Funzioni di n variabili a valori vettoriali

Ultimo aggiornamento: 18 febbraio 2017

1. Differenziale per funzioni da $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^k$

Una funzione $F : A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ può essere vista come una k-upla di funzioni scalari $F_1, F_2, \dots F_k : A \to \mathbf{R}$. Quindi si possono definire le derivate direzionali per F semplicemente definendole componente per componente e in particolare le derivate parziali. Si può ottenere così una matrice $k \times n$, detta matrice *jacobiana* e denotata con DF o JF, delle derivate prime in un punto $x_o \in A$, definita da

$$DF(x_o) = JF(x_o) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_o) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x_o) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x_o) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x_o) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x_o) & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(x_o) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1}(x_o) & \frac{\partial F_k}{\partial x_2}(x_o) & \cdots & \frac{\partial F_k}{\partial x_n}(x_o) \end{pmatrix}.$$

Si osservi che le righe di tale matrice altro non sono che i gradienti delle F_i e se $k = 1$ $DF(x_o)$ coincide con $\nabla F(x_o)$.
Diremo che F è differenziabile in x_o se esiste un'applicazione lineare $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ tale che

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{|F(x_o + h) - F(x_o) - L(h)|}{|h|} = 0.$$

Ragionando componente per componente ci si riduce, come nel caso scalare, a mostrare che

$$L(h) = DF(x_o) \cdot h$$

e che il fatto che F sia differenziabile in x_o diventa equivalente a dire che

$$F(x) = F(x_o) + DF(x_o) \cdot (x - x_o) + o(|x - x_o|).$$

Fabio Paletto

Diremo che $F \in C^1(A)$ se F è continua, ammette tutte le derivate parziali $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$, $i = 1, \dots k$, $j = 1, \dots n$, e queste sono continue in A.

Derivazione per funzioni composte - Siano A un aperto di $\mathbf{R}^n$, B un aperto di $\mathbf{R}^k$, $F : A \to B$ e $G : B \to \mathbf{R}^m$. Si supponga che F sia differenziabile in $x_o \in A$ e G sia differenziabile in $y_o \in B$, $y_o = F(x_o)$. Vogliamo vedere quali sono le derivate della funzione $H : A \to \mathbf{R}^m$, definita da $H := G \circ F$, in termini delle derivate di F e G. Vale il seguente risultato.

Proposizione 1.1. *Siano F, G, H e le ipotesi su F e G come sopra. Si ha che H è differenziabile in x_o e*

$$DH(x_o) = DG(y_o) \cdot DF(x_o). \tag{1}$$

Dimostrazione - L'enunciato significa che la matrice jacobiana della composizione tra F e G, cioè $D(G \circ F)$, nel punto x_o è il prodotto delle matrice jacobiane di G nel punto y_o e di F nel punto x_o.
Volendo scrivere l'espressione (1) in componenti si ha che

$$\frac{\partial H_i}{\partial x_j}(x_o) = \sum_{h=1}^{k} \frac{\partial G_i}{\partial y_h}(y_o) \frac{\partial F_h}{\partial x_j}(x_o),$$

quindi è questa uguaglianza che dobbiamo mostrare. Sappiamo che

$$\frac{\partial H_i}{\partial x_j}(x_o) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} H_i(x_o + te_j).$$

Chiamando $\gamma(t)$ la curva $t \mapsto (F_1(x_o + te_j), \dots F_k(x_o + te_j))$ si ha Allora si ha che

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} H_i(x_o + te_j) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} G_i(F(x_o + te_j)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} G_i(\gamma(t)) = \\ &= \langle \nabla G_i(\gamma(0)), \gamma'(0) \rangle = \sum_{h=1}^{k} \frac{\partial G_i}{\partial y_h}(\gamma(0)) \gamma_h'(0) = \\ &= \sum_{h=1}^{k} \frac{\partial G_i}{\partial y_h}(y_o) \frac{\partial F_h}{\partial x_j}(x_o). \end{aligned}$$

□

Vediamo alcuni esempi.

