Topologia, continuità, limiti in $\mathbf{R}^n$

Ultimo aggiornamento: 18 febbraio 2017

1. Preliminari

Prima di iniziare lo studio delle funzioni di più variabili, in generale funzioni di k variabili e a valori in $\mathbf{R}^n$ dove k e n sono interi positivi, cioè

$$f : A \subset \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n \,,$$

introduciamo un po' di terminologia e alcuni concetti in $\mathbf{R}^n$, lo spazio a n dimensioni nel quale ci troveremo a lavorare, anche se la maggior parte degli esempi che vedremo saranno in $\mathbf{R}^2$ o in $\mathbf{R}^3$.
Se scriveremo "$x \in \mathbf{R}^n$" intenderemo che $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ con $x_i \in \mathbf{R}$ per $i = 1, 2, \dots n$.
Vediamo ora cosa sono un *prodotto scalare*, una *norma*, una *distanza* in $\mathbf{R}^n$.

Un *prodotto scalare* è una funzione che denoteremo con $\langle \cdot, \cdot \rangle$, definita in $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ e a valori reali, sinteticamente $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, che soddisfa le seguenti proprietà per ogni $x, y, z \in \mathbf{R}^n$, $\lambda \in \mathbf{R}$:

$$\text{(1)} \qquad \begin{array}{rl} \text{positività} & \langle x, x \rangle \geqslant 0 \ \text{ e } \ \langle x, x \rangle = 0 \ \text{ sse } x \text{ è il vettore nullo;} \\ \text{simmetria} & \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle; \\ \text{linearità} & \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \qquad \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \,. \end{array}$$

Una *norma* in $\mathbf{R}^n$, che denoteremo con $\| \cdot \|$, in generale è una funzione da $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}$ che soddisfa le seguenti proprietà per ogni $x, y \in \mathbf{R}^n$, $\lambda \in \mathbf{R}$:

$$\text{(2)} \qquad \begin{array}{rl} \text{positività} & \|x\| \geqslant 0 \ \text{ e } \ \|x\| = 0 \ \text{ sse } x \text{ è il vettore nullo;} \\ \text{omogeneità} & \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|; \\ \text{subadditività} & \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|. \end{array}$$

Vale anche la seguente proprietà, equivalente alla subadditività:

$$\Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leqslant \|x - y\| \qquad \text{per ogni } x, y \in \mathbf{R}^n \,.$$

Per mostrare l'equivalenza supponiamo che per ogni $x, y \in \mathbf{R}^n$ valga $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$. Consideriamo $\xi, \eta \in \mathbf{R}^n$: scrivendo ξ come $(\xi - \eta) + \eta$ si ottiene

$$\|\xi\| = \|(\xi - \eta) + \eta\| \leqslant \|\xi - \eta\| + \|\eta\|$$

da cui

$$\|\xi\| - \|\eta\| \leqslant \|\xi - \eta\| \,.$$

Invertendo i ruoli di ξ ed η si ottiene anche che $\|\eta\| - \|\xi\| \leqslant \|(\xi - \eta)\|$, da cui la tesi. Viceversa, supponiamo che valga $|\|\xi\| - \|\eta\|| \leqslant \|(\xi - \eta)\|$ per ogni $\xi, \eta \in \mathbf{R}^n$ e mostriamo che vale la subadditività. Consideriamo $x, y \in \mathbf{R}^n$: si ha che, chiamando ξ il vettore $x + y$,

$$\|x + y\| \leqslant \|x + y - \eta\| + \|\eta\| \qquad \text{per qualunque } \eta \in \mathbf{R}^n \,.$$

Scegliendo $\eta = y$ si conclude.

Una *distanza* è una funzione $d : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ che soddisfa le seguenti proprietà per ogni $x, y, z \in \mathbf{R}^n$:

$$d(x, y) \geqslant 0 \ \text{ e } \ d(x, y) = 0 \ \text{ se e solo se } x = y\,; \qquad \text{(positività)}$$

$$d(x, y) = d(y, x)\,; \qquad \text{(simmetria)}$$

$$d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)\,. \qquad \text{(disuguaglianza triangolare)}$$

Si osservi come da ogni prodotto scalare è possibile definire una norma nel modo seguente: dato un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definiamo

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \tag{3}$$

EX - Si verifichi che l'oggetto così definito è effettivamente una norma.

Osservazione 1.1. - Attenzione! Non tutte le norme sono definite tramite un prodotto scalare. A tal proposito si veda l'Esempio 1.4.

Analogamente data una generica norma è possibile definire una distanza nel modo seguente:

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

EX - Si verifichi che l'oggetto così definito è effettivamente una distanza.

