

Curve

ULTIMO AGGIORNAMENTO: 26 AGOSTO 2019

Iniziamo lo studio delle funzioni di più variabili, in generale funzioni di k variabili e a valori in $\mathbf{R}^n$, cioè

$$f : A \subset \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^n,$$

con il caso più semplice, cioè con le curve. Tale studio ci permetterà di sviluppare strumenti e concetti utili per un approccio sistematico al caso generale. Il caso delle curve è quello in cui $k = 1$.

1. CURVE E CURVE REGOLARI

Si consideri un intervallo I di $\mathbf{R}$. Chiameremo curva una funzione $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$.

Si osservi che ciò è equivalente a considerare n funzioni $\gamma_1, \dots, \gamma_n : I \rightarrow \mathbf{R}$ e a descrivere il punto $\gamma(t)$ in $\mathbf{R}^n$ come $(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$.

Definizione 1.1 (sostegno di una curva). *Si chiama sostegno di una curva $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ l'immagine di I tramite γ .*

Si supponga di avere $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ e che il suo sostegno $\gamma(I)$ sia $\Gamma \subset \mathbf{R}^n$. Qualche volta si usa impropriamente il termine *curva* indicando l'insieme Γ di $\mathbf{R}^n$ e non la curva come l'abbiamo definita, cioè la funzione γ , ma questo sarà chiaro dal contesto. Vedremo infatti più avanti che una curva può essere data anche in maniera implicita (si veda a tal proposito il paragrafo 2). A volte si usa anche il termine *parametrizzazione* per indicare la funzione γ , spesso proprio quando si confonde la curva con il suo sostegno Γ .

Non sempre la funzione γ è nota; ad esempio, proprio quando si conosce solamente il sostegno o la curva è data in forma implicita, una *parametrizzazione* per Γ andrà trovata, andranno trovati cioè un intervallo $I \subset \mathbf{R}$ e una funzione γ definita in I il cui sostegno sarà Γ .

Se con il termine curva possiamo confondere la parametrizzazione e il sostegno, la stessa confusione non deve essere fatta tra sostegno di una curva, che è un sottoinsieme di $\mathbf{R}^n$, e grafico di una curva, che

invece è un sottoinsieme di $\mathbf{R}^{n+1}$. Vediamo ora alcuni esempi che ci aiuteranno a capire meglio.

Esempi 1.2. - 1. Dati due punti $x, y \in \mathbf{R}^2$, cioè $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ con $x_i, y_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2$, la funzione $r : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$ definita da

$$r(t) = x + t(y - x)$$

ha come sostegno il segmento che unisce il punto x al punto y .

Il segmento sostegno di r viene spesso denotato con la scrittura $[x, y]$.

Se si considera la funzione $\tilde{r} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ definita

$$\tilde{r}(t) = x + t(y - x)$$

si ha che il sostegno di $\tilde{r}$ è una retta, in particolare la retta passante per i punti x e y .

Altro modo di definire la stessa retta è assegnare un punto per il quale si vuole far passare la retta ed un vettore. Ad esempio, fissati z punto di $\mathbf{R}^n$ e v vettore di $\mathbf{R}^n$ si può definire una retta come segue

$$\hat{r} = z + tv, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Scegliendo $z = x$ e il vettore $v := y - x$ la funzione $\hat{r}$ altro non è che la retta $\tilde{r}$ definita precedentemente.

Ci sono molti (infiniti) modi di parametrizzare una curva; in particolare anche un segmento. Ad esempio se scegliamo $x = (-1, -1)$ e $y = (1, 1)$ le tre curve

$$r_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad r_1(t) = (-1, -1) + t((1, 1) - (-1, -1)) = (2t - 1, 2t - 1),$$

$$r_2 : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad r_2(t) = (t, t),$$

$$r_3 : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad r_3(t) = (t^3, t^3),$$

parametrizzano lo stesso segmento, il segmento che unisce i punti $(-1, -1)$ e $(1, 1)$ e che con la nostra notazione indichiamo con $[(-1, -1), (1, 1)]$.

2. Si fissi $r > 0$. La curva

$$\begin{array}{ccc} \sigma_1 : [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ t & \mapsto & (r \cos t, r \sin t) \end{array}$$

ha come sostegno una circonferenza di raggio r centrata nell'origine. Si verifichi che $((\sigma_1)_1(t))^2 + ((\sigma_1)_2(t))^2 = r^2$.

3. Si fissi $r > 0$. La curva

$$\begin{aligned} \sigma_2 : [0, \pi] &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ t &\mapsto (r \cos 2t, r \sin 2t) \end{aligned}$$

ha come sostegno una circonferenza di raggio r centrata nell'origine. Si verifichi che $(\sigma_1(t))^2 + (\sigma_2(t))^2 = r^2$.

4. Si fissi $r > 0$. La curva

$$\begin{aligned} \sigma_3 : [0, 6\pi] &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ t &\mapsto (r \cos t, r \sin t) \end{aligned}$$

ha come sostegno la stessa circonferenza dell'esempio 2.

5. Si fissino $a, b > 0$. La curva (il cui sostegno è in Figura 2.a per $a = 4, b = 2$)

$$\begin{aligned} \sigma_4 : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ t &\mapsto (a \cos t, b \sin t) \end{aligned}$$

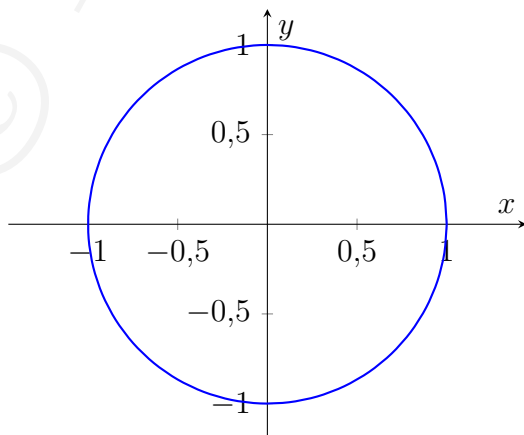
ha come sostegno l'ellisse data dal luogo di zeri $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

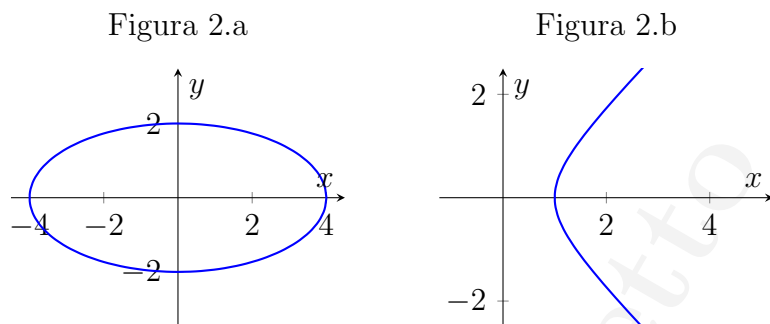
6. Si fissino $a, b > 0$. La curva (il cui sostegno è in Figura 2.b per $a = 1, b = 1$)

$$\begin{aligned} \sigma_5 : [-5, 5] &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ t &\mapsto (a \cosh t, b \sinh t) \end{aligned}$$

ha come sostegno l'iperbole data dal luogo di zeri $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, x > 0$.

Figura 1 - Sostegno di σ_1, σ_2 e σ_3 (con $r = 1$)





Osservazione 1.3. - Si osservi come curve che hanno lo stesso sostegno, come ad esempio una circonferenza come quella evidenziata nella figura di sopra nel caso di σ_1 , σ_2 e σ_3 , possono essere definite in domini diversi (come nel caso di σ_1 e σ_2 o anche r_1 e r_2) e avere grafici diversi, come nel caso di σ_1 e σ_3 . Si vedano a tal proposito le due figure successive.

Figura 3 - Elica cilindrica - Immagine di σ_1 e di σ_2 (con $r = 1$)

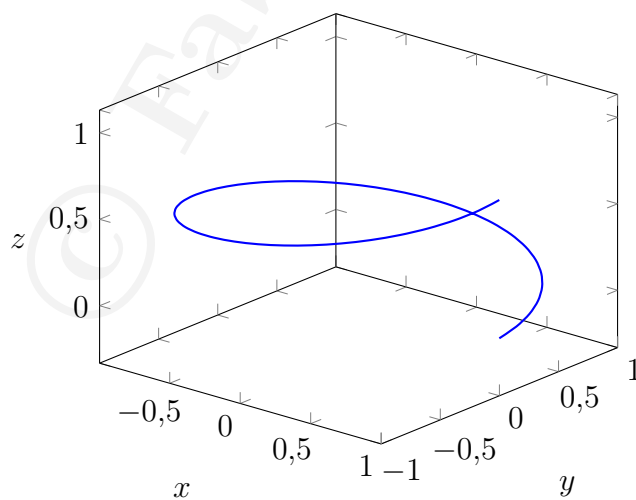
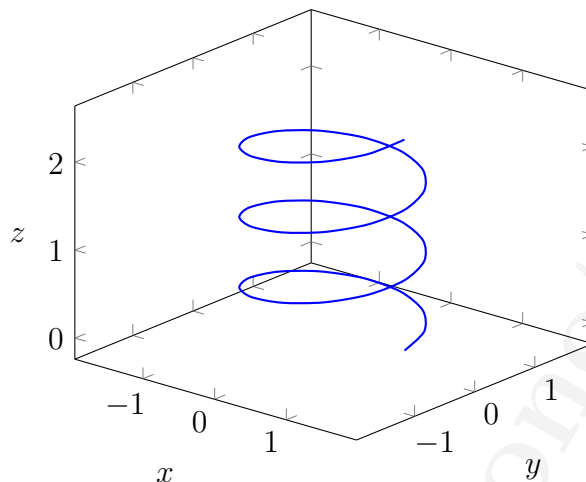
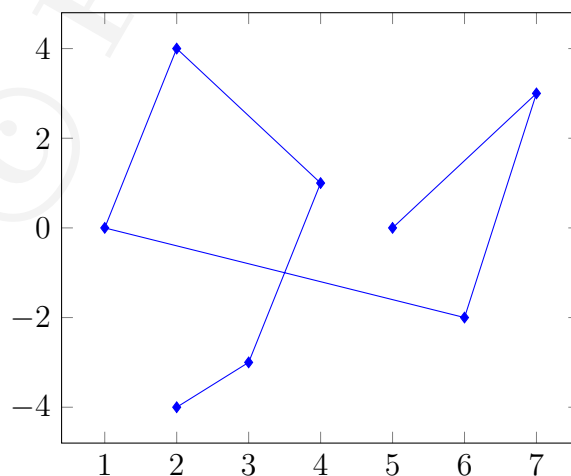


Figura 4 - Elica cilindrica - Immagine di σ_3 (con $r = 1$)

Poligonale - Ricordiamo la poligonale già introdotta nel paragrafo precedente e che richiameremo spesso in seguito: dati k punti (ordinati) $x_0, x_1, \dots, x_k$ in $\mathbf{R}^n$ chiamiamo poligonale l'unione (ordinata) dei segmenti $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, k$ e la denoteremo con $P(x_0, x_1, \dots, x_k)$. Ad esempio, dati i punti nel piano $x_0 = (2, -4), x_1 = (3, -3), x_2 = (4, 1), x_3 = (2, 4), x_4 = (1, 0), x_5 = (6, -2), x_6 = (7, 3), x_7 = (5, 0)$, la poligonale che unisce, nell'ordine, $x_0, x_1, \dots, x_7$ è la curva il cui sostegno è nella figura che segue.

Figura 5 - Esempio di poligonale



Un modo, ma ce ne sono diversi, per descrivere parametricamente una poligonale che unisce k punti, è il seguente:

$$\gamma : [0, k] \rightarrow \mathbf{R}^n, \quad \gamma(t) = \begin{cases} x_0 + t(x_1 - x_0) & t \in [0, 1], \\ x_1 + (t - 1)(x_2 - x_1) & t \in [1, 2], \\ x_2 + (t - 2)(x_3 - x_2) & t \in [2, 3], \\ \vdots & \\ x_{k-1} + (t - k + 1)(x_k - x_{k-1}) & t \in [k - 1, k]. \end{cases}$$

Curve cartesiane - Altri esempi di curve, già note, sono tutti i grafici di funzioni di una variabile reale e a valori in $\mathbf{R}$ che possono essere visti come una curva (e viceversa: una curva cartesiana può essere vista come un grafico).

Data una funzione $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ dove I è un intervallo di $\mathbf{R}$ si può considerare la curva $\gamma(t) := (t, f(t))$ con $t \in I$. Una curva così definita è a volte detta curva cartesiana per sottolineare che è un grafico, cioè il sostegno di γ coincide con il grafico di f .

Si osservi che queste curve sono curve in $\mathbf{R}^2$, cioè nel piano.

Un esempio è riportato nella figura che segue, dove abbiamo il grafico della funzione $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $f(x) = \sin x$ che può anche essere pensato come il sostegno della curva $\gamma(t) := (t, \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$ (si veda la Figura 6.a), Ovviamente anche la curva $\eta : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ definita da $\eta(t) = (f(t), t)$ è una curva cartesiana.

Osservazione 1.4. - In generale ogni curva del tipo

$$(1) \quad \gamma : I \rightarrow \mathbf{R}, \quad \gamma(t) = (t, f(t)) \quad \text{oppure} \quad \eta(t) = (f(t), t)$$

dove $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ è una funzione, è una curva cartesiana e il suo sostegno è ovviamente un grafico (il grafico di f).

Ma non tutte le curve cartesiane, il cui sostegno cioè è un grafico, sono del tipo descritto in (1). Ad esempio, possiamo considerare un'altra parametrizzazione della curva in Figura 6.a, la curva $\tilde{\gamma}$ definita da

$$\tilde{\gamma}(t) := (t^2, \sin t^2) \quad \text{con } t \in [0, \sqrt{2\pi}],$$

che ha lo stesso sostegno della curva $\gamma(t) = (t, \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$.