Esempi 1.2. -
1. Verifichiamo la formula appena trovata per la funzione

$$H : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, \qquad H := G \circ F$$

© Fabio Tonetto

dove

$$F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3\,, \qquad F(x,y) = (x^2+y^2, 1, e^{x+y})\,,$$
$$G : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2\,, \qquad G(u,v,z) = (u\,v\,z, u+v+z)\,.$$

Si ha

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} 2\,x & 2\,y \\ 0 & 0 \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix}$$

$$DG(u,v,z) = \begin{pmatrix} v\,z & u\,z & u\,v \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché $H(x,y) = \big((x^2+y^2)e^{x+y}, x^2+y^2+1+e^{x+y}\big)$ si ha anche

$$DH(x,y) = \begin{pmatrix} (2\,x+x^2+y^2)e^{x+y} & (2\,y+x^2+y^2)e^{x+y} \\ 2\,x+e^{x+y} & 2\,y+e^{x+y} \end{pmatrix}$$

e si verifica che quest'ultima matrice è anche data da

$$DG\big(F(x,y)\big)\cdot DF(x,y) =$$
$$= \begin{pmatrix} e^{x+y} & (x^2+y^2)\,e^{x+y} & x^2+y^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\,x & 2\,y \\ 0 & 0 \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix}.$$

2. Consideriamo adesso una caso in cui non conosciamo espressamente le funzioni. Si supponga di avere

$$G : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} \qquad \text{e} \qquad f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

e di voler derivare la funzione

$$H(x) := G\big(x, f(x)\big).$$

Se si vuole vedere H come composizione di G con qualcun altro bisognerà introdurre la funzione vettoriale

$$F(x) = (x, f(x)).$$

Si avrà da (1)

$$DH(x) = DG(F(x,y)) \cdot DF(x,y)$$

dove DH è una funzione scalare, la derivata di H, DG è un vettore, il gradiente di G, DF ancora un vettore (la derivata di una curva).

© Fabio Paronetto

Allora l'espressione appena scritta diventa

$$\begin{aligned} H'(x) &= \nabla G(x, f(x)) \cdot F'(x) = \\ &= \Big\langle \big(G_x(x, f(x)), G_y(x, f(x))\big), \big(1, f'(x)\big) \Big\rangle = \\ &= \frac{\partial G}{\partial x}(x, f(x)) + f'(x) \frac{\partial G}{\partial y}(x, f(x)) = \\ &= G_x(x, f(x)) + f'(x) G_y(x, f(x)) \,. \end{aligned}$$

Se volessimo derivare ulteriormente applichiamo quanto appena visto alla formula appena trovata. Chiamando $\tilde{H}$ la funzione H', $\tilde{G}$ la funzione G_x e $\hat{G}$ la funzione G_y si ha

$$\begin{aligned} \tilde{H}'(x) = \frac{\partial \tilde{G}}{\partial x}(x, f(x)) + f'(x) \frac{\partial \tilde{G}}{\partial y}(x, f(x)) + \\ + f'(x) \left[\frac{\partial \hat{G}}{\partial x}(x, f(x)) + f'(x) \frac{\partial \hat{G}}{\partial y}(x, f(x)) \right] + f''(x)\, \hat{G}(x, f(x)) \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} H''(x) = G_{xx}(x, f(x)) + f'(x) G_{xy}(x, f(x)) + \\ + f'(x) G_{xy}(x, f(x)) + \big(f'(x)\big)^2 G_{yy}(x, f(x)) + f''(x)\, G_y(x, f(x)) \,. \end{aligned}$$

3. Consideriamo ora $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ e $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ e la funzione

$$H : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R} \qquad \text{definita da} \quad H(x) = g(F(x, y, z)) \,.$$

Usando la formula (1) si ha

$$DH(x, y, z) = Dg(F(x, y, z)) \cdot DF(x, y, z)$$

che di fatto è

$$\nabla H(x, y, z) = g'(F(x, y, z)) \nabla F(x, y, z)$$

cioè

$$\begin{aligned} H_x(x, y, z) &= g'\big(F(x, y, z)\big) F_x(x, y, z) \\ H_y(x, y, z) &= g'\big(F(x, y, z)\big) F_y(x, y, z) \\ H_z(x, y, z) &= g'\big(F(x, y, z)\big) F_z(x, y, z) \,. \end{aligned} \tag{2}$$