Osservazione 1.2. - Attenzione! Non tutte le distanze sono definite tramite una norma. Un esempio di distanza in $\mathbf{R}$ che non è indotta da una norma è $d(x, y) := \sqrt{|x - y|}$ (non è omogenea, non soddisfa cioè la proprietà di omogeneità).

In $\mathbf{R}^n$, che è uno spazio vettoriale, considereremo implicitamentemente, se non diversamentemente specificato,

- la base euclidea $e_1, e_2, \dots e_n$ dove $e_i = (0, \dots 0, 1, 0, \dots 0)$ e 1 è all'i-esima posizione,
- il prodotto scalare tra $x, y \in \mathbf{R}^n$, che denoteremo con $x \cdot y$ oppure con il simbolo $\langle x, y \rangle$, definito come

$$x \cdot y := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \tag{4}$$

- la norma detta *modulo* o norma euclidea indotta da tale prodotto scalare e definita come

$$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\,, \tag{5}$$

- e la distanza indotta da tale norma definita da

$$d(x, y) := |x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\,, \qquad x, y \in \mathbf{R}^n\,. \tag{6}$$

Si osservi come il modulo in $\mathbf{R}^n$ altro non sia che un'estensione del già noto modulo in dimensione 1. Infatti se si considera (5) con $n = 1$, cioè $|x|$ con $x \in \mathbf{R}$, si ottiene il modulo del numero reale x.

EX - Ricordiamo la seguente disuguaglianza: per ogni $a, b \in \mathbf{R}$ vale

$$2ab \leqslant a^2 + b^2 \tag{7}$$

e vale l'uguaglianza se e solo se $a = b$ (se non la si conosce mostrarla per esercizio. Suggerimento: $(a - b)^2 \geqslant 0$).

Esercizio 1.3. - Verifichiamo che vale

$$|\langle x, y \rangle| \leqslant |x||y| \qquad \text{per ogni } x, y \in \mathbf{R}^n \tag{8}$$

detta *disuguaglianza di Schwarz* e vale

$$|\langle x, y \rangle| = |x||y| \qquad \text{se e solo se } x = \alpha y \quad \text{per qualche } \alpha \in \mathbf{R}$$
$$\text{oppure uno dei due vettori è il vettore nullo.}$$

Elevando al quadrato ci si riduce a dimostrare

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2 \right).$$

Vediamo la dimostrazione, per semplicità, solo per $n = 2$. La disuguaglianza di sopra è equivalente a

$$x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + 2x_1y_1x_2y_2 \leqslant x_1^2y_1^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 + x_2^2y_2^2$$

che è equivalente a

$$2x_1y_1x_2y_2 \leqslant x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2\,.$$

Ora utilizzando la disuguaglianza (7) con $a = x_1y_2$ e $b = x_2y_1$ si conclude che vale la disuguaglianza. L'uguaglianza vale se e solo se $x_1y_2 = x_2y_1$, cioè se:

i) $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$, cioè x è il vettore nullo (o y è il vettore nullo);
ii) $x_1 = 0$ e $y_1 = 0$ e quindi $x = (0, x_2)$ e $y = (0, y_2)$, cioè esiste $\alpha \in \mathbf{R}$ tale che $x = \alpha y$;
iii) nel caso in cui x_1, x_2, y_1, y_2 sono tutti diversi da zero, $x_1y_2 = x_2y_1$ se e solo se
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}\,,$$
cioè esiste $\alpha \in \mathbf{R}$ tale che $x = \alpha y$.

Esempio 1.4. - Vediamo un esempio di norma diversa da quella standard di $\mathbf{R}^n$ vista prima. È sufficiente considerare $\mathbf{R}^2$ con la norma ($x = (x_1, x_2)$), che chiameremo $\|\cdot\|_a$ (il pedice a serve solo ad identificare questa specifica norma, non ha alcun significato particolare)

$$\|x\|_a := \sqrt{x_1^2 + 2x_2^2}\,.$$

Questa norma è legata ad un prodotto scalare, come nella formula (3), diverso da quello standard, cioè a

$$\langle x, y\rangle_a := x_1y_1 + 2x_2y_2$$

e tramite questa norma possiamo definire la distanza

$$d_a(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + 2(x_2 - y_2)^2}$$

Ma possiamo costruire una norma che non è associata ad alcun prodotto scalare. Ad esempio, sempre su $\mathbf{R}^2$, la norma

$$\|x\|_b := |x_1| + |x_2|$$

alla quale possiamo associare la distanza

$$d_b(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|\,,$$

ma nessun prodotto scalare! Altro esempio di norma che non è associata ad alcun prodotto scalare è la norma

$$\|x\|_c := \max\{|x_1| + |x_2|\}$$

alla quale possiamo associare la distanza

$$d_c(x, y) = \max\{|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|\}\,.$$

Per esercizio si verifichi che queste norme soddisfano le proprietà elencate in (2).