In generale una curva piana, cioè a valori in $\mathbf{R}^2$, definita da

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)), \quad t \in I, \quad \gamma \text{ continua},$$

è una curva cartesiana se la funzione $\gamma_1 : I \rightarrow \mathbf{R}$ oppure $\gamma_2 : I \rightarrow \mathbf{R}$ è invertibile, cioè (poiché γ_1 e γ_2 sono continue) se γ_1 oppure γ_2 sono strettamente monotone.

Supponiamo ora che γ_1 sia invertibile e chiamiamo J l'intervallo $\gamma_1(I)$, cioè $\gamma_1 : I \rightarrow J$ è una biiezione: si può fare un cambio di parametro definendo

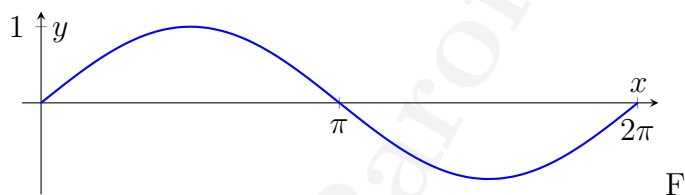
$$s = \gamma_1(t), \quad s \in J$$

da cui $t = \gamma_1^{-1}(s)$, per cui la curva

$$\eta : J \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad \eta(s) := (s, \gamma_2(\gamma_1^{-1}(s)))$$

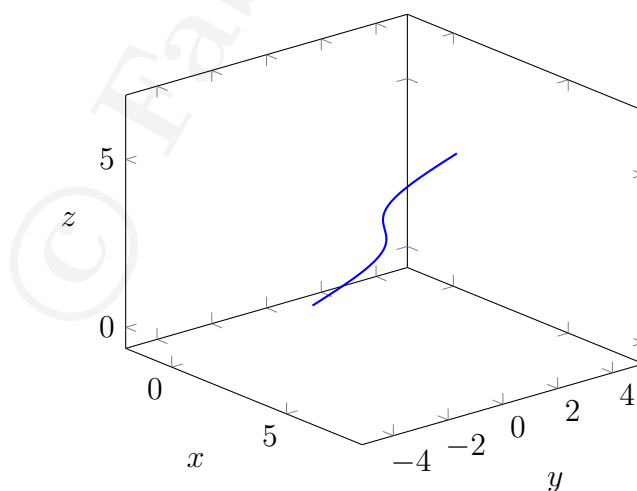
avrà lo stesso sostegno di γ .

Figura 6.a



In Figura 6.b è mostrato il grafico della curva $\gamma(t) := (t, \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$ e con la variabile nell'asse verticale, che sarà un sottoinsieme di $\mathbf{R}^3$ e non di $\mathbf{R}^2$.

Figura 6.b



Avremo spesso a che fare con curve continue o regolari, almeno a tratti. Andiamo quindi a definire questi concetti per funzioni a valori vettoriali. Cominciamo dalla nozione di limite.

Definizione 1.5 (limite). *Dati I intervallo di $\mathbf{R}$, $t_o \in I$, $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbf{R}^n$ e $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$, diremo che*

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_o \\ t \in I}} \gamma(t) = l$$

se

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_o \\ t \in I}} |\gamma(t) - l| = 0.$$

Nella definizione di limite oltre a scrivere $\lim_{t \rightarrow t_o}$ scriviamo anche $t \in I$ per sottolineare che t deve appartenere all'insieme di definizione di γ . Se per esempio I fosse $[a, b)$ e t_o fosse a tale limite si ridurrebbe a $\lim_{t \rightarrow a^+} \gamma(t)$.

D'ora in poi, per semplicità, spesso scriveremo soltanto $\lim_{t \rightarrow t_o}$ sottintendendo però che $t_o, t \in I$.

Osservazione 1.6. - Si osservi che $|\gamma(t) - l|^2 = (\gamma_1(t) - l_1)^2 + \dots + (\gamma_n(t) - l_n)^2$. Di conseguenza

$$\lim_{t \rightarrow t_o} |\gamma(t) - l| = 0 \quad \text{se e solo se} \quad \lim_{t \rightarrow t_o} \gamma_i(t) = l_i \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, n.$$

Osservazione 1.7. - Tutte le proprietà che valgono per i limiti di funzioni di una variabile e a valori scalari vale anche per le funzioni di una variabile e a valori vettoriali (unicità del limite, limite della somma di due funzioni, ...).

Come conseguenza della Definizione 1.5 abbiamo la definizione di continuità in un punto t_o per una curva definita in $I \ni t_o$.

Definizione 1.8 (continuità). *Diremo che una curva $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ è continua in $t_o \in I$, I intervallo di $\mathbf{R}$ non necessariamente aperto, se*

$$\lim_{t \rightarrow t_o} \gamma(t) = \gamma(t_o).$$

Osservazione 1.9. - Considereremo sempre curve continue.

Definizione 1.10 (derivata). *Dati $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$, I intervallo (non necessariamente aperto) di $\mathbf{R}$, e $t_o \in I$, diremo che γ è derivabile nel punto t_o se esiste come vettore di $\mathbf{R}^n$ il limite*

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_o \\ t \in I}} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_o)}{t - t_o}$$

che denoteremo con $\gamma'(t_o)$. Diremo che è derivabile in I se lo è in ogni punto di I . Diremo che è $C^1(I)$ se è derivabile e la sua derivata è continua in I . Diremo che è $C^k(I)$ se è derivabile k volte e la sua derivata k -esima è continua in I .

Un commento alla definizione: che esista il limite suddetto significa, come abbiamo già visto, che esistano i seguenti n limiti:

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_o \\ t \in I}} \frac{\gamma_i(t) - \gamma_i(t_o)}{t - t_o} \quad i = 1, \dots, n.$$

Che tale limite sia un vettore di $\mathbf{R}^n$ significa che ognuno di questi limiti è l_i numero reale (cioè il limite di sopra esiste ed è finito). Inoltre nel caso in cui I fosse l'intervallo chiuso $[a, b]$ e t_o fosse a , γ è derivabile in a se esiste semplicemente la derivata destra.

Un po' di nomenclatura - Diremo che una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ è

regolare se $\gamma \in C^1([a, b])$ con $|\gamma'(t)| \neq 0$ per ogni $t \in [a, b]$;

regolare a tratti se possiamo decomporre $[a, b]$ in sottointervalli disgiunti I_i con $i = 1, \dots, k$ in modo tale che γ sia regolare nella parte interna di I_i per ogni $i = 1, \dots, k$;
cioè se esistono $t_1, \dots, t_k \in (a, b)$ con $t_1 < \dots < t_k$, tale che γ è regolare in (a, t_1) , (t_k, b) , (t_i, t_{i+1}) con $i = 1, \dots, k-1$ e γ' non esiste oppure $|\gamma'(t)| = 0$ (al più) per $t \in \{a, t_1, \dots, t_k, b\}$;

C^1 **a tratti** se esistono $t_1, \dots, t_k \in (a, b)$ con $t_1 < \dots < t_k$, tale che γ è $C^1([a, t_1])$, $C^1([t_k, b])$, $C^1([t_i, t_{i+1}])$ con $i = 1, \dots, k-1$ e $\gamma'(t)$ non esiste al più per $t \in \{t_1, \dots, t_k\}$ (cioè la derivata destra e la derivata sinistra nei punti t_i sono diverse);

semplice se $t_1 \neq t_2$ implica $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ con almeno uno dei due punti t_1 o t_2 interno ad I (cioè può capitare che $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ solo se $t_1 = a$ e $t_2 = b$);

chiusa se $I = [a, b]$ e se $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Osservazione 1.11. - Si noti come la definizione di curva “regolare” richieda qualcosa che (apparentemente) non ha a che fare con la regolarità (la richiesta $|\gamma'(t)| \neq 0$). A tal proposito osserviamo la differenza tra curva regolare a tratti e C^1 a tratti: una curva regolare a tratti è C^1 a tratti e in alcuni punti ha (o potrebbe avere) derivata discontinua o il modulo della derivata uguale a zero; una curva C^1 a tratti ha (o potrebbe avere) in alcuni punti derivata discontinua.

L'esempio in Figura 5 è una curva C^1 a tratti, non semplice.

L'Esempio 1.2.2 è invece una curva semplice. Infatti anche se $\sigma_1(0) = \sigma_1(2\pi)$, 0 e 2π non sono punti interni all'intervallo di definizione. Tale curva invece risulta chiusa.

In generale una curva semplice o è iniettiva oppure, se non lo è, è chiusa e gli estremi dell'intervallo di definizione sono gli unici punti distinti che hanno la stessa immagine.

La curva r_3 nell'Esempio 1.2.1 non è regolare nonostante abbia lo stesso sostegno di r_2 , perché entrambe le componenti di $r'_3(t) = (3t^2, 3t^2)$ si annullano per $t = 0$. Poco male: è regolare a tratti. Tale curva, che come sostegno ha il segmento $[(-1, -1), (1, 1)]$, può essere parametrizzata in altro modo in maniera da renderla regolare (ad esempio, le curve r_1 e r_2 nello stesso esempio).

Esempio 1.12. - Chiarimento del termine “regolare” - Altro esempio, più interessante rispetto al precedente, di curva non regolare è quello data dalla curva

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t),$$

il cui sostegno è mostrato in Figura 7.a. È immediato verificare che la curva è infinitamente derivabile, e quindi C^∞ , ma ciononostante la curva non è regolare nel senso della definizione data: infatti

$$\gamma'(t) = (-3\cos^2 t \sin t, \sin^2 t \cos t) = (0, 0) \quad \text{per } t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}.$$

Guardando il sostegno della curva ci si accorge che tali valori di t corrispondono alle cuspidi.

Considerare una curva regolare significa voler evitare spigoli o cuspidi nel sostegno della curva.

Il grafico di γ può anche essere visto come il sostegno della curva

$$\eta(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, t).$$

Derivando η ci si accorge che nei punti in cui $|\gamma'|$ è zero si ha che $\eta'(t) = (0, 0, 1)$, quindi il sostegno di η (il grafico di γ) non presenta spigoli, ma la sua proiezione in $\mathbf{R}^2$ sì.

Figura 7.a - Sostegno di γ

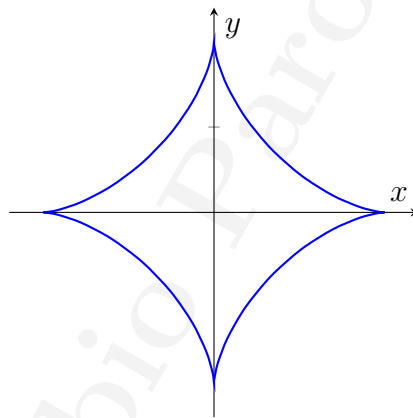


Figura 7.b - Sostegno di η proiettato sul piano xt

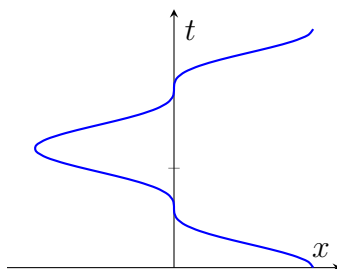
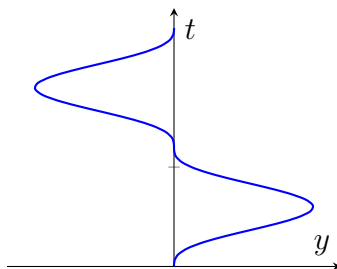


Figura 7.c - Sostegno di η proiettato sul piano yt 

Un altro esempio è dato dalla curva $\sigma_6 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ definita da $\sigma_6(t) = (t(t-1), t(t-1)(2t-1))$ il cui sostegno (o meglio, una parte del sostegno, visto che è illimitato) è mostrato in Figura 8. Si osservi che

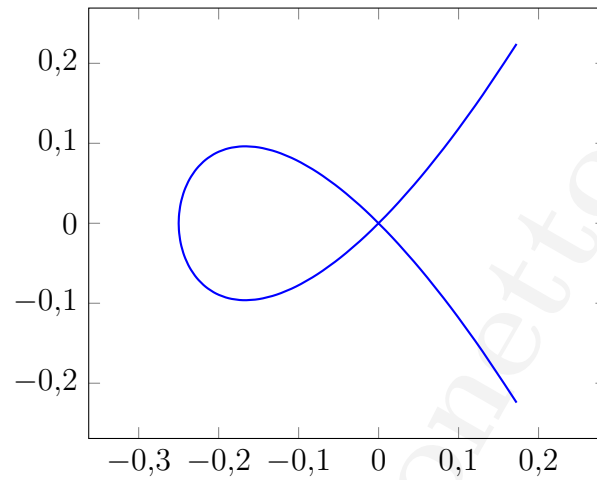
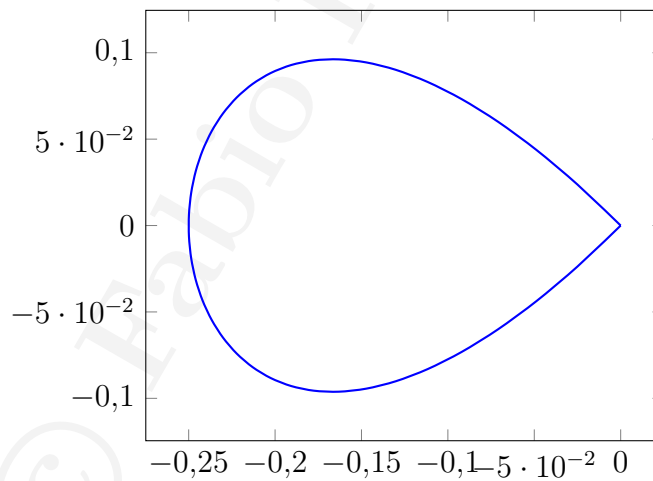
$$\sigma'_6(t) = (2t - 1, 6t^2 - 6t + 1)$$

per cui si ha $|\sigma'_6(t)| \neq 0$ per ogni t . Infatti

$$\begin{aligned} 2t - 1 = 0 & \quad \text{per } t = \frac{1}{2}, \\ 6t^2 - 6t + 1 = 0 & \quad \text{per } t = \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{12} \text{ e per } t = \frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{12}, \end{aligned}$$

di conseguenza le due componenti di σ'_6 non si annullano mai contemporaneamente. Tale curva è regolare, non chiusa, non semplice.

