} = \frac{2}{x} \qquad \text{e} \qquad \frac{\phi_y}{\phi} = -\frac{1}{y}\,,$$

da cui

$$\log\phi(x,y) = g(y) + \log x^2 \qquad \text{e} \qquad \log\phi(x,y) = h(x) - \log|y|$$

per qualche funzione g, h. Per cui infine

$$\phi(x,y) = \frac{x^2}{|y|}\,.$$

Poiché la richiesta è di studiare l'equazione nel semipiano $y > 0$ considereremo il campo

$$G(x,y) = \left(\frac{x^2}{y}\,4xy\log y - 3y, \frac{x^4}{y}\right)$$

che ha come potenziali le funzioni

$$f_c(x,y) = x^4\,\log y - x^3 + c$$

da cui

$$y(x) = e^{\frac{x^3-c}{x^4}}\,.$$

Esercizio 1.5. - Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione

$$y' = -\frac{2\,\mathrm{sen}\,(x+y) + \left(x + \frac{y}{x}\right)\cos(x+y)}{\frac{1}{x}\,\mathrm{sen}\,(x+y) + \left(x + \frac{y}{x}\right)\cos(x+y)} = -\frac{F_1}{F_2}\,.$$

Il campo $F = (F_1, F_2)$ non è irrotazionale. Cercando un fattore integrante si perviene all'equazione

$$\begin{aligned}
\phi_y &\left(2\,\mathrm{sen}\,(x+y) + \left(2\,\mathrm{sen}\,(x+y) + \left(x+\frac{y}{x}\right)\cos(x+y)\right)\right) + \\
&- \phi_x\left(\frac{1}{x}\,\mathrm{sen}\,(x+y) + \left(x+\frac{y}{x}\right)\cos(x+y)\right) = \\
&= -\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\,\mathrm{sen}\,(x+y) - \left(x+\frac{y}{x}\right)\cos(x+y)\right)\,\phi\,.
\end{aligned}$$

Se ϕ_y fosse zero si avrebbe

$$\phi_x = \frac{1}{x}\,\phi$$

da cui $\phi(x,y) = x$. Cercando i potenziali di (xF_1, xF_2) si ottengono le funzioni

$$f_c(x,y) = (x^2+y)\,\mathrm{sen}\,(x+y)\, + c\,.$$

Si consideri ora il dato iniziale $y(0) = \pi$, da cui $c = 0$.
Si verifichi per esercizio che l'espressione $(x^2+y)\,\mathrm{sen}\,(x+y) = 0$ denota una funzione $y(x)$, anche se non esprimibile in forma implicita. Tale funziona sarà la soluzione del problema di Cauchy con dato $y(0) = \pi$.

Esercizio 1.6. - Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione

$$\frac{1}{y}\,y' + \frac{6x^2}{y} - \frac{1}{x} = 0\,.$$

Si noti che in forma normale l'equazione diventa $y' + 6x^2 - y/x = 0$, per cui x non potrà essere zero, almeno a priori, mentre y sì.
Bisognerà trovare un fattore integrante ϕ in modo tale che il campo

$$G(x,y) = \left(\phi\left(\frac{6x^2}{y} - \frac{1}{x}\right), \phi\,\frac{1}{y}\right)$$

sia conservativo. Tale ϕ esiste se per caso

$$\frac{6x^2}{y}\phi_y = \frac{6x^2}{y^2}\phi \qquad \text{e} \qquad -\frac{1}{x}\,\phi_y - \frac{1}{y}\,\phi_x = 0$$

da cui si ricava $\phi(x,y) = y/|x|$, per $x \neq 0$. I potenziali per il campo G sono dati da

$$f_c(x,y) = \frac{y}{|x|} + 3x^2 + c$$

da cui tutte le soluzioni $y(x) = -c|x| - 3x^2$.
In realtà le soluzioni sono tutte le funzioni $y(x) = kx - 3x^2$, con $k \in \mathbf{R}$.
Perché?