Esercizio 1.5. - Trovare gli insiemi di $\mathbf{R}^2$ che soddisfano

$$d(x, 0) = |x| \leqslant 1\,, \qquad d_a(x, 0) = \|x\|_a \leqslant 1\,, \qquad d_b(x, 0) = \|x\|_b \leqslant 1\,,$$

dove d_a e d_b sono definite nell'esempio precedente.
Il primo insieme è dato da dai punti di $\mathbf{R}^2$ che soddisfano

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leqslant 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1$$

che rappresenta un cerchio di raggio 1. Il secondo insieme è dato da dai punti di $\mathbf{R}^2$ che soddisfano

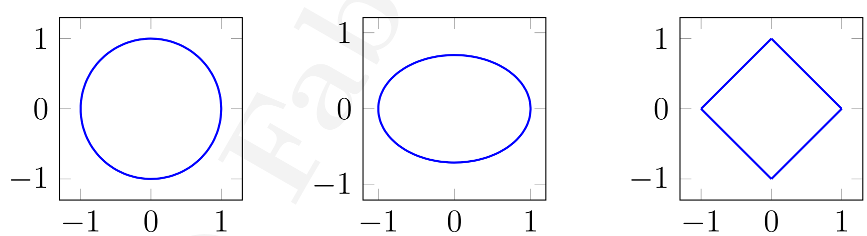
$$\sqrt{x_1^2 + 2x_2^2} \leqslant 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_1^2 + 2x_2^2 \leqslant 1\,.$$

che rappresenta un'ellisse. Il terzo insieme è dato dai punti di $\mathbf{R}^2$ che soddisfano

$$|x_1| + |x_2| \leqslant 1\,,$$

insieme che, assieme agli altri, è rappresentato nella figura che segue.

Figura 1.a — Figura 1.b — Figura 1.c



$\{x \in \mathbf{R}^2 \,:\, |x| \leqslant 1\}$ — $\{x \in \mathbf{R}^2 \,:\, \|x\|_a \leqslant 1\}$ — $\{x \in \mathbf{R}^2 \,:\, \|x\|_b \leqslant 1\}$

Cominciamo ora a definire alcuni insiemi ed alcune proprietà degli insiemi che ci saranno utili nel seguito.

Definizione 1.6 (Intorno sferico)**.** *Si chiamano intorno sferico aperto ed intorno sferico chiuso del punto $x_o \in \mathbf{R}$ con raggio $r > 0$ o palla aperta, o palla chiusa, di centro x_o e raggio r gli insiemi*

$$B_r(x_o) = \{x \in \mathbf{R}^n \,|\, d(x, x_o) < r\}, \quad \bar{B}_r(x_o) = \{x \in \mathbf{R}^n : d(x, x_o) \leqslant r\}$$

mentre viene detta sfera di centro x e raggio $r > 0$ l'insieme

$$S_r(x_o) = \{x \in \mathbf{R}^n : d(x, x_o) = r\}.$$

Si noti che $\bar{B}_r(x) = B_r(x) \cup S_r(x)$. Spesso, se chiaro dal contesto, scriveremo solamente B_r, $\bar{B}_r$ e S_r e diremo semplicemente "intorno" o "palla", oppure "intorno aperto" o "palla aperta", per intorno sferico aperto, "intorno chiuso" o "palla chiusa" per intorno sferico chiuso.

Definizione 1.7 (Insieme aperto e chiuso)**.** *Un insieme $A \subset \mathbf{R}^n$ è aperto se per ogni $x_o \in A$ esiste un intorno aperto di centro x_o contenuto in A, cioè esiste $r > 0$ tale che $B_r(x_o) \subset A$.*
Un insieme $A \subset \mathbf{R}^n$ è chiuso se il complementare di A, che si denota con A^c, è aperto, dove con complementare di un insieme A indichiamo l'insieme

$$A^c := \mathbf{R}^n \setminus A = \{x \in \mathbf{R}^n \,|\, x \notin A\}\,.$$

Definizione 1.8. *Dato $E \subset \mathbf{R}^n$ e $x \in \mathbf{R}^n$, si dice che:*

1. *x è punto interno ad E se esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subset E$;*
2. *x si dice esterno ad E se x è interno ad E^c, cioè se esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \cap E = \emptyset$.*

Un punto x che non è né interno né esterno si dice punto di bordo *o di* frontiera*. Denoteremo con:*

3. *$\mathring{E}$ l'insieme dei punti interni ad E;*
4. *∂E l'insieme dei punti di frontiera di E;*
5. *$\bar{E} = E \cup \partial E$ la chiusura di E.*

Osservazione 1.9. - Si osservi che

- E è aperto se $E = \mathring{E}$, cioè se tutti i suoi punti sono punti interni;
- E è chiuso se $\bar{E} = E$ o equivalentemente se $E^c = \mathbf{R}^n \setminus E$ è aperto, che equivale a dire che $\partial E \subset E$;
- dato un qualunque insieme E si ha che $\mathring{E}$ è sempre un insieme aperto ed è il più grande insieme aperto contenuto in E; $\bar{E}$ è sempre un insieme chiuso ed è il più piccolo insieme chiuso che contiene E.