Se si restringe il dominio di σ_6 a $[0, 1]$ e si considera $\sigma_7 : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\sigma_7(t) = (t(t-1), t(t-1)(2t-1))$, si ottiene una curva chiusa e semplice. Si veda il sostegno di σ_7 in Figura 9.

Figura 8 - Sostegno di σ_6 Figura 9 - Sostegno di σ_7 

Questi primi esempi fanno capire come curve diverse parametrizzino uno stesso insieme o viceversa come uno stesso insieme possa essere parametrizzato in più modi diversi. Introduciamo di conseguenza la seguente definizione.

Definizione 1.13 (Curve equivalenti). *Due curve $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ e $\tilde{\gamma} : J \rightarrow \mathbf{R}^n$ si dicono equivalenti se esiste una funzione $\alpha : J \rightarrow I$ di classe*

$C^1(I)$ tale che $\alpha'(t) \neq 0$ per ogni $t \in J$ e

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\alpha(t)), \quad \text{per ogni } t \in J.$$

La mappa α viene anche chiamata *cambiamento di parametro* o di *variabile* o *riparametrizzazione ammissibile*.

Commento - Il fatto che $\alpha'(t) \neq 0$ per ogni $t \in J$ (α' è continua!) implica che $\alpha'(t) > 0$ per ogni $t \in J$ oppure che $\alpha'(t) < 0$ per ogni $t \in J$. In particolare α è una biiezione tra J e I .

Si supponga di avere due curve equivalenti: se il cambio di variabile è tale che $\alpha'(t) > 0$ per ogni t diremo che le due curve hanno la stessa orientazione, nel caso in cui invece $\alpha'(t) < 0$ per ogni t diremo che hanno orientazione opposta. Possiamo così mettere una relazione d'equivalenza sull'insieme delle curve dicendo che due curve sono equivalenti se esiste un cambiamento di variabile ammissibile.

All'interno della stessa classe possiamo distinguere due sottoclassi, parlando così di *curve orientate*.

Da qui l'ambiguità del termine curva di cui si è parlato all'inizio del paragrafo. Mettendo in relazione tutte le curve che sono equivalenti tra loro si mettono di fatto in relazione tutte le curve che hanno lo stesso sostegno.

Vediamo un esempio: ognuna delle due curve σ_1 e σ_2 degli Esempi 1.2 è una riparametrizzazione dell'altra. Per esempio, considerando prima σ_2 possiamo riparametrizzarla e ottenere σ_1 considerando

$$\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow [0, \pi], \quad \alpha(t) = \frac{t}{2}$$

e così ottenere $\sigma_1(t) = \sigma_2(\alpha(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Viceversa potremmo considerare

$$\beta : [0, \pi] \rightarrow [0, 2\pi], \quad \beta(t) = 2t$$

e riparametrizzare σ_1 ottenendo $\sigma_2(t) = \sigma_1(\beta(t))$, $t \in [0, \pi]$. Si osservi che $\beta = \alpha^{-1}$ e viceversa.

Le curve σ_1 e σ_2 hanno la stessa orientazione e facilmente si può verificare che α' e β' sono positive.

Se si considerasse il cambio di variabile

$$\delta : [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi], \quad \delta(t) = 2\pi - t$$

si ha che la curva

$$\tilde{\sigma}_1 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad \tilde{\sigma}_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_1(\delta(t))$$

ha lo stesso sostegno di σ_1 , è semplice e chiusa come lo è σ_1 , ma ha orientazione opposta. Si osservi che $\delta'(t) \equiv -1$. Spesso quando si ha a che fare con curve nel piano, cioè curve a valori in $\mathbf{R}^2$, si distinguono le due orientazioni in oraria e antioraria.

EX - Si trovi una biiezione con derivata positiva tra i due intervalli $[a, b]$ e $[c, d]$.

Cominciamo con il trovare due biiezioni con derivata positiva

$$\alpha : [0, 1] \rightarrow [c, d] \quad \text{e} \quad \beta : [a, b] \rightarrow [0, 1].$$

La funzione α è data (come già visto quando abbiamo definito il segmento che unisce due punti in $\mathbf{R}^n$) da

$$\alpha(t) = (1 - t)c + td.$$

Nel caso in cui $a = c$ e $b = d$ la funzione β può essere trovata invertendo α . In generale si ha

$$\beta(t) = \frac{t - a}{b - a}.$$

Ora per trovare una biiezione tra i due intervalli $[a, b]$ e $[c, d]$ è sufficiente considerare la composizione tra β e α come segue

$$\begin{aligned} \varphi(t) := \alpha \circ \beta(t) &= \alpha(\beta(t)) = \alpha\left(\frac{t - a}{b - a}\right) = \\ &= \left(1 - \frac{t - a}{b - a}\right)c + \frac{t - a}{b - a}d = \frac{bd - ac + t(c - d)}{b - a}. \end{aligned}$$

Per trovarne uno con derivata negativa è sufficiente invertire i ruoli di c e d . Si ottiene quindi

$$\psi : [a, b] \rightarrow [c, d], \quad \psi(t) = \frac{bd - ac + t(c - d)}{b - a}.$$

Queste sono due funzioni lineari (o, meglio, affini), ma ovviamente una qualunque funzione di classe C^1 , strettamente crescente da $[a, b]$ a $[c, d]$ e con derivata mai nulla è un possibile cambio di variabile tra i due intervalli.

Ne proponiamo alcuni (infiniti) definendo dapprima, per $a > 0$,

$$\begin{aligned} \alpha_a : [0, 1] &\rightarrow [c, d] \quad \text{e} \quad \beta_a : [a, b] \rightarrow [0, 1], \\ \alpha(t) &= (1 - t^a)c + t^a d \quad \text{e} \quad \beta_a(t) = \frac{t^a - a}{b - a}, \end{aligned}$$

dopodiché

$$\varphi_a(t) = \frac{bd - ac + t^a(c - d)}{b - a}.$$

Per esercizio se ne trovi un altro.

2. CURVE COME LUOGHI DI ZERI DI FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

Inseriamo in questo capitolo una piccola parentesi anticipando l'uso di funzioni di più variabili, che sarà forse più chiaro quando ne parleremo, ma che può essere utile ad una migliore comprensione dell'argomento che stiamo trattando.

Le curve possono essere espresse non solo in maniera parametrica, e quindi esplicita, ma anche implicitamente come intersezione di superfici o ipersuperfici.

L'esempio più semplice può essere il seguente: una curva nel piano espressa come luogo di zeri di una funzione $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$. Si osservi che il grafico di f è un sottoinsieme di $\mathbf{R}^3$, se f è regolare tale grafico è una superficie (che sarà definita precisamente più avanti). Indicando con x, y, z nell'ordine le tre variabili di $\mathbf{R}^3$, con x, y le due variabili da cui dipende f e che metteremo abitualmente nel piano orizzontale e z la variabile nell'asse verticale, si osservi come considerare il luogo degli zeri di f

$$f(x, y) = 0$$

è equivalente a considerare l'intersezione tra le due superfici

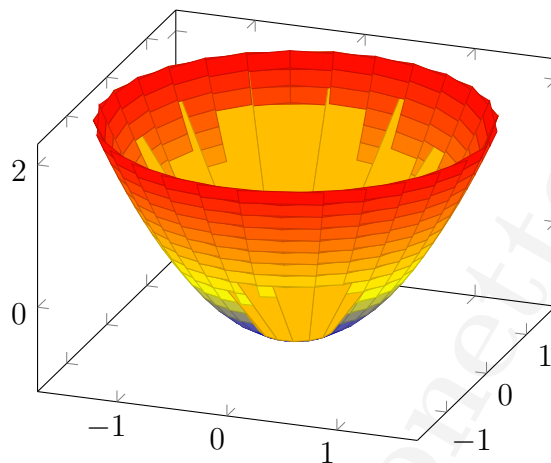
$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ z = 0 \end{cases}$$

Ad esempio la circonferenza in Figura 1 può essere vista come il luogo degli zeri della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ il cui grafico è mostrato in Figura 19 (si veda anche l'inizio del prossimo capitolo). Si noti che ciò è simile, ma non equivalente, a considerare la funzione $\tilde{f}(x, y) = x^2 + y^2$ ed intersecarne il grafico con il piano $z = 1$

$$\begin{cases} z = \tilde{f}(x, y) \\ z = 1 \end{cases}$$

Si ottiene sempre una circonferenza di raggio 1; ma mentre prima avevamo i punti (x, y, z) di $\mathbf{R}^3$ con $x^2 + y^2 = 1$ e $z = 0$, nel secondo caso si hanno i punti (x, y, z) di $\mathbf{R}^3$ con $x^2 + y^2 = 1$, ma con $z = 1$!

Figura 19 - Paraboloide



3. CURVE COME INTERSEZIONE DI DUE SUPERFICI

Quanto detto nel breve paragrafo precedente può essere visto come caso particolare dell'intersezione di due superfici: la prima data dal grafico di una funzione $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, la seconda il piano orizzontale $z = 0$, che è il grafico della funzione da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$ che associa a qualunque $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ il valore 0.

Vediamo ora due esempi, nel primo intersechiamo due grafici, nel secondo due superfici una delle quali non è un grafico, ma a sua volta un luogo di zeri.

Possiamo intersecare $\tilde{f}(x, y) = x^2 + y^2$ con un piano inclinato: si ottiene (si può ottenere) un'ellisse (cosa si ottiene se il piano è verticale?). Un piano che è grafico di una funzione $p : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $p(x, y) = ax + by + d$ è espresso come $z = ax + by + d$, $a, b, d \in \mathbf{R}$. Più in generale può essere visto come luogo di zeri di una funzione di tre variabili a valori in $\mathbf{R}$, cioè $q : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$, $q(x, y, z) = ax + by + cz + d = 0$, $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. In questo caso contempliamo più casi, perché i piani verticali, ottenuti considerando $c = 0$, non possono essere visti come grafici di una funzione come p .

Verifichiamo che il paraboloide ha come intersezione con il piano $z = ax + by + d$ un'ellisse, posto che d soddisfi una certa condizione. Considerando il sistema

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = ax + by + d \end{cases}$$

si ottiene

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = d + \frac{a^2 + b^2}{4} = \frac{4d + a^2 + b^2}{4}$$

che rappresenta una circonferenza di raggio r , dove r^2 è $(4d + a^2 + b^2)/4$, se $d > -\frac{a^2+b^2}{4}$. Tale circonferenza è la proiezione sul piano xy dell'ellisse che cerchiamo. Ora possiamo parametrizzare l'ellisse che cerchiamo come segue: le prime due componenti saranno quelle che descrivono la circonferenza appena ottenuta. La curva sarà quindi

$$\gamma(t) = \left(\frac{a}{2} + r \cos t, \frac{b}{2} + r \sin t, \dots \right), \quad t \in [0, 2\pi].$$

La terza componente, quella lungo l'asse z , può essere espressa usando l'espressione $x^2 + y^2$ oppure $ax + by + d$ dal momento che debbono essere uguali affinché i punti che γ descrive vogliano stiano sull'ellisse, per cui l'ellisse può essere parametrizzata indifferentemente in uno dei due seguenti modi

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \left(\frac{a}{2} + r \cos t, \frac{b}{2} + r \sin t, \left(\frac{a}{2} + r \cos t \right)^2 + \left(\frac{b}{2} + r \sin t \right)^2 \right), \\ \gamma(t) &= \left(\frac{a}{2} + r \cos t, \frac{b}{2} + r \sin t, \frac{a^2}{2} + ar \cos t + \frac{b^2}{2} + br \sin t + d \right), \end{aligned}$$

al variare di $t \in [0, 2\pi]$. Si verifica facilmente che nel primo caso si ha

$$\begin{aligned} \gamma_3(t) &= \frac{a^2}{4} + r^2 \cos^2 t + ar \cos t + \frac{b^2}{4} + r^2 \sin^2 t + br \sin t = \\ &= \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + r^2 + ar \cos t + br \sin t. \end{aligned}$$

Poiché $r^2 = d + \frac{a^2+b^2}{4}$ si conclude che le due espressioni di γ_3 effettivamente coincidono.

Per verificare che tale curva è effettivamente un'ellisse si può procedere come nell'esempio che segue, e la verifica viene lasciata per esercizio.

Altro esempio: consideriamo l'intersezione di un cilindro con un piano. Il piano sarà sempre il grafico della funzione $p(x, y) = ax + by + d$, e cioè l'insieme

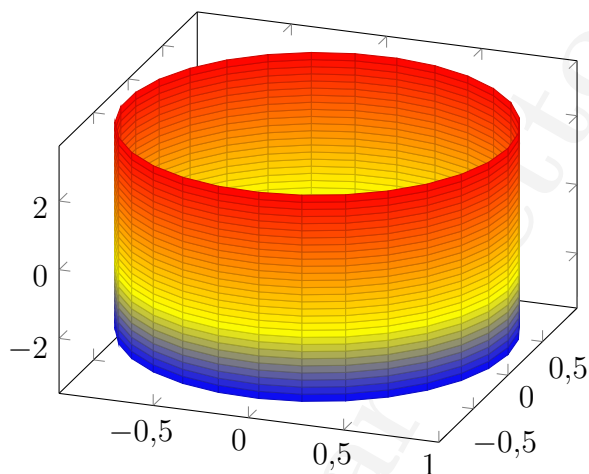
$$P = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = ax + by = d\},$$

il cilindro invece un luogo di zeri, e precisamente

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\},$$

disegnato parzialmente in Figura 13.b.

Figura 13.b - Cilindro



Se definiamo, ad esempio, la funzione $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$ si ha che l'insieme C è il luogo degli zeri di g , ma esistono infinite scelte per g .

EX - Si trovino altri esempi di funzioni da $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}$ il cui luogo degli zeri sia C .