Volendo derivare ulteriormente, prendiamo ad esempio la prima di (2) e deriviamola rispetto a tutte e tre le variabili. Si ha

$$\begin{aligned} H_{xx}(x, y, z) &= g''\big(F(x, y, z)\big) \big(F_x(x, y, z)\big)^2 + g'\big(F(x, y, z)\big) F_{xx}(x, y, z) \\ H_{xy}(x, y, z) &= g''\big(F(x, y, z)\big) F_y(x, y, z) F_x(x, y, z) + g'\big(F(x, y, z)\big) F_{xy}(x, y, z) \\ H_{xz}(x, y, z) &= g''\big(F(x, y, z)\big) F_z(x, y, z) F_x(x, y, z) + g'\big(F(x, y, z)\big) F_{xz}(x, y, z) \,. \end{aligned}$$

© Fabio Paloneto

Si osservi che prendendo la seconda di (2) e derivandola rispetto ad x si ottiene quanto appena ottenuto derivando la prima rispetto ad y.

2. Teorema delle funzioni implicite: caso generale

Si considerino A aperto di $\mathbf{R}^{m+n}$, n ed m interi positivi, e una funzione

$$F : A \subset \mathbf{R}^{m+n} \to \mathbf{R}^n.$$

Per comodità denoteremo i punti di $\mathbf{R}^{m+n}$ con una coppia (x, y) intendendo che $x \in \mathbf{R}^m$, $y \in \mathbf{R}^n$, per cui $(x, y) = (x_1, \dots x_m, y_1, \dots y_n)$. Si fissi un punto dell'insieme A, che denoteremo con $(\bar{x}, \bar{y})$ e si supponga che

$$F(\bar{x}, \bar{y}) = (0, \dots 0).$$

Si consideri la matrice jacobiana di F nel punto $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$ data da

$$DF(\bar{z}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}(\bar{z}) & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_m}(\bar{z}) & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}(\bar{z}) & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n}(\bar{z}) \\ \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1}(\bar{z}) & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial x_m}(\bar{z}) & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_1}(\bar{z}) & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n}(\bar{z}) \end{pmatrix}.$$

Per semplicità denoteremo

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\bar{z}) := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}(\bar{z}) & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_m}(\bar{z}) \\ \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1}(\bar{z}) & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial x_m}(\bar{z}) \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\bar{z}) := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}(\bar{z}) & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n}(\bar{z}) \\ \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial y_1}(\bar{z}) & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n}(\bar{z}) \end{pmatrix}.$$

Si noti che

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x}(\bar{z}) && \text{è una matrice } n \times m, \\ &\frac{\partial F}{\partial y}(\bar{z}) && \text{è una matrice } n \times n, \\ &DF(\bar{z}) && \text{è una matrice } n \times (m+n), \end{aligned}$$

quindi l'unica, a priori, quadrata è $\frac{\partial F}{\partial y}(\bar{z})$.

© Fabio Paronetto

Teorema 2.1 (delle funzioni implicite)**.** *Nella situazione appena descritta si consideri l'insieme*

$$\mathcal{Z} = \{(x, y) \in A \,|\, F(x, y) = (0, \dots, 0)\}\,.$$

Si supponga inoltre che $F \in C^1(A)$ *e che*

$$\det\left(\frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})\right) \neq 0$$

Allora esistono un intorno U *di* $\bar{x}$*, un intorno* V *di* $\bar{y}$ *e una funzione* $f : U \to V$ *tali che*

$$F(x, f(x)) = (0, \dots 0) \qquad \textit{per ogni } x \in U$$

e inoltre l'insieme

$$\mathcal{Z} \cap \big(U \times V\big)$$

è il grafico della funzione f*. Inoltre* f *risulta di classe* C^1 *in* U *e vale*

$$Df(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))\right) \qquad \textit{per ogni } x \in U.$$

Si faccia attenzione all'ordine delle due matrici nell'ultima espressione che ci fornisce la matrica jacobiana di f: visto che la prima è $n \times n$ e la seconda è $n \times m$ l'ordine non può essere che quello e non può essere invertito.