Attenzione! Non ci sono solamente insiemi aperti o chiusi, ci sono insiemi che non sono né aperti né chiusi (come mostrato in qualcuno degli esempi che seguono).

Esempio 1.10. - Vediamo alcuni esempi.

1. Se fissiamo $a, b \in \mathbf{R}$ con $a < b$, allora (a, b) è aperto, $[a, b]$ è chiuso, $(a, b]$ e $[a, b)$ non sono né aperti né chiusi; in tutti i casi l'insieme dei punti di frontiera è dato da $\{a, b\}$; in tutti i casi la parte interna è data da (a, b); in tutti i casi la chiusura è data da $[a, b]$;
2. $E = \mathbf{R}^n$ è aperto, così come $E^c = \partial E = \emptyset$ è aperto. Quindi $\mathbf{R}^n$ è sia aperto che chiuso; questo è l'unico insieme di $\mathbf{R}^n$ con tale proprietà.
3. Con $E = \mathbf{Q}$ abbiamo che $\mathring{E} = \emptyset$, $\bar{E} = \partial E = \mathbf{R}$; quindi $\mathbf{Q}$ non è né aperto né chiuso.
4. Sia $E = B_r(x)$ oppure $E = \bar{B}_r(x)$: in entrambi i casi si ha che $\mathring{E} = B_r(x)$, $\bar{E} = \bar{B}_r(x)$ e $\partial E = S_r(x)$.
5. I tre insiemi in Figura 1 precedente, cioè $\{x \in \mathbf{R}^2 : |x| \leqslant 1\}$, $\{x \in \mathbf{R}^2 : \|x\|_a \leqslant 1\}$, $\{x \in \mathbf{R}^2 : \|x\|_b \leqslant 1\}$ sono tutti e tre chiusi, hanno come frontiera rispettivamente gli insiemi $\{x \in \mathbf{R}^2 : |x| = 1\}$, $\{x \in \mathbf{R}^2 : \|x\|_a = 1\}$, $\{x \in \mathbf{R}^2 : \|x\|_b = 1\}$ che sono le tre curve blu evidenziate in figura.
   I tre insiemi (dove la disuguaglianza è stretta!) $\{x \in \mathbf{R}^2 : |x| < 1\}$, $\{x \in \mathbf{R}^2 : \|x\|_a < 1\}$, $\{x \in \mathbf{R}^2 : \|x\|_b < 1\}$ sono aperti.
6. Si consideri l'insieme
   $$\{x \in \mathbf{R} \,|\, x \in [2, 5]\}$$
   cioè un intervallo di $\mathbf{R}$. Di questo sappiamo che la parte interna è $(2, 5)$, che la frontiera è $\{2, 5\}$, la chiusura $[2, 5]$ (si veda l'esempio al punto 1.). Consideriamo il segmento, evidenziato in Figura 2.a
   $$S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x \in [2, 5]\,, y = 0\}$$
   che apparentemente è lo stesso segmento di prima, ma visto come sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$. Tale insieme ha come parte interna l'insieme vuoto $\emptyset$, come frontiera esattamente l'insieme S e come chiusura ancora S.
7. In generale, data una funzione $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ continua (vedremo la definizione di continuità fra breve) ed una costante $c \in \mathbf{R}$ gli insiemi
   $$\{x \in \mathbf{R}^n \,|\, f(x) > c\} \qquad \text{e} \qquad \{x \in \mathbf{R}^n \,|\, f(x) < c\}$$

sono aperti, mentre gli insiemi

$$\{x \in \mathbf{R}^n \,|\, f(x) \geqslant c\} \qquad \text{e} \qquad \{x \in \mathbf{R}^n \,|\, f(x) \leqslant c\}$$

sono chiusi. Ad esempio gli insiemi al punto 5. nei quali f è una delle norme, oppure data $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ si consideri la funzione $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $g(x,y) = y - f(x)$. Allora gli insiemi

$$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, g(x,y) \leqslant 0\} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, y \leqslant f(x)\}\,,$$
$$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, g(x,y) \geqslant 0\} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, y \geqslant f(x)\}\,,$$

rispettivamente sottografico e sopragrafico di f, sono chiusi. Analogamente i corrispondenti insiemi con le disuguaglianze strette sono aperti.