L'intersezione dell'insieme C con il piano P è una curva i cui punti devono prima di tutto stare sul cilindro, quindi soddisfare l'equazione

$$x^2 + y^2 = 1$$

per cui la curva può essere parametrizzata da $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \dots)$. La terza componente infine sarà $a \cos t + b \sin t + d$.

Vediamo che tale curva è un'ellisse. Ci limitiamo al caso $b = 0$. Ciò non toglie generalità, data la simmetria del cilindro, ma dall'altra parte semplifica leggermente i calcoli. Il piano P sarà quindi il grafico della funzione $p(x, y) = ax + d$ e la curva sarà

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, a \cos t + d), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Possiamo ruotare il piano P cambiando le variabili in modo da far stare il sostegno di γ in un piano orizzontale. Se si considera l'angolo

$\alpha = -\arctg a$ e si applica la rotazione

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

alle variabili (x, y, z) otteniamo che la curva γ diventa

$$\tilde{\gamma}(t) = (\cos \alpha \cos t - \sin \alpha(a \cos t + d), \sin t, \sin \alpha \cos t + \cos \alpha(a \cos t + d)).$$

Si osservi che la terza componente, poiché $\tg \alpha = -a$, è costante. Infatti

$$\sin \alpha \cos t + \cos \alpha(a \cos t + d) = \cos \alpha[-a \cos t + a \cos t + d] = d \cos \alpha,$$

mentre che la prima componente è $(\cos \alpha + a \sin \alpha) \cos t + d \sin \alpha$. Il fatto che la terza componente sia costante ci dice che il sostegno della curva giace su di un piano orizzontale. Le prime due componenti di $\tilde{\gamma}$ sono

$$(\cos \alpha + a \sin \alpha) \cos t + d \sin \alpha \quad \text{e} \quad \sin t$$

che soddisfano, se indichiamo con $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ le nuove variabili,

$$\frac{(\tilde{x} - d \sin \alpha)^2}{(\cos \alpha + a \sin \alpha)^2} + \tilde{y}^2 = 1.$$

Si osservi che tale ellisse non è centrata nell'origine. Per averla centrata nell'origine dovremmo traslarla in modo tale che il baricentro diventi l'origine.

Il baricentro della curva γ è $(0, 0, d)$ (il calcolo non è semplice, ma ci si convince facilmente che tale punto è il baricentro). Considerando allora la curva $\gamma(t) - (0, 0, d)$ e ruotandola si ottiene una curva sul piano $\tilde{x}\tilde{y}$ espressa dal seguente luogo di zeri

$$\frac{\tilde{x}^2}{(\cos \alpha + a \sin \alpha)^2} + \tilde{y}^2 - 1 = 0.$$

Altro modo, più semplice, ma meno evidente ad un primo sguardo, è quello di vedere tale ellisse come luogo di punti di $\mathbf{R}^3$ espresso in termini di x, y, z . Possiamo fare come segue: si consideri

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = x \end{cases}$$

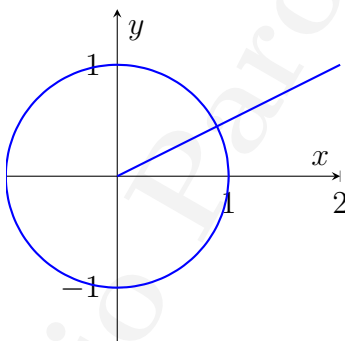
$$\alpha + \beta + \gamma = 1, \gamma = 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}, \alpha = \beta$$

$$x^2 = \alpha x^2 + \beta x^2 + \gamma x^2 = \alpha x^2 + \beta z^2 + \gamma xz = (\sqrt{\alpha}x + \sqrt{\beta}z)^2$$

4. COORDINATE POLARI E FORMA POLARE DI UNA CURVA

Ricordiamo cosa sono le coordinate polari. Sono una possibile alternativa alle coordinate cartesiane per descrivere punti in $\mathbf{R}^2$. Dato $\rho \in [0, +\infty)$ e $\vartheta \in [0, 2\pi)$ possiamo descrivere un punto P nel piano con la coppia (ρ, ϑ) . Il punto si individua intersecando una semiretta con una circonferenza, la semiretta è quella uscente dall'origine che si ottiene ruotando in senso antiorario la semiretta delle ascisse positive di un angolo ϑ ; la circonferenza è quella dei punti che distano ρ dall'origine, come mostrato in Figura 10.

Figura 10



Per passare dalla rappresentazione polare (ρ, ϑ) a quella cartesiana (x, y) è sufficiente considerare

$$x(\rho, \vartheta) = \rho \cos \vartheta, \quad y(\rho, \vartheta) = \rho \sin \vartheta.$$

Per il viceversa ricordiamo che

$$\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \vartheta(x, y) = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x} & \text{se } x > 0, y \geq 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0, y > 0, \\ \arctg \frac{y}{x} + \pi & \text{se } x < 0, \\ \frac{3}{2}\pi & \text{se } x = 0, y < 0, \\ \arctg \frac{y}{x} + 2\pi & \text{se } x > 0, y < 0. \end{cases}$$

L'espressione di ϑ si trova osservando che il punto

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

ha modulo 1, per cui sta sulla circonferenza di raggio 1. Esisterà quindi un angolo $\vartheta \in [0, 2\pi)$ tale che

$$\cos \vartheta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \vartheta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

A questo punto si conclude osservando che

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} = \frac{y}{x}$$

e che

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} t) = \begin{cases} t & \text{se } t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ t - \pi & \text{se } t \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \\ t - 2\pi & \text{se } t \in \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right), \end{cases}$$

da cui si ricava l'espressione di ϑ ricordata sopra.

Forma polare di una curva - Un modo per descrivere una curva nel piano (e solo nel piano!) è la forma polare. Il punto di partenza è la forma implicita

$$F(x, y) = 0$$

per una qualche funzione f di due variabili, si supponga cioè di avere una curva che sia il luogo degli zeri di una certa funzione f . A questo punto si usano le coordinate polari per riscrivere tale luogo di zeri come segue:

$$(2) \quad F(x(\rho, \vartheta), y(\rho, \vartheta)) = 0$$

che diventa un'espressione (implicita!) in ρ e ϑ . E questa è la forma polare.

La cosa è interessante quando, invece di complicarle, questo procedimento semplifica le cose. Questo accade, per esempio, quando si riesce ad esprimere un parametro rispetto all'altro, tipicamente ρ in termini di ϑ ; in quest'ultimo caso, quindi, esiste una funzione

$$f: I \rightarrow \mathbf{R}, \quad I \text{ intervallo di } \mathbf{R}$$

tale che l'espressione in (2) si riduce a

$$(3) \quad \rho = f(\vartheta) \quad \text{con } \vartheta \in I.$$

Si osservi come non abbiamo posto limitazioni su I che potrebbe essere anche tutto $\mathbf{R}$ o comunque un intervallo che contiene $[0, 2\pi)$.

Noi ci limiteremo a considerare i casi fortunati mostrati in (3), anche se qualche esempio più generale è mostrato, per i più curiosi, nel sottoparagrafo **Approfondimento**.

La forma polare data in (3) risulta, a volte, più comoda o più esplicativa dell'analogia forma implicita data con le variabili cartesiane. A tal proposito si vedano gli esempi mostrati negli Esempi 4.1.

È possibile passare dalla rappresentazione in forma polare alla forma parametrica usando il cambio di variabile ricordato sopra. Data una curva in forma polare come in (3) trovare una parametrizzazione è molto semplice: se la curva è $\rho = f(\vartheta)$ allora una sua parametrizzazione è data da

$$(4) \quad x(\vartheta) = f(\vartheta) \cos \vartheta, \quad y(\vartheta) = f(\vartheta) \sin \vartheta.$$

Data una curva nel piano in forma parametrica $(x(t), y(t))$ non è sempre semplice passare alla forma polare. Risulta semplice (e immediato) se esiste una funzione f in modo tale che le sue componenti siano

$$x(\vartheta) = f(\vartheta) \cos \vartheta, \quad y(\vartheta) = f(\vartheta) \sin \vartheta,$$

e questo non è sempre vero. È immediato se raccogliendo $\cos \vartheta$ dal termine $x(\vartheta)$ e $\sin \vartheta$ dal termine $y(\vartheta)$ si ottiene la stessa funzione f .

Esempi 4.1. - L'esempio più semplice è la circonferenza di raggio r espressa in forma implicita da

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Sostituendo a x l'espressione $\rho \cos \vartheta$ e a y l'espressione $\rho \sin \vartheta$ si ottiene la forma polare della circonferenza di raggio r

$$\rho = r.$$

La funzione f dell'espressione (3) in questo caso è costante e vale r . Consideriamo ora la curva in forma polare

$$\rho = \vartheta, \quad \text{con } \vartheta \geq 0.$$

Si osservi innanzitutto che in questo caso ϑ non è confinato tra 0 e 2π e inoltre è facile convincersi che tale luogo di zeri descrive una spirale, così come tutte le curve

$$\rho = f(\vartheta)$$

con f strettamente crescente. Altri esempi di spirali sono

$$\rho = \vartheta^\alpha, \quad \text{con } \vartheta \geq 0$$

dove $\alpha > 0$ (il cui sostegno, per $\alpha = 2$ è mostrato in Figura 12) o

$$\rho = e^{\vartheta}, \quad \text{con } \vartheta \in \mathbf{R}.$$

Esempio 4.2. - Consideriamo le curve espresse in forma polare da

$$(5) \quad \rho = 2a \cos \vartheta + h, \quad a, h \text{ parametri positivi.}$$

Per $h = 2a$ abbiamo la curva chiamata cardioide (si veda la Figura 11); la cuspidè è nell'origine e corrisponde a $\vartheta = \pi$. Per $h > 2a$ la curva in Figura 11.b, per $h < 2a$ la curva in Figura 11.c.

Supponiamo di volerla scrivere in maniera esplicita rispetto ad un parametro: poiché $x(\rho, \vartheta) = \rho \cos \vartheta$ e $y(\rho, \vartheta) = \rho \sin \vartheta$ e poiché conosciamo anche ρ in termini di ϑ si avrà che x e y dipendono di fatto solo da ϑ come segue

$$x(\vartheta) = f(\vartheta) \cos \vartheta \quad \text{e} \quad y(\vartheta) = f(\vartheta) \sin \vartheta.$$

Quindi la curva parametrizzata (rispetto al parametro ϑ) sarà

$$(6) \quad x(\vartheta) = 2a \cos^2 \vartheta + h \cos \vartheta, \quad y(\vartheta) = 2a \cos \vartheta \sin \vartheta + h \sin \vartheta.$$

Per cui $\gamma(\vartheta) = (x(\vartheta), y(\vartheta))$ con $\vartheta \in [0, 2\pi]$ descrive la stessa curva indicata in (5).

Provando a ritroso si ha che $x^2(\vartheta) + y^2(\vartheta) = (2a \cos \vartheta + 2a)^2$ (abbiamo scelto $h = 2a$), per cui

$$\rho(\vartheta) = 2a \cos \vartheta + 2a.$$

Si consideri ora $h = a$, curva rappresentata in Figura 11.c: si osservi come ρ possa diventare negativo. Ad esempio, per $\vartheta = \pi$ si ha $\rho = -a$. Questo non è in contraddizione con il fatto che ρ rappresenta la distanza dall'origine, e quindi dovrebbe essere non negativo, per il seguente motivo: si ammettono valori negativi per ρ con la convenzione che la distanza dall'origine va intesa nella direzione opposta da quella indicata dall'angolo ϑ , cioè nella direzione indicata dall'angolo $\vartheta + \pi$.

Esempio 4.3. - Si consideri l'astroide definito da $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ per $t \in [0, 2\pi]$ (si veda la Figura 15).

Per ottenere una scrittura come (4) bisognerebbe trovare f . Però raccogliendo $\cos t$ dalla prima componente e $\sin t$ dalla seconda non rimane la stessa quantità che rappresenterebbe f . Anche se ad ogni valore di ϑ (si veda la Figura 15) corrisponde un (solo) valore di ρ , questo non è esprimibile in maniera immediata, anche se è possibile farlo. Per farlo bisogna scrivere la curva come luogo di zeri di una funzione di due

variabili (le variabili cartesiane) e passare alle variabili polari (come mostrato nel sottoparagrafo che segue).

Approfondimento - Per scrivere una curva in forma polare non basta averne un'espressione parametrica, si deve utilizzare un'espressione in coordinate cartesiane che la descriva come luogo di zeri di una funzione di due variabili (a tal proposito si vedano gli ultimi due paragrafi), dopodiché esprimere le coordinate cartesiane tramite le coordinate polari. Vediamo un esempio. La seguente parametrizzazione di un'ellisse centrata in $(0, 0)$

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad \gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$$

non è, evidentemente, in forma polare: se ciò fosse vero si dovrebbe avere una funzione $f = f(\vartheta)$ che soddisfa sia $f(\vartheta) = a$ che $f(\vartheta) = b$, ma se $a \neq b$ questo è evidentemente impossibile.