Definizione 2.2. *Nelle ipotesi del teorema precedente diremo che il luogo*

$$F(x, y) = (0, \dots 0), \qquad (x, y) \in \mathbf{R}^{m+n}, \quad (0, \dots 0) \in \mathbf{R}^n,$$

in un intorno del punto $(\bar{x}, \bar{y})$ *ha dimensione* m*.*

Vediamo ora qualche caso particolare.

Caso di funzioni scalari di due variabili - $m = n = 1$
È il caso visto in dettaglio nel capitolo precedente: *il luogo degli zeri di una funzione scalare* f *di due variabili è localmente una curva cartesiana se* $|\nabla f| \neq 0$*.*

Caso di funzioni scalari di tre variabili - $m = 2$, $n = 1$
Il luogo degli zeri di una funzione scalare F *di tre variabili è localmente una superficie cartesiana se* $|\nabla F| \neq 0$*.*
Poiché $n = 1$ basterà che la derivata rispetto ad una sola variabile sia non nulla nel punto considerato. Ad esempio, siano A un aperto di $\mathbf{R}^3$, $(x_o, y_o, z_o) \in A$ e $F : A \to \mathbf{R}$ di classe $C^1(A)$. Si denoti con $\mathcal{Z}_F$ il luogo degli zeri di F e si supponga che

$$F(x_o, y_o, z_o) = 0\,.$$

© Fabio Paronetto

La condizione che una sola derivata sia non nulla in (x_o, y_o, z_o) può essere scritta come

$$|\nabla F(x_o, y_o, z_o)| \neq 0\,.$$

Per consuetudine spesso si suppone che sia l'ultima, per cui se, oltre a quanto supposto sopra, si ha anche che

$$F_z(x_o, y_o, z_o) \neq 0$$

le ipotesi del teorema sono soddisfatte. Possiamo concludere che esiste un intorno $U \times V$ di (x_o, y_o, z_o) in $\mathbf{R}^3$ (denotiamo per comodità l'intorno di (x_o, y_o, z_o) come $U \times V$ con U intorno di (x_o, y_o) in $\mathbf{R}^2$ e V intorno di z_o in $\mathbf{R}$) tale che

$$(U \times V) \cap \mathcal{Z}_F$$

è localmente il grafico di una funzione $f = f(x, y)$. Localmente il grafico sarà una superficie cartesiana. Vedremo per bene più avanti che cos'è una superficie, ma una superficie cartesiana non è altro che il grafico di una funzione di due variabili.
Si supponga, come in Figura 1, che $U = (x_o - a, x_o + a) \times (y_o - b, y_o + b)$ e $V = (z_o - c, z_o + c)$ con $a, b, c > 0$. Si ha allora

$$f : (x_o - a, x_o + a) \times (y_o - b, y_o + b) \to \mathbf{R}$$

e di fatto $f : (x_o - a, x_o + a) \times (y_o - b, y_o + b) \to (z_o - c, z_o + c)$ e inoltre

$$F(x, y, f(x, y)) = 0 \tag{3}$$

per ogni $(x, y) \in (x_o - a, x_o + a) \times (y_o - b, y_o + b)$. Inoltre valgono le due espressioni per le derivate

$$f_x(x, y) = -\frac{F_x(x, y, g(x, y))}{F_z(x, y, g(x, y))}, \qquad f_y(x, y) = -\frac{F_y(x, y, g(x, y))}{F_z(x, y, g(x, y))}. \tag{4}$$

© Fabio Paronetto

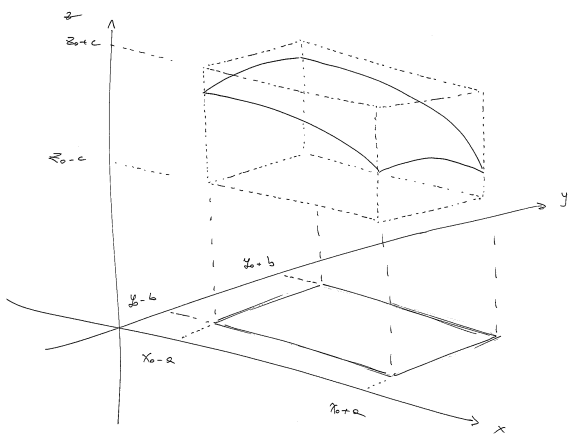

Figura 1

Apriamo una breve parentesi: il piano tangente nel punto (x_o, y_o) al grafico di f è dato dall'equazione

$$z - z_o = z - f(x_o, y_o) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)\big(x - x_o\big) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)\big(y - y_o\big)$$

per cui i punti che stanno sul piano tangente al grafico sono del tipo

$$\left(x, y, f(x_o, y_o) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)\big(x - x_o\big) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)\big(y - y_o\big)\right).$$