8. L'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant 1\} \cap \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2 - y < 0\}$ (in Figura 2.b è la parte di cerchio che sta anche nel sopragrafico della parabola) non è né aperto né chiuso, perché la frontiera non è tutta contenuta in E (e questo fa sì che non sia chiuso), ma lo è in parte (e questo fa sì che non sia aperto).
9. L'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2 - y = 0\}$ mostrato in Figura 3 è chiuso.

Figura 2.a

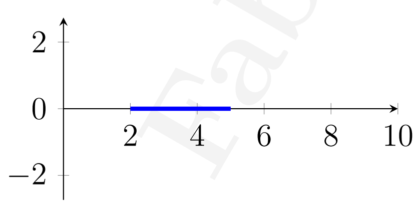


Figura 2.b

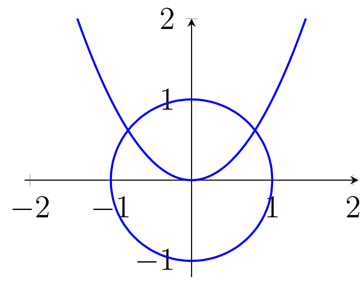
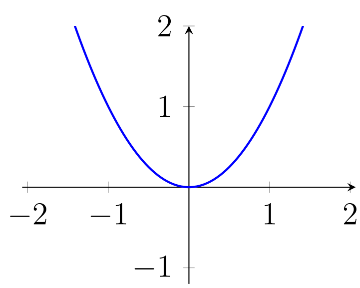


Figura 3



Definizione 1.11 (punto di accumulazione - punto isolato)**.** *Dato un insieme $E \subset \mathbf{R}^n$, diremo che un punto x_0 è di* accumulazione *per E se per ogni $r > 0$*

$$B_r(x_0) \cap (E \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset\,;$$

diremo che è un punto isolato se esiste $r > 0$ tale che

$$B_r(x_0) \cap E = \{x_0\}\,.$$

Si osservi che se x_0 è un punto isolato dell'insieme E si ha che per un certo raggio r

$$B_r(x_0) \cap (E \setminus \{x_0\}) = \emptyset\,,$$

cioè x_0 è l'unico punto dell'intersezione tra $B_r(x_0)$ ed E. Se invece x_0 è di accumulazione si ha che per ogni $r > 0$ l'insieme $B_r(x_0) \cap (E \setminus \{x_0\})$ non è vuoto. Poiché prima di intersecare con la palla $B_r(x_0)$ priviamo l'insieme E del punto x_0 un punto di accumulazione può appartenere o meno all'insieme E. D'altra parte ci sono anche punti che appartengono ad un insieme, ma che non sono punti di accumulazione.

Esempio 1.12. - Consideriamo l'insieme $E = (0, 1] \cup \{2\}$. L'insieme dei punti di accumulazione di E è $[0, 1]$, e si noti che $0 \notin E$; 2 è un punto isolato di E e non è di accumalzione per E.

Nella seguente proposizioni sono elencate le principali proprietà degli aperti e dei chiusi sotto le operazioni di unione e intersezione.

Proposizione 1.13. *Supponiamo di avere due famiglie, una $\mathcal{A}$ fatta di insiemi aperti e una $\mathcal{C}$ fatta di insiemi chiusi. Allora*

1. *l'insieme*
$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x \in A \text{ per qualche } A \in \mathcal{A}\}$$
è aperto, mentre l'insieme
$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x \in C \text{ per ogni } C \in \mathcal{C}\}$$
è chiuso;
2. *dato un numero finito di insiemi $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ e $C_1 \ldots, C_m \in \mathcal{C}$, l'insieme*
$$A_1 \cap \ldots \cap A_k$$
è aperto, mentre l'insieme
$$C_1 \cup \ldots \cup C_m$$
è chiuso.

Esempio 1.14. - Si osservi che l'intersezione arbitraria di insiemi aperti non è in genere aperta; si considerino, ad esempio, gli insiemi aperti

$$A_n = (-1/n, 1/n) \subset \mathbf{R}\,.$$

Si ha che

$$\bigcap_{n\in\mathbf{N}^*} A_n = \{0\}$$

e quest'ultimo è un insieme chiuso.
Analogamente l'unione arbitraria di insiemi chiusi non è in genere chiusa; si considerino, ad esempio, gli insiemi chiusi

$$C_n = [-1 + 1/n, 1 - 1/n] \subset \mathbf{R}\,.$$

Si ha che

$$\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} C_n = (-1, 1)$$

e quest'ultimo è un insieme aperto.