Ma se partiamo dall'espressione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e sostituiamo x con $\rho \cos \vartheta$ e y con $\rho \sin \vartheta$ otteniamo

$$\frac{\rho^2 \cos^2 \vartheta}{a^2} + \frac{\rho^2 \sin^2 \vartheta}{b^2} = 1$$

da cui si ricava

$$\rho^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 \vartheta + a^2 \sin^2 \vartheta}.$$

Volendo si può anche scrivere ρ come dipendente solamente dal coseno oppure dal seno di ϑ nei modi seguenti:

$$\rho^2 = \frac{a^2}{1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right) \sin^2 \vartheta} = \frac{b^2}{1 + \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right) \cos^2 \vartheta}.$$

Nel caso dell'astroide considerato precedentemente e parametrizzato da $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ con $t \in [0, 2\pi]$ si ha che tale curva può essere vista come l'insieme dei punti di $\mathbf{R}^2$ soddisfacenti

$$|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = 1.$$

Passando alle coordinate polari si ottiene

$$\rho = \left(\frac{1}{|\cos \vartheta|^{2/3} + |\sin \vartheta|^{2/3}} \right)^{3/2}.$$

Vediamo altri due esempi: la retta e la circonferenza. Si consideri la retta data come luogo dei punti $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ che soddisfano

$$ax + by + c = 0.$$

In forma polare diventa

$$\rho(a \cos \vartheta + b \sin \vartheta) + c = 0$$

o equivalentemente, esplicitando ρ in funzione di ϑ ,

$$\rho = -\frac{c}{a \cos \vartheta + b \sin \vartheta}.$$

Nel caso in cui $b \neq 0$ possiamo anche scrivere

$$y - mx - q = 0$$

dove $m = -a/b$ e $q = -c/b$. In tal caso si ottiene l'espressione

$$\rho = \frac{q}{\sin \vartheta - m \cos \vartheta}.$$

Ad esempio la retta $y = 1$ diventerebbe in forma polare

$$\rho = \frac{1}{\sin \vartheta}.$$

È chiaro che tale espressione ha senso solo quando il seno è positivo e quindi, implicitamente, si ha che $\vartheta \in (0, \pi)$.

Volendo scrivere una parametrizzazione di tale curva partendo dalla sua forma polare si scrive

$$\vartheta \mapsto \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \cos \vartheta, \frac{1}{\sin \vartheta} \sin \vartheta \right) = \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \vartheta}, 1 \right)$$

da cui si ritrova $y = 1$.

Consideriamo ora una circonferenza parametrizzata come segue

$$\eta : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad \gamma(t) = (\alpha + r \cos t, \beta + r \sin t)$$

che rappresenta la circonferenza di raggio r e di centro (α, β) . Nel caso in cui $\alpha = \beta = 0$ si ha facilmente che tale curva è anche rappresentabile implicitamente da

$$x^2 + y^2 = r^2$$

per cui, usando le coordinate polari, si ha

$$\rho^2 \cos^2 \vartheta + \rho^2 \sin^2 \vartheta = r^2$$

da cui la forma polare della circonferenza centrata in $(0, 0)$

$$\rho = r.$$

In generale la curva η parametrizza il luogo dei punti che soddisfa

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

per cui l'espressione in forma polare è la seguente

$$\rho^2 - \rho(2\alpha \cos \vartheta + 2\beta \sin \vartheta) + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0.$$

Si deduce quindi come la forma polare sia una forma implicita che qualche volta si semplifica riuscendo ad esprimere semplicemente ρ in termini di ϑ , ma come si vede dall'esempio precedente anche in casi semplici, come la circonferenza, l'espressione può semplificarsi molto in casi particolari (se si sceglie un opportuno sistema di riferimento centrato nell'origine della circonferenza), ma in generale è tutt'altro che semplice.

EX - Si scriva in forma polare la curva $\gamma(t) = (t^2 \cos t, t^2 \sin t)$ con $t \in [0, +\infty)$, disegnata parzialmente in Figura 12.

Figura 11.a - Cardioide

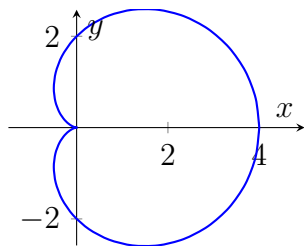


Figura 11.b

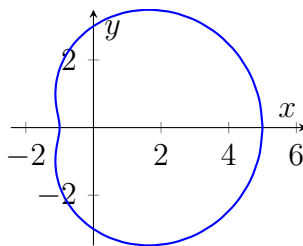


Figura 11.c

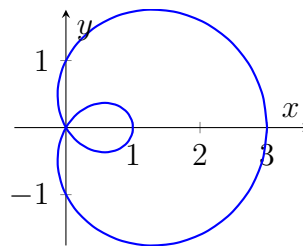
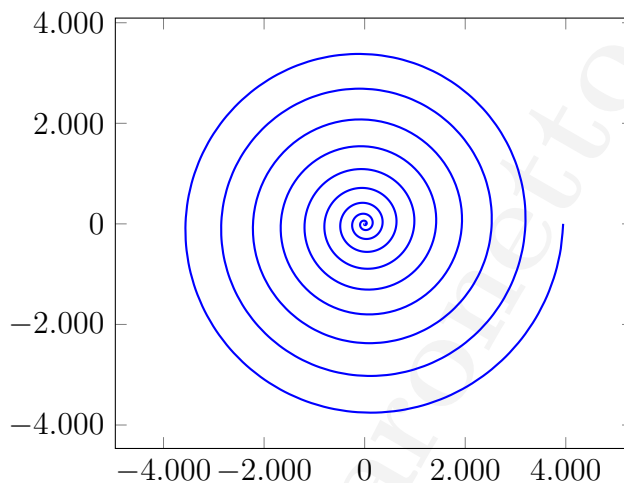


Figura 12



5. INTEGRALE DI UNA FUNZIONE A VALORI VETTORIALI

Data una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ poniamo per definizione

$$\int_a^b \gamma(t) dt := \left(\int_a^b \gamma_1(t) dt, \int_a^b \gamma_2(t) dt, \dots, \int_a^b \gamma_n(t) dt \right)$$

dove $\gamma_i : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ è la i -esima componente di γ . Per tale integrale valgono molte delle proprietà che valgono per l'integrale di funzioni scalari (ad esempio la linearità). Fra le altre ne vediamo due in modo particolare: la prima si mostra facilmente usando l'analogo teorema per funzioni scalari, la seconda è un po' più delicata, ma la dimostrazione (che non vediamo) si rifà sempre ad un calcolo per funzioni scalari.

Teorema 5.1 (Teorema fondamentale del calcolo integrale). *Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ è una curva di classe C^1 vale*

$$\int_a^b \gamma'(t) dt = \gamma(b) - \gamma(a).$$

Lemma 5.2. *Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ è integrabile (cioè lo è per componenti) allora*

$$\left| \int_a^b \gamma(t) dt \right| \leq \int_a^b |\gamma(t)| dt.$$

6. LUNGHEZZA DI UNA CURVA

Data una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ si dice *suddivisione* di $[a, b]$ un insieme finito di punti $\mathcal{T} = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_k\}$ tale che

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{k-1} < t_k = b.$$

Ad una suddivisione possiamo far corrispondere una poligonale $P(\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_k))$ inscritta alla curva γ e di vertici i punti $\gamma(t_i)$, $i = 0, 1, \dots, k$ come rappresentato in Figura 13. Definiamo la lunghezza della poligonale $P(\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_k))$, e la denoteremo con $l(\gamma, \mathcal{T})$, come segue:

$$l(\gamma, \mathcal{T}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^k |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|.$$

Ricordando che $[x, y]$ denota il segmento che unisce x e y la somma di sopra altro non è che la somma delle lunghezze di tutti i segmenti $[\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)]$.

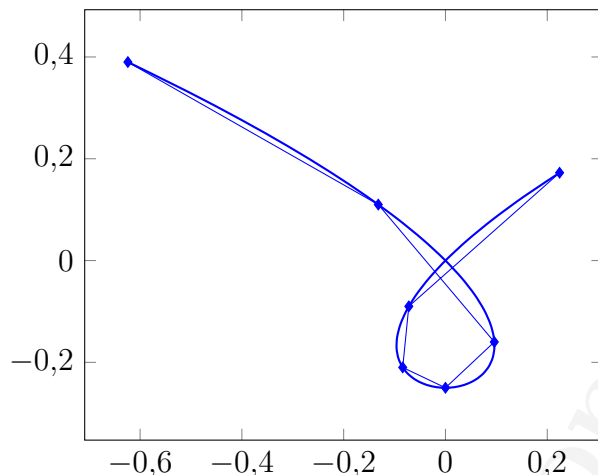
Date due suddivisioni $\mathcal{T}$ e $\mathcal{S}$ diremo che $\mathcal{S}$ è più fine di $\mathcal{T}$ se

$$\mathcal{S} \supset \mathcal{T}.$$

Si prova facilmente (**EX**) che $\mathcal{S}$ è più fine di $\mathcal{T}$ si ha

$$l(\gamma, \mathcal{T}) \leq l(\gamma, \mathcal{S}).$$

Figura 13



Definizione 6.1 (lunghezza di una curva). Si definisce lunghezza di una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ la quantità

$$(7) \quad l(\gamma; [a, b]) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{ l(\gamma, \mathcal{T}) \mid \mathcal{T} \text{ suddivisione di } [a, b] \},$$

cioè l'estremo superiore al variare di tutte le suddivisioni di $[a, b]$ delle lunghezze delle poligoni inscritte alla curva γ . Nel caso in cui tale quantità è finita diremo che la curva è rettificabile. Se chiaro dal contesto qualche volta scriveremo semplicemente $l(\gamma)$ anziché $l(\gamma; [a, b])$.

Attenzione! Nemmeno una curva continua e definita su di un intervallo compatto ha necessariamente lunghezza finita. Infatti $l(\gamma; [a, b])$ può essere $+\infty$, quindi non tutte le curve sono rettificabili (continueremo a denotare con $l(\gamma; [a, b])$ la lunghezza anche nel caso questa sia $+\infty$).

A conferma di ciò si consideri la curva in Figura 14 definita da

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{cases} \left(t, t \cos \left(\frac{\pi}{t} \right) \right) & \text{se } t \in (0, 1], \\ (0, 0) & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Si osservi che tale curva è continua perché la funzione $t \cos \left(\frac{\pi}{t} \right)$ è continua in $(0, 1]$ e inoltre

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t \cos \left(\frac{\pi}{t} \right) = 0$$

(per cui $t \cos\left(\frac{\pi}{t}\right)$ può essere prolungata per continuità fino a 0). Consideriamo la particolare suddivisione decrescente

$$\mathcal{T}_m := \{t_0 = 1, t_1, t_2, \dots, t_m, 0\}$$

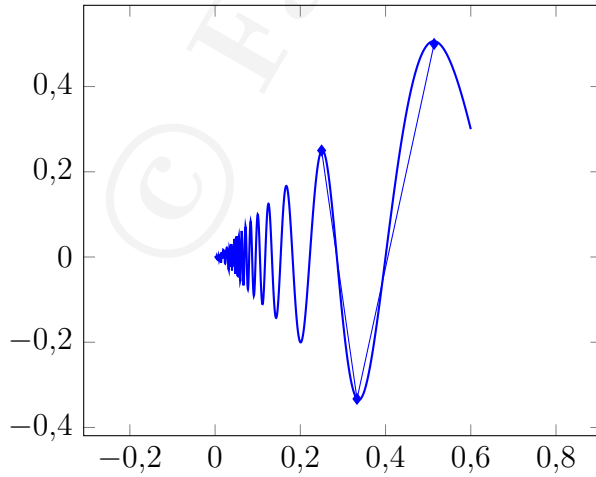
con $1 > t_1 > t_2 > \dots > t_m > 0$ e t_j scelto in modo tale che

$$\cos\left(\frac{\pi}{t_j}\right) = 1 \quad \text{se } j \text{ dispari}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{t_j}\right) = -1 \quad \text{se } j \text{ pari},$$

cioè $t_j = \frac{1}{j+1}$; il punto 0 è preso solo per completare la suddivisione ed avere una poligonale che termina nell'origine. Si verifica facilmente che

$$\begin{aligned} l(\gamma, \mathcal{T}_m) &= \sum_{j=1}^m |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| + |\gamma(t_m) - \gamma(0)| = \\ &= \sum_{j=1}^m \left| \left(\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j+1} \cos((j+1)\pi) \right) - \left(\frac{1}{j}, \frac{1}{j} \cos(j\pi) \right) \right| + |\gamma(t_m)| \geq \\ &\geq \sum_{j=1}^m \left| \frac{1}{j+1} \cos((j+1)\pi) - \frac{1}{j} \cos(j\pi) \right| + |\gamma(t_m)| = \\ &= \sum_{j=1}^m \left| \frac{1}{j+1} + \frac{1}{j} \right| \geq \sum_{j=1}^m \frac{1}{j} + |\gamma(t_m)| \end{aligned}$$

Figura 14



per cui passando all'estremo superiore su tutte le suddivisioni si ha

$$l(\gamma) \geq l(\gamma, \mathcal{T}_m) \geq \sum_{j=1}^m \frac{1}{j} + |\gamma(t_m)|$$

e poiché ciò vale per ogni $m \in \mathbf{N}$ possiamo passare al limite e ottenere, dal momento che $|\gamma(t_m)| \rightarrow 0$,

$$l(\gamma) \geq \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^m \frac{1}{j} = +\infty.$$

Proposizione 6.2. *Dati $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ e $a, b, c \in I$ con $a < b < c$ si ha che*

$$l(\gamma; [a, c]) = l(\gamma; [a, b]) + l(\gamma; [b, c]).$$

Dimostrazione - Senza dimostrazione. $\square$

Proposizione 6.3. *Siano $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$, I, J due intervalli e $\alpha : J \rightarrow I$ un cambio di parametro ammissibile (cioè di classe C^1 e $\alpha'(t) \neq 0$ per ogni $t \in J$). Allora $l(\gamma; I) = l(\gamma \circ \alpha; J)$.*

Dimostrazione - È sufficiente osservare che data una suddivisione $\{t_0, t_1, \dots, t_k\}$ di I l'insieme $\{\alpha^{-1}(t_0), \alpha^{-1}(t_1), \dots, \alpha^{-1}(t_k)\}$ è una suddivisione di J . $\square$

Il seguente teorema è un risultato interessante perché fornisce una tecnica, perlomeno in molti casi, per calcolare esplicitamente l'estremo superiore (7).

Teorema 6.4. *Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ una curva C^1 . Allora*

$$l(\gamma; [a, b]) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Osservazione 6.5. - In realtà è sufficiente che la curva sia C^1 a tratti. Sia ad esempio $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ $C^1([a, c])$ e $C^1([c, b])$ con $c \in (a, b)$. Allora usando la Proposizione 6.2 ci si può limitare a calcolare $l(\gamma; [a, c])$ e $l(\gamma; [c, b])$ e sommare queste due quantità. Poiché negli intervalli $[a, c]$ e $[c, b]$ γ risulta C^1 usando il teorema appena enunciato si ottiene che

$$l(\gamma; [a, b]) = \int_a^c |\gamma'(t)| dt + \int_c^b |\gamma'(t)| dt.$$

A tal proposito si veda anche l'Esercizio 7.3.