Si considerano le curve (il cui sostegno è contenuto su tale piano)

$$t \mapsto \left(t, y_o, f(x_o, y_o) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)\big(t - x_o\big)\right),$$
$$t \mapsto \left(x_o, t, f(x_o, y_o) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)\big(t - y_o\big)\right).$$

Le derivate sono due vettori tangenti al piano, visto che il sostegno di entrambe è contenuto nel piano, e sono i due vettori

$$\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)\right), \qquad \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)\right).$$

e si osservi che, essendo linearmente indipendenti, tutti i punti del piano possono essere scritti come combinazione lineare di questi due vettori.

Torniamo alla funzione implicita f: si noti che le espressioni per le derivate (4) si possono anche ottenere dall'uguaglianza (3) semplicemente

derivando. Poiché $F(x, y, f(x, y))$ è costante si ha

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(F(x, y, f(x, y))\big) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\big(F(x, y, f(x, y))\big) = 0.$$

Svolgendo le due derivate si ottengono

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\big(F(x, y, f(x, y))\big) = \\ &= \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, f(x, y)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial y}\big(F(x, y, f(x, y))\big) = \\ &= \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, f(x, y)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Queste due uguaglianze possono essere riscritte come segue

$$\begin{aligned} \big\langle \nabla F(x, y, f(x, y)), (1, 0, f_x(x, y)) \big\rangle = 0, \\ \big\langle \nabla F(x, y, f(x, y)), (0, 1, f_y(x, y)) \big\rangle = 0, \end{aligned}$$

cioè il gradiente di F nei punti $(x, y, f(x, y))$ che rappresentano l'insieme di livello 0 è ortogonale al piano passante per l'origine parallelo al piano tangente al grafico di f, come mostrato in Figura 12, e cioè, se opportunamente traslato, alla superficie cartesiana che è il luogo degli zeri di F.

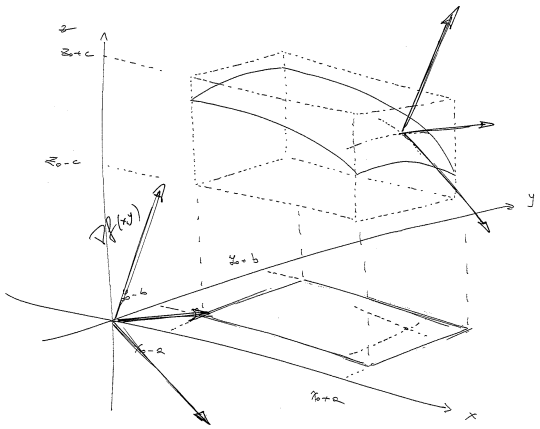

Figura 12

Derivando ulteriormente le due equazioni si trovano le espressioni per le derivate seconde di f. Derivando l'equazione (5) rispetto alla variabile

x si ottiene

$$F_{xx}(x,y,f(x,y)) + 2F_{xz}(x,y,f(x,y))f_x(x,y)+ \\ +F_{zz}(x,y,f(x,y))f_x^2(x,y) + F_z(x,y,f(x,y))f_{xx}(x,y) = 0, \tag{7}$$

derivando l'equazione (6) rispetto alla variabile y si ottiene

$$F_{yy}(x,y,f(x,y)) + 2F_{yz}(x,y,f(x,y))f_y(x,y)+ \\ +F_{zz}(x,y,f(x,y))f_y^2(x,y) + F_z(x,y,f(x,y))f_{yy}(x,y) = 0, \tag{8}$$

e infine derivando (5) rispetto alla variabile y, o equivalentemente (6) rispetto alla variabile x, ottengo

$$F_{xy}(x,y,f(x,y)) + F_{xz}(x,y,f(x,y))f_y(x,y)+ \\ + F_{yz}(x,y,f(x,y))f_x(x,y) + F_{zz}(x,y,f(x,y))f_x(x,y)f_y(x,y)+ \\ + F_z(x,y,f(x,y))f_{xy}(x,y) = 0. \tag{9}$$

Da queste tre equazioni si possono ricavare la matrice hessiana di f in un generico punto dell'intorno U e in particolare in (x_o, y_o).
Volendo continuare ad avere informazioni si può derivare ulteriormente per ottenere le derivate terze, quarte, ...