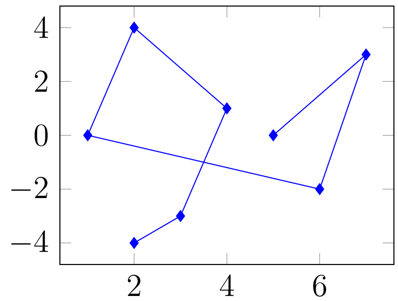
Definizione 1.15 (Insiemi limitati e insiemi compatti)**.** *Diremo che un insieme $E \subset \mathbf{R}^n$ è limitato se esiste $r > 0$ tale che $E \subset B_r(0)$, o equivalentemente se esiste $r > 0$ tale che $|x| < r$ per ogni $x \in E$.*
Un insieme $E \subset \mathbf{R}^n$ viene detto compatto se è chiuso e limitato.

Segmento e poligonale - Dati due punti $x, y \in \mathbf{R}^n$ si dice segmento, e si denota con $[x, y]$, l'insieme

$$[x, y] = \{z \in \mathbf{R}^n \,|\, z = (1-t)x + ty\,, t \in [0, 1]\}\,.$$

dati k punti (ordinati) $x_0, x_1, \ldots, x_k$ in $\mathbf{R}^n$ chiamiamo poligonale l'unione (ordinata) dei segmenti $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots k$ e la denoteremo con $P(x_0, x_1, \ldots x_k)$. Ad esempio, dati i punti nel piano $x_0 = (2, -4), x_1 = (3, -3), x_2 = (4, 1), x_3 = (2, 4), x_4 = (1, 0), x_5 = (6, -2), x_6 = (7, 3), x_7 = (5, 0)$, la poligonale che unisce, nell'ordine, $x_0, x_1, \ldots x_7$ è la curva il cui sostegno è nella figura che segue.

Figura 3 - Esempio di poligonale



Insieme connesso - Diremo che un insieme $E \subset \mathbf{R}^n$ è *connesso per poligonali* se per ogni coppia di punti $x, y \in E$ esiste una poligonale di vertici $x_0, x_1, \ldots x_k$ dove $x_0 = x$, $x_k = y$, tutta contenuta in E.
Se un insieme E è connesso per poligonali ed è aperto diremo semplicemente che è *connesso*. Si può dimostrare che ogni aperto di $\mathbf{R}^n$ può essere scritto come unione, disgiunta, di aperti connessi. Ciascuno di questi aperti viene detto componente connessa. Chiaramente se E è aperto e connesso ha una sola componente connessa.

Insieme convesso - Diciamo che un insieme E è *convesso* se per ogni coppia di punti $x, y \in E$ il segmento $[x, y]$ è contenuto in E.

Insieme stellato - Diciamo che un insieme E è *stellato rispetto ad un punto* $x_0 \in E$ se per ogni punto $x \in E$ il segmento $[x_0, x]$ è contenuto in E.
Ovviamente un insieme stellato è anche connesso per poligonali.

Esempio 1.16. - Gli insiemi in Figura 1 sono insiemi connessi, convessi e stellati.
L'insieme in Figura 4.a è connesso, stellato, ma non convesso.
L'insieme in Figura 4.b non è connesso (ha due componenti connesse).

Figura 4.a

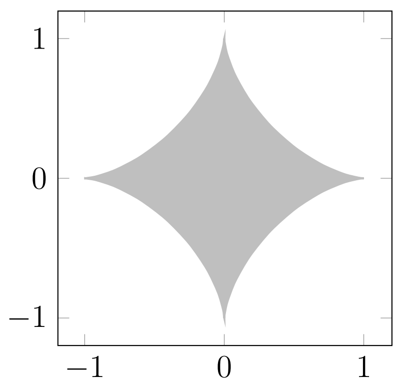
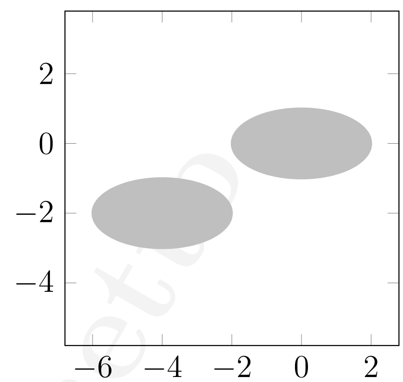


Figura 4.b



2. Successioni

Una successione in $\mathbf{R}^n$ è una funzione $x : \mathbf{N} \to \mathbf{R}^n$, dove per convenzione di denota l'elemento $x(h)$ con x_h ($h \in \mathbf{N}$) e solitamente anziché scrivere $x : \mathbf{N} \to \mathbf{R}^n$ si scrive $(x_h)_{h\in\mathbf{N}}$.