Dimostrazione del Teorema 6.4 - Come si fa spesso mostriamo che valgono due disuguaglianze opposte, da cui avremo l'uguaglianza. Cominciamo con il mostrare che $l(\gamma; [a, b]) \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt$. Data una poligonale P inscritta a γ associata ad una suddivisione $\mathcal{T} = \{t_0, t_1, \dots, t_k\}$ di $[a, b]$ si ha che (usando il Teorema 5.1 e il Lemma 5.2

$$|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| = \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t) dt \right| \leq \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'(t)| dt$$

Sommando su tutti gli indici j si ha

$$l(\gamma; \mathcal{T}) = \sum_{j=1}^k |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \leq \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'(t)| dt = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

e passando all'estremo superiore su tutte le poligonali si ottiene

$$l(\gamma; [a, b]) \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Per mostrare la disuguaglianza opposta si fissi $\varepsilon > 0$ arbitrariamente. Poiché ogni componente di γ' è uniformemente continua in $[a, b]$ (teorema di Heine-Cantor) si può trovare $\delta = \delta(\varepsilon)$ tale che se $|t - s| < \delta$ si ha $|\gamma'(t) - \gamma'(s)| < \varepsilon$. Scegliendo quindi una suddivisione $\mathcal{T} = \{t_0, t_1, \dots, t_k\}$ tale che $|t_j - t_{j-1}| < \delta$ per ogni $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ in particolare si ha

$$(8) \quad |\gamma'(t) - \gamma'(t_{j-1})| < \varepsilon \quad \text{per } t \in [t_{j-1}, t_j],$$

per ogni $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Di conseguenza integrando si ottiene

$$(9) \quad \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'(t)| dt \leq \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'(t_{j-1})| dt + \varepsilon(t_j - t_{j-1}).$$

Stimiamo ora la quantità $\int_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'(t_{j-1})| dt$: si osservi innanzitutto che, poiché l'integrando è costante,

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'(t_{j-1})| dt = \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t_{j-1}) dt \right|,$$

da cui usando (8) si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'(t_{j-1})| dt &= \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t_{j-1}) dt \right| = \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} [\gamma'(t) + (\gamma'(t_{j-1}) - \gamma'(t))] dt \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t) dt \right| + \varepsilon(t_j - t_{j-1}). \end{aligned}$$

Usando questa stima in (9) e sommando (9) su j si ottiene

$$\begin{aligned} \int_a^b |\gamma'(t)| dt &\leq \sum_{j=1}^k \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t) dt \right| + 2\varepsilon(b-a) = \\ &= \sum_{j=1}^k |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| + 2\varepsilon(b-a) = \\ &= l(\gamma, \mathcal{T}) + 2\varepsilon(b-a) \leq l(\gamma; [a, b]) + 2\varepsilon(b-a). \end{aligned}$$

Poiché la quantità $2\varepsilon(b-a)$ è arbitraria per l'arbitrarietà di ε si conclude che $\int_a^b |\gamma'(t)| dt \leq l(\gamma; [a, b])$. $\square$

Esercizio 6.6. - Calcoliamo la lunghezza della curva $\gamma : [0, a] \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\gamma(t) = (t, t^2/2)$. Poiché la curva è C^1 è sufficiente calcolare $\int_0^1 |\gamma'(t)| dt$. Si osservi che γ è una curva cartesiana, cioè $\gamma(t) = (t, f(t))$ con f funzione di una variabile reale e a valori reali. Calcolando il modulo della derivata si ha

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{1 + (f'(t))^2}.$$

che è l'espressione generale per $|\gamma'(t)|$ nel caso di curve cartesiane. Nel nostro caso $f(t) = t^2/2$ e si ha

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{1 + t^2}.$$

L'integrale, usando il cambio di variabile $t = \sinh x$ (ricordiamo che $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$), diventa

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= \int_0^a \sqrt{1 + t^2} dt = \int_0^{\log(a + \sqrt{1 + a^2})} \cosh^2 x dx = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\log(a + \sqrt{1 + a^2})} (e^{2x} + e^{-2x} + 2) dx = \\ &= \frac{1}{8} (a + \sqrt{1 + a^2})^2 - \frac{1}{8} (a + \sqrt{1 + a^2})^{-2} + \frac{1}{2} \log(a + \sqrt{1 + a^2}). \end{aligned}$$

EX - Calcolare la lunghezza della curva cartesiana $t \mapsto (t, \sqrt{2t})$ con $t \in [0, a^2/2]$. (Suggerimento: disegnare il sostegno della curva e confrontarlo con quello della curva dell'Esercizio 6.6)

7. PARAMETRO D'ARCO O ASCISSA CURVILINEA

Abbiamo già notato che alcune curve possono avere modulo della derivata nullo in qualche punto e che possono esistere parametrizzazioni

diverse di uno stesso insieme, alcune regolari e altre che magari lo sono solo a tratti (si veda l'Esempio 1.2.1 nel primo paragrafo, funzioni r_2 e r_3).

Ora vedremo come esiste una maniera standard di parametrizzare una data una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ in modo tale che il modulo della derivata sia sempre uguale ad 1.

Data γ regolare a tratti definiamo la quantità

$$s(t) = \int_a^t |\gamma'(\sigma)| d\sigma, \quad s : [a, b] \rightarrow [0, l(\gamma; [a, b])].$$

Questa quantità esprime la lunghezza dell'arco di curva tra a e t e non è altro che $l(\gamma; [a, t])$. Si osservi che la funzione s ha come immagine l'intervallo $[0, l(\gamma; [a, b])]$ ed è strettamente crescente, per cui è una funzione invertibile. Chiamando t la sua inversa ed esprimendo t rispetto ad s si ha una funzione

$$\begin{array}{ccc} t : [0, l(\gamma; [a, b])] & \longrightarrow & [a, b] \\ s & \longmapsto & t(s) \end{array}$$

che è un cambio di variabile e risulta derivabile e la sua derivata è

$$(10) \quad t'(s) = \frac{1}{s'(t(s))} = \frac{1}{|\gamma'(t(s))|}.$$

Ora le due curve

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$$

e

$$\tilde{\gamma} : [0, l(\gamma; [a, b])] \rightarrow \mathbf{R}^n \quad \text{definita da } \tilde{\gamma}(s) := \gamma \circ t(s) = \gamma(t(s))$$

sono equivalenti. La particolarità del parametro s , detto *parametro d'arco* oppure *ascissa curvilinea*, è che s coincide esattamente con lo spazio percorso dall'ideale punto mobile che segue la curva. Questo fa sì che la derivata della curva così parametrizzata abbia sempre lunghezza 1, come si ricava facilmente da (10).

Attenzione! Questo significa che, da un punto di vista figurativo, la curva è tracciata a velocità costante. Ma solo nel modulo! Perché (siamo in $\mathbf{R}^n$) la velocità potrebbe cambiare direzione e quindi subire delle variazioni (come pure l'accelerazione).

Ad esempio, la curva σ_1 con $r = 1$ dell'Esempio 1.2.2 nel primo paragrafo ha chiaramente modulo della derivata uguale ad 1, ma la direzione della derivata cambia.

Esempio 7.1. - Vediamo ora qualche esempio nel quale riparametrizziamo secondo l'ascissa curvilinea. Consideriamo la curva $r_3 : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$ dell'esempio 1. nel primo paragrafo, definita da $r_3(t) = (t^3, t^3)$. La lunghezza di r_3 è $2\sqrt{2}$. Poiché $r'_3(\sigma) = (3\sigma^2, 3\sigma^2)$

$$s(t) = \int_{-1}^t 3\sqrt{2} \sigma^2 d\sigma = \sqrt{2}(t^3 + 1).$$

Invertendo tale espressione si ha

$$t(s) = \left(\frac{s - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right)^{1/3}, \quad s \in [0, 2\sqrt{2}].$$

Valutando r_3 composta con la mappa t si ha

$$\tilde{r}_3(s) := r_3(t(s)) = (t(s)^3, t(s)^3) = \left(\frac{s - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \frac{s - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right).$$

Tale nuova curva (che di fatto è la stessa riparametrizzata) ha derivata

$$\frac{d\tilde{r}_3}{ds}(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Esercizio 7.2. - Vediamo un altro esempio. Consideriamo la curva

$$\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^3, \quad \gamma(t) = (r \cos t, r \sin t, \alpha t)$$

con $r, \alpha > 0$. Tale curva ha sostegno simile a quello indicato in Figura 4. Valutando il modulo di γ' si ottiene $|\gamma'(t)| = \sqrt{r^2 + \alpha^2}$ per cui

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{r^2 + \alpha^2} d\sigma = t\sqrt{r^2 + \alpha^2},$$

di conseguenza la lunghezza della curva è $T\sqrt{r^2 + \alpha^2}$ e

$$t(s) = \frac{s}{\sqrt{r^2 + \alpha^2}}, \quad s \in [0, T\sqrt{r^2 + \alpha^2}].$$

La nuova curva diventa

$$\tilde{\gamma}(s) := \gamma(t(s)) = \left(r \cos \frac{s}{\sqrt{r^2 + \alpha^2}}, r \sin \frac{s}{\sqrt{r^2 + \alpha^2}}, \alpha \frac{s}{\sqrt{r^2 + \alpha^2}} \right).$$

Valutando $|\tilde{\gamma}'(s)|$ si ottiene 1.

Esercizio 7.3. - Calcolare la lunghezza della curva

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t).$$

Le singole componenti di γ sono sicuramente C^1 , ma questo non garantisce che la curva sia regolare (potrebbe annullarsi il modulo della derivata in qualche punto). Infatti si ha che

$$\gamma'(t) = (-3 \cos^2 t \sin t, 3 \sin^2 t \cos t)$$

e che $\gamma'(t) = (0, 0)$ per $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$. Nonostante il sostegno (si veda l'immagine in Figura 15) possa far immaginare che la curva sia C^1 a tratti, essa è C^1 , ma regolare a tratti (a tal proposito si veda l'Osservazione 1.11). Infatti entrambe le componenti di γ sono C^1 .

Per calcolarne la lunghezza possiamo anche limitarci a calcolare solamente la lunghezza di uno dei quattro rami e poi moltiplicare per 4.

$$4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{9 \sin^2 t \cos^2 t} dt = 12 \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t dt = 12 \left. \frac{\sin^2 t}{2} \right|_0^{\pi/2} = 6.$$

Volendo parametrizzare questa curva col parametro d'arco si otterrà una curva che sarà C^1 solamente a tratti, perché avendo derivata di modulo costante 1 nei quattro punti $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$ non potrà avere derivate continue. Valutiamo il parametro d'arco

$$s(t) = \int_0^t 3 \cos \sigma \sin \sigma d\sigma = \frac{3}{2} \sin^2 t.$$

Limitandoci a $t \in (0, \pi/2)$, cosicché $\sin t > 0$ e $\arcsin$ è la sua inversa, si ha

$$t(s) = \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}s}, \quad s \in [0, 3/2].$$

Per $s \in [0, 3/2]$ si ha

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s)) = \left(\cos^3 \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}s}, \sin^3 \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}s} \right).$$

Usando $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ se $\cos \alpha > 0$ si ha che

$$\tilde{\gamma}(s) = \left(\left(1 - \frac{2}{3}s \right)^{3/2}, \left(\frac{2}{3}s \right)^{3/2} \right) \quad \text{con } s \in [0, 3/2]$$

parametrizza il primo ramo (quello colorato in rosso) della curva con l'ascissa curvilinea.

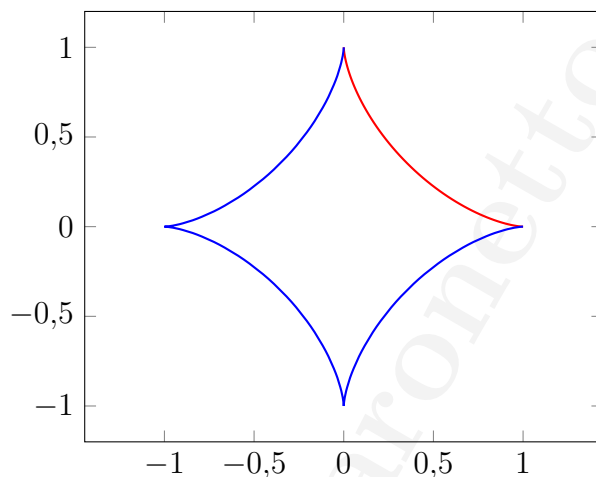
EX - Si verifichi che il modulo della derivata di $\tilde{\gamma}$ dell'Esercizio 7.3 è 1.

EX - Si scriva la parametrizzazione di γ dell'Esercizio 7.3 con l'ascissa curvilinea anche negli altri tre rami della curva.

EX - Si scriva la curva disegnata nella figura che segue come luogo di

zeri di una funzione di due variabili.

Figura 15



EX - Calcolare la lunghezza delle seguenti curve e parametrizzarle con l'ascissa curvilinea:

- 1 - (parte della *spirale logaritmica*) $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$;
- 2 - (arco di *cicloide*) $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\gamma(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$;
- 3 - $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^3$, $\gamma(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$;
- 4 - (arco di parabola) $y = \frac{1}{2}x^2$ con $x \in [0, 1]$ e $x - y^2/2 - 5 = 0$ con $y \in [-2, 2]$;
- 5 - $y = \log x$ con $x \in [3/4, 4/3]$.

8. INTEGRALI CURVILINEI

Date una funzione $f : A \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ ed una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ dove A è un aperto di $\mathbf{R}^n$ possiamo considerare la funzione composta

$$f \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$$

che è una funzione di una variabile reale e a valori in $\mathbf{R}$. Se f è una funzione continua e γ una curva regolare e semplice si definisce *integrale*

curvilineo (di prima specie) o *integrale di linea* (sempre di prima specie) e si denota per semplicità con il simbolo

$$\int_{\gamma} f ds$$

l'integrale

$$\int_a^b f \circ \gamma(t) |\gamma'(t)| dt = \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt.$$

Abbiamo già visto un caso semplice di integrale curvilineo quando abbiamo definito la lunghezza di una curva. Infatti se $f \equiv 1$ poiché γ è regolare si ha che

$$\int_{\gamma} f ds = l(\gamma).$$

Teorema 8.1. $\int_{\gamma} f ds$ è indipendente dalla parametrizzazione di γ .

Dimostrazione - È immediata. È sufficiente considerare un cambio di parametro α e valutare, se γ è definita in $[a, b]$ e $\tilde{\gamma}$ in $[\tilde{a}, \tilde{b}]$, i due integrali $\int_a^b f \circ \gamma(t) |\gamma'(t)| dt$ e $\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f \circ \tilde{\gamma}(t) |\tilde{\gamma}'(t)| dt$ per accorgersi che sono uguali. $\square$

Osservazione 8.2. - Si faccia attenzione al fatto che la quantità $\int_{\gamma} f ds$ non dipende (neanche) dall'orientazione di γ .

Osservazione 8.3. - In particolare riotteniamo che la lunghezza, per curve regolari, è indipendente dalla parametrizzazione. Basta considerare nel teorema precedente $f \equiv 1$.

Osservazione 8.4. - Si osservi inoltre che, per il teorema precedente, possiamo scegliere come parametro l'ascissa curvilinea. In tal caso il modulo della derivata è sempre 1 e l'integrale si riduce a $\int_0^{l(\gamma)} f(\gamma(s)) ds$ con s ascissa curvilinea.

Esempio 8.5. - Calcolare l'integrale di linea $\int_{\gamma} f ds$ dove $f(x, y) = x$ e γ rappresenta la curva $y = x^2/2$, con $x \in [0, a]$.

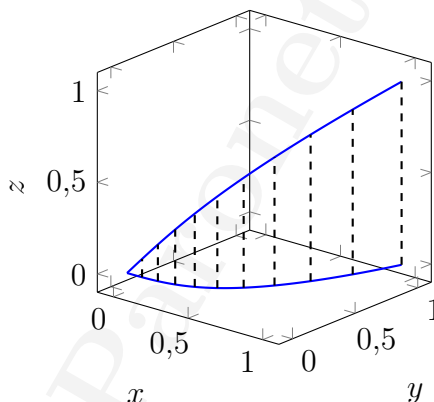
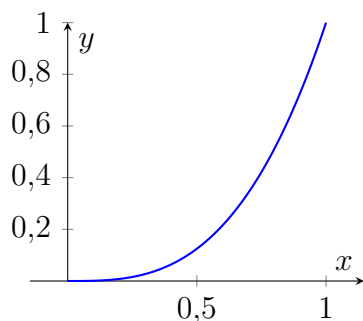
Per cercare di capire meglio cosa si sta facendo si osservi la Figura 16: l'integrale di linea proposto ci darà come risultato l'area sottesa dalla funzione $f(x, y) = x$ ristretta al sostegno, che giace sul piano xy , della curva γ . Sulla destra in Figura 16 è indicata col tratteggio tale area, sulla sinistra il sostegno della curva γ ($a = 1$).

La curva può essere parametrizzata da $\gamma(t) = (t, t^2/2)$, $t \in [0, a]$ (è una curva cartesiana) per cui $|\gamma'(t)| = |(1, t)| = \sqrt{1+t^2}$. Il calcolo di riduce quindi

$$\int_{\gamma} f ds = \int_0^a t \sqrt{1+t^2} dt = \frac{1}{3} [(1+a^2)^{3/2} - 1] .$$

Figura 16.b

Figura 16.a



Esempio 8.6. - Sia data la circonferenza parametrizzata dalla curva $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ e la funzione $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $f(x, y) = x^2$ (! Attenzione! la funzione f è definita in $\mathbf{R}^2$) il cui grafico è riportato in Figura 17.a. Supponiamo di voler calcolare

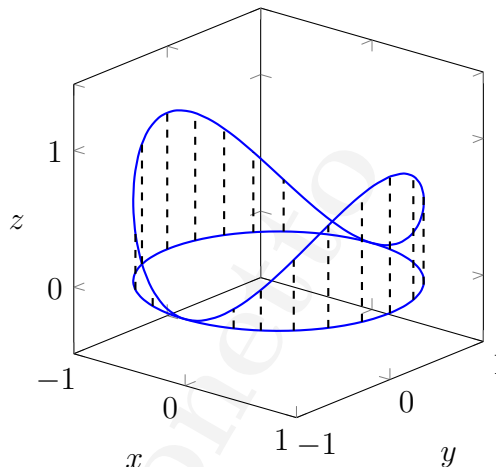
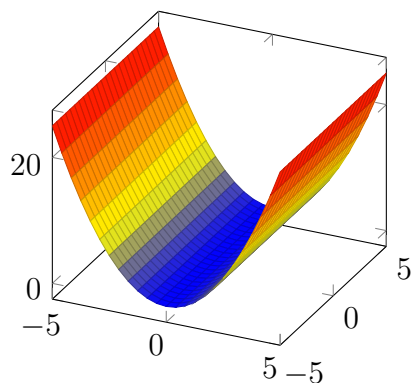
$$\int_{\gamma} f ds$$

che rappresenta l'area tratteggiata in Figura 17.b. Si ha che $|\gamma'(t)| = 1$ (quindi la parametrizzazione è già rappresentata tramite l'ascissa curvilinea, verificarlo per **EX**) e $f(\gamma(t)) = \cos^2 t$. Per cui si ha

$$\int_{\gamma} f ds = \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi .$$

Figura 17.b

Figura 17.a



EX - Calcolare sulla circonferenza dell'esempio precedente l'integrale curvilineo delle seguenti funzioni definite da $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}$:

$f(x, y) = x^2 - 2y$, $f(x, y) = e^x y$, $f(x, y) = x$, $f(x, y) = x^{2k+1}$ per $k \in \mathbf{N}$.

Esercizio 8.7. - Supponiamo di avere un filo in $\mathbf{R}^3$ di densità variabile ρ , cioè ρ è una funzione di tre variabili che al punto (x, y, z) associa la densità (che potrebbe non essere omogenea) del filo. Per semplicità possiamo definire $\rho : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ dicendo che $\rho(x, y, z) = 0$ se il punto (x, y, z) non appartiene al filo. Parametrizzando il filo con una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^3$ possiamo esprimere la massa del filo come

$$m := \int_{\gamma} \rho \, ds.$$

Si osservi che se la massa del filo è costante (sul filo), cioè se il filo è omogeneo, questo integrale curvilineo altro non è che la lunghezza della curva γ , cioè del filo, moltiplicato per ρ che sarà la costante che descrive la densità di massa.

Se volessimo calcolare il baricentro di una curva basterebbe valutare i tre integrali

$$\frac{1}{m} \int_{\gamma} f_1 \, ds, \quad \frac{1}{m} \int_{\gamma} f_2 \, ds, \quad \frac{1}{m} \int_{\gamma} f_3 \, ds,$$

dove

$$f_1(x, y, z) = x, \quad f_2(x, y, z) = y, \quad f_3(x, y, z) = z.$$

Se per caso la curva rappresentasse un filo di densità $\rho(x, y, z)$ in $\mathbf{R}^3$ bisognerebbe valutare i tre integrali

$$\frac{1}{m} \int_{\gamma} f_1 \rho \, ds, \quad \frac{1}{m} \int_{\gamma} f_2 \rho \, ds, \quad \frac{1}{m} \int_{\gamma} f_3 \rho \, ds.$$

Se la curva (o il filo) sta in $\mathbf{R}^2$ ci si limita a due componenti. Ad esempio (verificarlo!), la circonferenza dell'esempio precedente ha baricentro in $(0, 0)$.

Altro esempio meno immediato: valutiamo il baricentro della cardioide, indicata in Figura 11.a e parametrizzata da a parametro positivo)

$$\gamma(t) = (2a(\cos^2 t + \cos t), 2a(\cos t \sin t + \sin t)), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Si verifica facilmente che il modulo della sua derivata è dato da

$$|\gamma'(t)| = 2a\sqrt{2 + 2\cos t}.$$

Cominciamo con il valutarne la lunghezza (supponendo abbia densità costante 1 questa rappresenta anche la massa). Poiché

$$1 + \cos t = \cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2} + \cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2} = 2 \cos^2 \frac{t}{2}$$

si ha che

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)| \, dt = \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2} a \sqrt{1 + \cos t} \, dt = \\ &= \int_0^{2\pi} 4a \left| \cos \frac{t}{2} \right| \, dt = 2 \int_0^{\pi} 4a \cos \frac{t}{2} \, dt = 16a \sin \frac{t}{2} \Big|_0^{\pi} = 16a. \end{aligned}$$

Valutiamo le due coordinate del baricentro: la seconda, per questioni di simmetria, sarà zero. Denotando con f_1, f_2 le funzioni $f_1(x, y) = x$ e $f_2(x, y) = y$ si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f_2 \, ds &= \int_0^{2\pi} f_2(\gamma(t)) |\gamma'(t)| \, dt = \\ &= \int_0^{2\pi} [2a(\cos t \sin t + \sin t)] 2a\sqrt{2 + 2\cos t} \, dt = \\ &= \int_0^{2\pi} 4\sqrt{2} a^2 \sin t (1 + \cos t) \sqrt{1 + \cos t} \, dt = \\ &= 2^{3/2} 4\sqrt{2} a^2 \int_0^{2\pi} \sin t \left| \cos^3 \frac{t}{2} \right| \, dt = 0. \end{aligned}$$

Valutiamo ora

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} f_1 ds &= \int_0^{2\pi} [2a(\cos^2 t + \cos t)] 2a\sqrt{2 + 2\cos t} dt = \\
 &= 4\sqrt{2} a^2 \int_0^{2\pi} \cos t (1 + \cos t) \sqrt{1 + \cos t} dt = \\
 &= 4\sqrt{2} a^2 \int_0^{2\pi} 2^{3/2} \left(\cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2} \right) \left| \cos^3 \frac{t}{2} \right| dt = \\
 &= 16 a^2 \int_0^{2\pi} \left(\left| \cos^5 \frac{t}{2} \right| - \sin^2 \frac{t}{2} \left| \cos^3 \frac{t}{2} \right| \right) dt = \\
 &= 16 a^2 \int_0^{2\pi} \left(2 \left| \cos^5 \frac{t}{2} \right| - \left| \cos^3 \frac{t}{2} \right| \right) dt = \\
 &= 32 a^2 \int_0^{\pi} (2 |\cos^5 s| - |\cos^3 s|) ds = \\
 &= 32 a^2 \int_0^{\pi/2} (4 \cos^5 s - 2 \cos^3 s) ds
 \end{aligned}$$

Scrivendo

$$\begin{aligned}
 \cos^5 s &= \cos s (1 - \sin^2 s)^2 = \sin^4 s \cos s - 2 \sin^2 s \cos s + \cos s, \\
 \cos^3 s &= \cos s (1 - \sin^2 s) = \cos s - \cos s \sin^2 s
 \end{aligned}$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi/2} \sin^4 s \cos s ds &= \frac{1}{5} \sin^5 s \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{5}, \\
 \int_0^{\pi/2} \sin^2 s \cos s ds &= \frac{1}{3} \sin^3 s \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3},
 \end{aligned}$$

per cui

$$\int_{\gamma} f_1 ds = 32 a^2 \left[\left(\frac{4}{5} - \frac{8}{3} + 4 \right) - \left(2 - \frac{2}{3} \right) \right] = \frac{128}{5} a^2.$$

Per cui la seconda coordinata è zero, mentre la prima è data da

$$\frac{1}{m} \int_{\gamma} f_1 ds = \frac{1}{16a} \frac{128}{5} a^2 = \frac{8}{5} a.$$

Si osservi che tale quantità è strettamente positiva e, ovviamente, minore di $4a$ che è la coordinata del punto che corrisponde a $t = 0$ nella parametrizzazione, cioè $(4a, 0)$.

Concludiamo osservando che se γ è una curva chiusa nel piano il baricentro deve essere necessariamente un punto dell'insieme limitato che ha il sostegno di γ come bordo.

9. VETTORE TANGENTE, NORMALE PRINCIPALE E CURVATURA

Pensiamo ad una curva come alla descrizione del moto di un punto materiale nel piano o nello spazio. Il parametro t può essere pensato come il tempo, per cui all'istante t il punto occupa la posizione $\gamma(t)$. Definiamo ora alcune quantità che da un punto intuitivo possono essere meglio comprese con questa immagine in mente.

Si consideri una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ di classe C^1 , regolare. Dato $t_o \in [a, b]$ il vettore

$\gamma'(t_o)$ è detto *vettore tangente* alla curva in t_o .

Il vettore $\gamma'(t_o)$ rappresenta anche il *vettore velocità*, se vogliamo pensare la curva γ come la traiettoria di un punto ideale che si muove in $\mathbf{R}^n$. Si osservi che $\gamma'(t)$ è un vettore: il suo modulo rappresenta l'intensità della velocità.

Ricordiamo quali sono le espressioni generali di una retta in $\mathbf{R}^n$ passante per due punti $x, y \in \mathbf{R}^n$ e l'espressione di una retta passante per un punto $x \in \mathbf{R}^n$ e lungo la direzione individuata da un vettore $v \in \mathbf{R}^n$ (si veda l'Esempio 1.2.1 in cui si è scritta l'espressione per un segmento in $\mathbf{R}^2$):

$$r(t) = x + t(y - x), \quad t \in \mathbf{R}, \quad r(t) = x + tv, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Le due rette sono la stessa retta se $v = y - x$, oppure se v è un multiplo di $y - x$, cioè $v = \alpha(y - x)$ con $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq 0$. In quest'ultimo caso la retta sarà rappresentata da

$$(11) \quad r_\alpha(t) = x + \alpha t(y - x), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Si noti che anche traslando il parametro si ottengono altre infinite parametrizzazioni della stessa retta, quindi

$$(12) \quad \tilde{r}_\alpha(t) = x + (t + \alpha)(y - x), \quad t \in \mathbf{R}$$

rappresenta sempre la stessa retta.