Definizione 2.1. *Una successione $(x_h)_{h\in\mathbf{N}} \subset \mathbf{R}^n$ si dice:*

1. *limitata se l'insieme esiste $r > 0$ tale che $|x_h| < r$ per ogni $h \in \mathbf{N}$;*
2. *convergente ad un elemento $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$, e scriveremo*

$$\lim_{h\to+\infty} x_h = \bar{x}\,,$$

se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $h_0 \in \mathbf{N}$ tale che $|x_h - \bar{x}| < \varepsilon$ per ogni $h \geqslant h_0$.

Osservazione 2.2. - Si osservi che per $y = (y_1, \dots y_n) \in \mathbf{R}^n$ si ha

$$|y_j| \leqslant |y| \leqslant \sqrt{n} \max_{i=1,\dots n} |y_i| \qquad \text{per ogni } j = 1, \dots n\,.$$

Osservazione 2.3. - L'osservazione precedente ha come conseguenza il seguente fatto: una successione

$$\begin{gathered}(x_h)_h \quad \text{è convergente a} \quad \bar{x} \\ \Updownarrow \\ (x_h^i)_h \quad \text{è convergente a} \quad \bar{x}^i \qquad \text{per ogni } i \in \{1, \dots n\}\end{gathered}$$

dove, per evitare confusione, in questo caso denotiamo con y^i la i-esima componente di un punto $y \in \mathbf{R}^n$.

Supponiamo che $(x_h)_h$ sia convergente a $\bar{x}$, quindi, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $h_0 \in \mathbf{N}$ tale che $|x_h - \bar{x}| \leqslant \varepsilon$ per ogni $h \geqslant h_0$. Si ha

$$|x_h^i - \bar{x}^i| \leqslant |x_h - \bar{x}| \leqslant \varepsilon \quad \text{per ogni } i \in \{1, \dots n\}$$

e quindi $(x_h^i)_h$ converge a $\bar{x}^i$ per ogni $i = 1, \dots n$. Viceversa si supponga che $(x_h^i)_h$ converga a $\bar{x}^i$ per ogni $i \in \{1, \dots n\}$. Per ogni ε ed ogni $i = 1, \dots n$ esiste $h_i \in \mathbf{N}$ tale che

$$|(x_h^i)_h - \bar{x}_i| \leqslant \varepsilon \quad \text{per ogni } h \geqslant h_i \,, i = 1 \dots n \,.$$

Chiamiamo h_0 il massimo fra $h_1, h_2, \dots h_n$. Allora

$$|(x_h^i)_h - \bar{x}_i| \leqslant \varepsilon \quad \text{per ogni } h \geqslant h_0 \quad \text{per ogni } i = 1 \dots n \,.$$

A questo punto si ha

$$|x_h - \bar{x}| \leqslant \sqrt{n} \max_{i=1,\dots n} |x_h^i - \bar{x}^i| \leqslant \sqrt{n}\, \varepsilon \quad \text{per ogni } h \geqslant h_0$$

il che conclude la dimostrazione.

A questo punto, ragionando componente per componente, molti fatti visti per le successioni a valori reali valgono anche per successioni a valori in $\mathbf{R}^n$. Vediamone alcuni:

1. una successione $(x_h)_{h \in \mathbf{N}}$ è limitata se e solo se lo sono le sue componenti;
2. se una successione è convergente allora è limitata;
3. il limite di una successione $(x_h)_h$ è unico;
4. se $(x_h)_h$ converge a x e $(y_h)_h$ converge a y allora $(x_h + y_h)_h$ converge a $x + y$;
5. se $(x_h)_h$ converge a x allora $(\lambda x_h)_h$ converge a λx per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$.

Esempio 2.4. - Consideriamo le seguenti successioni in $\mathbf{R}^2$:

(1) se definiamo
$$x_h = \left(\frac{1}{h}, \frac{h+1}{h} \right),$$
dato che la prima componente, $\frac{1}{h}$, converge a 0 e la seconda, $\frac{h+1}{h}$, converge ad 1, si avrà che la successione converge al punto $(0, 1) \in \mathbf{R}^2$;

(2) se definiamo
$$x_h = \left((-1)^h, \frac{1}{h} \right)$$
non converge in quanto la successione delle prime componenti, $(-1)^h$, non converge.

Analogamente la definizione di successione estratta sarà data in modo analogo alla definizione di successione estratta in $\mathbf{R}$, e cioè tramite una funzione $k : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ crescente, da cui la successione estratta $(x_{h_k})_{h\in\mathbf{N}}$ è data da $x_{h_k} = x_{k(h)}$.