Retta tangente - Torniamo alla curva γ . Se consideriamo $t_o, t_1 \in (a, b)$ la retta passante per i due punti di $\mathbf{R}^n$ $\gamma(t_o)$ e $\gamma(t_1)$ è data, come in (11), da

$$r_{t_o, t_1}(s) = \gamma(t_o) + s(\gamma(t_1) - \gamma(t_o)), \quad s \in \mathbf{R},$$

ma equivalentemente

$$r_{t_o, t_1}(t) = \gamma(t_o) + \alpha t(\gamma(t_1) - \gamma(t_o)), \quad t \in \mathbf{R},$$

con un qualche $\alpha \in \mathbf{R}$, purché $\alpha \neq 0$! Considerando $\alpha = (t_1 - t_o)^{-1}$ si ha che tale retta può anche essere scritta come

$$r_{t_o, t_1}(t) = \gamma(t_o) + t \frac{\gamma(t_1) - \gamma(t_o)}{t_1 - t_o}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Tenendo fissato t_o si può passare al limite per $t_1 \rightarrow t_o$ se γ è derivabile in t_o (si veda anche la Figura 18). La retta

$$r_{t_o}(t) = \gamma(t_o) + t \gamma'(t_o), \quad t \in \mathbf{R}$$

è detta retta tangente a γ in t_o . Si osservi che la retta è tangente al *sostegno*, cioè all'immagine di γ . Chiamando $s = t + \alpha$ con α costante arbitraria, come già fatto in (12), ognuna delle seguenti rette

$$\rho_\alpha(s) = \gamma(t_o) + \gamma'(t_o)(s + \alpha), \quad s \in \mathbf{R}$$

parametrizza la retta tangente a γ , in particolare

$$\rho_0(s) = \gamma(t_o) + \gamma'(t_o)(s - t_o), \quad s \in \mathbf{R}.$$

Esempio 9.1. - Nel caso di una curva piana cartesiana $\gamma(t) = (t, f(t))$ per una qualche funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ derivabile si ha che, fissato $t_o \in \mathbf{R}$,

$$\gamma'(t_o) = (1, f'(t_o))$$

per cui la retta tangente al *sostegno* di γ risulta la retta tangente al *grafico* di f in t_o , ed è data da

$$r(t) = (t_o, f(t_o)) + t(1, f'(t_o)) = (t + t_o, f(t_o) + t f'(t_o)).$$

Volendo traslare t e chiamare così $s = t + t_o$ si ottiene

$$r(s) = (s, f(t_o) + (s - t_o)f'(t_o)), \quad s \in \mathbf{R}.$$

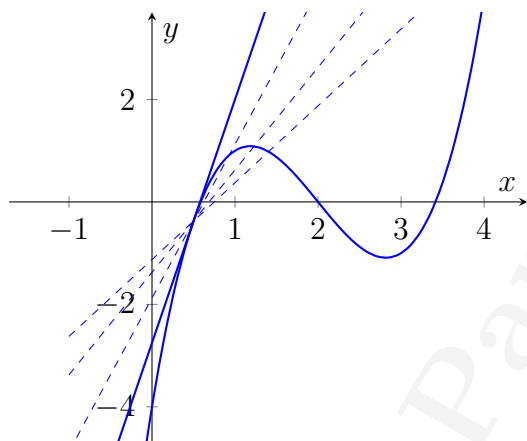
Esercizio 9.2. - Nel caso di curve piane possiamo ricavare anche un'espressione in forma cartesiana per la retta tangente alla curva γ nel punto $\gamma(t_o)$ nel caso di $\mathbf{R}^2$. Denotiamo per semplicità con $(x(t), y(t))$ la curva $\gamma(t)$ e con (x_o, y_o) il punto $\gamma(t_o)$. Allora un punto $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ diverso da (x_o, y_o) appartiene alla retta $\gamma(t_o) + t \gamma'(t_o) = (x_o, y_o) + t(x'(t_o), y'(t_o))$ se e solo se $(x, y) - (x_o, y_o)$ è proporzionale a $t(x'(t_o), y'(t_o))$. Supponendo che $x'(t_o) \neq 0$ e $y'(t_o) \neq 0$ si ha che $t = (x - x_o)/x'(t_o)$, ma anche $t = (y - y_o)/y'(t_o)$, cioè

$$\frac{x - x_o}{x'(t_o)} = \frac{y - y_o}{y'(t_o)} \iff \frac{x - x_o}{y - y_o} = \frac{x'(t_o)}{y'(t_o)}.$$

Moltiplicando per $x'(t_o)$ e $y'(t_o)$ si ottiene l'uguaglianza, che in realtà, a posteriori, risulta valida anche se $x'(t_o) = 0$ oppure se $y'(t_o) = 0$,

$$(x - x_o)y'(t_o) = (y - y_o)x'(t_o).$$

Figura 18



Se la curva è regolare definiamo

$$\tau(t) := \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \quad \text{il versore tangente,}$$

dove *versore* significa vettore di norma o modulo 1. Nel caso in cui la curva è parametrizzata con l'ascissa curvilinea si ha che il versore tangente coincide con il vettore tangente. Si noti che allora la velocità può essere scritta come

$$(13) \quad \gamma'(t) = |\gamma'(t)| \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} = |\gamma'(t)| \tau(t).$$

In quest'espressione la velocità viene scomposta in due parti, una *scalare*, $|\gamma'(t)|$, che rappresenta l'intensità della velocità, l'altra *vettoriale*, $\tau(t)$, che fornisce direzione e verso della velocità.

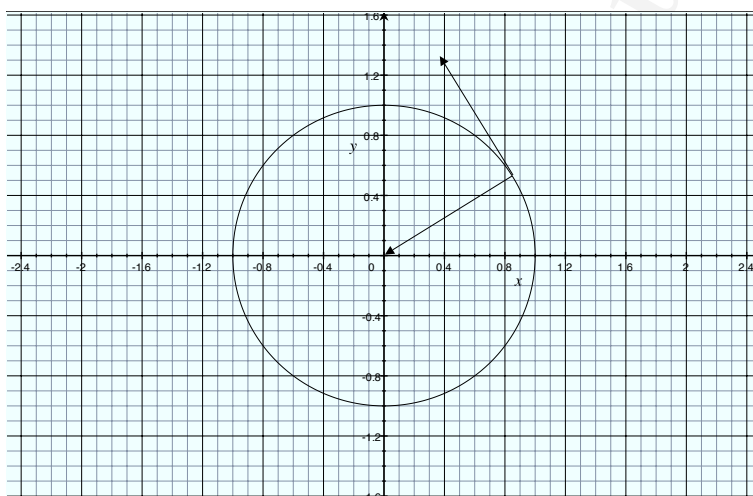
Osservazione 9.3. - Si osservi che vale il seguente fatto: se $|\gamma(t)| = c$, c costante, allora $\langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle = 0$ per ogni t ($\langle \xi, \eta \rangle$ denota il prodotto scalare dei due vettori $\xi, \eta \in \mathbf{R}^n$), cioè il vettore $\gamma(t)$ è ortogonale al vettore $\gamma'(t)$ oppure uno dei due vettori è nullo.

Per dimostrarlo basta fare la derivata: se $|\gamma(t)| = c$ allora anche $|\gamma(t)|^2$

è costante e quindi la sua derivata è nulla:

$$0 = \frac{d}{dt} |\gamma(t)|^2 = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n (\gamma_i(t))^2 = 2 \sum_{i=1}^n \gamma_i(t) \gamma'_i(t) = 2 \langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle.$$

È il caso, ad esempio, della circonferenza parametrizzata da $(\cos t, \sin t)$ (si provi a verificarlo).



La derivata della velocità è detta *accelerazione* ed è il vettore $\gamma''(t)$. Si consideri per esempio la circonferenza dell'osservazione precedente. Si osservi come l'orientazione della curva sia quella antioraria, per cui il vettore velocità in un determinato punto seguirà quell'orientazione. Il vettore accelerazione, la variazione della velocità, in questo esempio, è un vettore che punta all'interno! In generale non è sempre ortogonale alla tangente. Se ora γ è C^2 con γ' regolare possiamo ripetere quanto definito prima per la tangente e, poiché $|\gamma''(t)| \neq 0$, definire un vettore

$$\nu(t) = \frac{\gamma''(t)}{|\gamma''(t)|} \quad \text{che è un vettore di norma 1.}$$

Si osservi che se deriviamo il vettore τ si ottiene (deriviamo componente per componente):

$$(14) \quad \frac{d}{dt} \tau_j(t) = \frac{d}{dt} \frac{\gamma'_j(t)}{|\gamma'(t)|} = \frac{\gamma''_j(t) |\gamma'(t)|^2 - \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle \gamma'_j(t)}{|\gamma'(t)|^3}.$$

Facciamo ora questa ipotesi: che γ sia **parametrizzata con l'ascissa curvilinea**. Solo con questa ipotesi le cose si semplificano e vale quanto stiamo per dire. Al solito denotiamo con s l'ascissa curvilinea. Si ha

che $|\gamma'(s)| = 1$. Quindi, ragionando come nell'Osservazione 9.3, si ha

$$\frac{d}{ds} |\gamma'(s)|^2 = 0 \implies \langle \gamma'(s), \gamma''(s) \rangle = 0$$

cioè $\gamma''(s)$ è ortogonale a $\gamma'(s)$, che a sua volta è tangente alla curva. Allora la formula (14) si semplifica come segue in virtù del fatto che $\tau = \gamma'$, $|\gamma'| = 1$ e che $\langle \gamma', \gamma'' \rangle = 0$:

$$\frac{d}{dt} \tau_j(s) = \frac{d}{dt} \gamma'_j(s) = \gamma''_j(s)$$

notevolmente più semplice di (14). Quindi $\tau'(s) = \gamma''(s)$ e in virtù di questo fatto e del fatto che $\gamma''(s)$ è normale alla curva e al vettore tangente (perché stiamo usando l'ascissa curvilinea!!!) il vettore ν precedentemente definito è normale (od ortogonale) alla curva e al vettore tangente e coincide, se $|\tau'(s)| \neq 0$, con

$$\nu(s) = \frac{\tau'(s)}{|\tau'(s)|} \quad \text{ed è il versore normale.}$$

In questo caso (cioè se la curva è parametrizzata con l'ascissa curvilinea) analogamente a quanto fatto per la velocità in (13) si ha

$$(15) \quad \gamma''(s) = |\gamma''(s)| \frac{\gamma''(s)}{|\gamma''(s)|} = |\tau'(s)| \frac{\tau'(s)}{|\tau'(s)|} = |\tau'(s)| \nu(s).$$

La quantità $|\tau'(s)|$ è chiamata *curvatura* ed è denotata solitamente con $k(s)$. Riassumendo si ha

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= v(t) \tau(t), \\ \gamma''(s) &= k(s) \nu(s), \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} v(t) &= |\gamma'(t)| \text{ intensità della velocità o velocità scalare,} \\ k(s) &= |\tau'(s)| \text{ curvatura (solo se si usa il parametro d'arco),} \\ \tau(t) &\text{ versore tangente alla curva nel punto } \gamma(t), \\ \nu(s) &\text{ versore normale alla curva nel punto } \gamma(t). \end{aligned}$$

Esercizio 9.4. - Vediamo un esempio che ci aiuterà a capire il significato geometrico della curvatura. Si consideri la curva

$$\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Parametrizziamo questa curva col parametro d'arco. Valutiamo quindi

$$\int_0^t r \, d\sigma = r t .$$

Chiamando $s(t)$ questa quantità ed invertendola si ottiene

$$t(s) = \frac{1}{r} s .$$

Quindi la curva γ è già parametrizzata con il parametro d'arco solo se $r = 1$, altrimenti va riparametrizzata. Consideriamo quindi

$$\tilde{\gamma}(s) := \gamma(t(s)) = \left(r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r} \right) , \quad s \in [0, 2\pi r] .$$

Il vettore velocità è dato allora da

$$\tilde{\gamma}'(s) = \left(-\sin \frac{s}{r}, \cos \frac{s}{r} \right)$$

il cui modulo è 1, per cui $\tau(s)$ coincide con $\tilde{\gamma}'(s)$ e $v(s) \equiv 1$. Veniamo alla derivata seconda:

$$\tilde{\gamma}''(s) = \left(-\frac{1}{r} \cos \frac{s}{r}, -\frac{1}{r} \sin \frac{s}{r} \right)$$

il cui modulo è $\frac{1}{r}$, per cui

$$\tilde{\gamma}''(s) = \frac{1}{r} \left(-\cos \frac{s}{r}, -\sin \frac{s}{r} \right)$$

e quindi

$$k(s) = \frac{1}{r} , \quad \nu(s) = \left(-\cos \frac{s}{r}, -\sin \frac{s}{r} \right) .$$

Quindi minore è il raggio della circonferenza, maggiore è la curvatura. La curvatura fornisce quindi una misura scalare di quanto “la nostra curva si sta curvando”.

Il *raggio di curvatura* è definito come una funzione del parametro ed è definito (prendendo spunto dall'esempio precedente) come

$$\rho(s) := \frac{1}{k(s)} .$$

Chiaramente nel caso della circonferenza dell'esercizio precedente il raggio di curvatura è costante e coincide con r .

Osservazione 9.5. - Si faccia attenzione a non essere fuorviati dagli esempi in dimensione 2. I vettori $\tau(s)$ e $\nu(s)$ formano una base (variabile nel tempo, se s rappresenta il tempo) per $\mathbf{R}^2$. Se abbiamo a che fare con curve in dimensione più alta esistono infiniti vettori normali alla curva. La normale $\nu(s)$ è una di queste direzioni ed è quella lungo la quale avviene la variazione della velocità.