Proposizione 2.5 (Chiusi e compatti per successioni)**.** *Dato un insieme $E \subset \mathbf{R}^n$, si ha che:*

(1) *E è chiuso se e solo se per ogni successione $(x_h)_{h\in\mathbf{N}} \subset E$ con x_h convergente ad x, si ha che $x \in E$;*
(2) *E è compatto se e solo se da ogni successione $(x_h)_{h\in\mathbf{N}} \subset E$ si può estrarre una sottosuccessione $(x_{h_k})_{h\in\mathbf{N}}$ convergente ad un elemento di $x \in E$;*
(3) *un punto $x \in \mathbf{R}^n$ è un punto di accumulazione per E se e solo se esiste una successione $(x_h)_{h\in\mathbf{N}} \subset E$ con $x_h \neq x$ per ogni $h \in \mathbf{N}$ e tale che x_h converge a x.*

3. Limiti

Veniamo ora allo studio delle funzioni di più variabili, e più precisamente alla definizione di limite e continuità per funzioni di più variabili.

Definizione 3.1. *Data una funzione $f : E \to \mathbf{R}^k$ con $E \subset \mathbf{R}^n$ e x_0 punto di accumulazione per E, diremo che $f(x)$ tende ad un vettore $l \in \mathbf{R}^k$ per x che tende ad x_0, in simboli*

$$\lim_{\substack{|x-x_0|\to 0 \\ x\in E}} f(x) = l \in \mathbf{R} \tag{9}$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $x \in E$ è tale che $0 < |x-x_0| < \delta$, allora $|f(x)-l| < \varepsilon$; equivalentemente se $x \in E \cap B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ allora $f(x) \in B_\varepsilon(l)$. Diremo inoltre, nel caso in cui f è a valori scalari (e non vettoriali!) che

$$\lim_{\substack{|x|\to x_0 \\ x\in E}} f(x) = +\infty$$

se per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $x \in E$ soddisfa $0 < |x-x_0| < \delta$, allora $f(x) > M$.
In maniera analoga (ma non uguale) si definisce il limite $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

Come nel caso di limiti per successioni, anche in questo caso avremo la validità di (9) se e solo se per ogni $j = 1, \ldots, n$

$$\lim_{x \to x_0} f_j(x) = l_j.$$

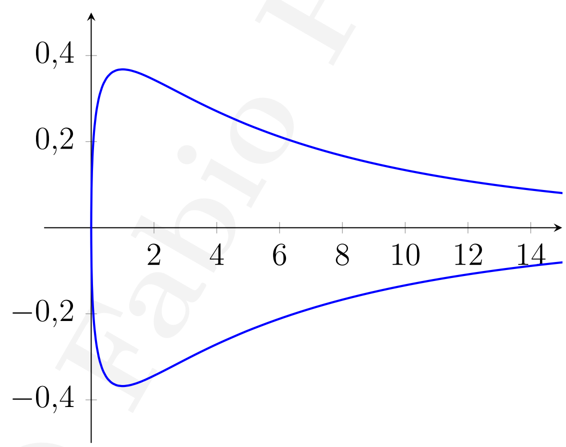
Quindi il calcolo dei limiti si farà componente per componente, quindi anche gli enunciati spesso possono essere fatti per funzioni a valori scalari e non vettoriali.
Possiamo definire il limite anche per x che "va all'infinito", nel caso l'insieme sia illimitato. Se $f : E \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, E illimitato (come ad esempio in Figura 3), possiamo definire

$$\lim_{\substack{|x| \to +\infty \\ x \in E}} f(x) = l \in \mathbf{R}$$

dicendo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N > 0$ tale che

$$\text{se } |x| > N \text{ e } x \in E \quad \text{allora} \quad |f(x) - l| < \varepsilon\,.$$

Figura 3



Ciò significa che se $x \notin \bar{B}_N(0)$, ma $x \in E$, allora $f(x) \in B_\varepsilon(l)$.
Vale la seguente utile proposizione, che riduce lo studio dei limiti allo studio di limiti di successioni.

Proposizione 3.2. *Data $f : E \to \mathbf{R}^k$ e x_0 punto di accumulazione per E, abbiamo che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \tag{10}$$

se e solo se per ogni successione $(x_h)_{h \in \mathbf{N}}$ convergente a x_0, la successione $f(x_h)_{h \in \mathbf{N}}$ converge ad l.

Come visto per le successioni, anche per il limite di funzioni valgono le seguenti proprietà;

1. $f(x) \to l \in \mathbf{R}^k$ se e solo se per ogni $j = 1, \ldots k$ si ha che $f_j(x) \to l_j$;
2. se $f(x) \to l$ e $g(x) \to l'$, allora $f(x) + g(x) \to l + l'$ (a meno di forme indeterminate);
3. se $f(x) \to l$ e $\lambda \in \mathbf{R}$, allora $\lambda f(x) \to \lambda l$.

Analogamente al caso unidimensionale si definiscono estremo superiore, estremo inferiore, massimo e minimo per funzioni $f : E \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ (attenzione! solo per funzioni f a valori scalari e non vettoriali).

4. SPAZI METRICI