Esempio 2.3. - Si consideri la funzione $F(x,y,z) = \operatorname{arctg} z + xz + x - y^3 - 1$. Si verifichi che l'equazione $F(x,y,z) = 0$ definisce implicitamente una funzione $f(x,y)$ in un intorno del punto $(0,-1,0)$. Scrivere poi l'equazione del piano tangente al grafico di f. È possibile stabilire se il grafico di f, sempre in un intorno del punto $(0,-1,0)$, sta in uno dei due semispazi individuati dal piano tangente?
Valutando la derivata rispetto a z nel punto $(0,-1,0)$ si ha

$$F_z|_{(0,-1,0)}(x,y,z) = \left[\frac{1}{1+z^2} + x\right]\Bigg|_{(0,-1,0)} = 1 \neq 0\,.$$

Esiste quindi una funzione f, definita in un intorno di $(0,-1)$ tale che $f(0,-1) = 0$ e tale che

$$F(x,y,f(x,y)) = 0 \qquad \text{in un intorno di } (0,-1).$$

Per trovare il piano tangente al grafico di f valutiamo le derivate prime di f per le quali ci servono le derivate di F. Si ha

$$F_x(x,y,z) = z + 1, \quad F_y(x,y,z) = -3y^2$$

da cui

$$f_x(0,-1) = -\frac{F_x(0,-1,0)}{F_z(0,-1,0)} = -1, \qquad f_y(0,-1) = -\frac{F_y(0,-1,0)}{F_z(0,-1,0)} = 3.$$

© Fabio Paronetto

L'equazione del piano tangente cercato è

$$z = -x + 3(y+1).$$

Le derivate seconde di F sono date da

$$F_{xx} = 0, \quad F_{xy} = 0, \quad F_{xz} = 1,$$

$$F_{yy} = -6y, \quad F_{yz} = 0, \quad F_{zz} = -\frac{2z}{(1+z^2)^2}$$

da cui, usando (7), (8) e (9), si ricava che la matrice hessiana di f in $(0,-1)$ è data da

$$H_f(0,-1) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Questo ci dice che lo sviluppo di Taylor al second'ordine di f in $(0,-1)$ è

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,-1) - x + 3(y+1) + \\ &\quad + \frac{1}{2}\big\langle H_f(0,-1)\cdot(x,y+1),(x,y+1)\big\rangle + o(|(x,y+1)|^2) = \\ &= -x + 3(y+1) + x^2 - 4x(y+1) - 6(y+1)^2 + \\ &\quad + o(x^2 + (y+1)^2). \end{aligned}$$

Se si considera la funzione

$$g(x,y) := f(x,y) - \big[-x + 3(y+1)\big] = f(x,y) + x - 3(y+1)$$

si ha che

$$H_g(0,-1) = H_f(0,-1)$$

per cui si conclude che g in $(0,-1)$ ha un punto di sella. Rispondendo alla domanda, il grafico di f sarà in parte in uno dei due semispazi e in parte nell'altro.

Caso di funzioni scalari di $m+1$ variabili - $m \geqslant 1$, $n = 1$
Il luogo degli zeri di una funzione scalare F di $m+1$ variabili è localmente una ipersuperficie cartesiana se $|\nabla F| \neq 0$.

Il gradiente di F nei punti $(x_1, x_2, \dots x_m, f(x_1, \dots x_m))$ che rappresentano l'insieme di livello 0 è ortogonale all'iperpiano tangente al grafico di f, cioè alla ipersuperficie cartesiana che è il luogo degli zeri di F.

Caso di funzioni di tre variabili a valori in $\mathbf{R}^2$ - $m = 1$, $n = 2$
Il luogo degli zeri di una funzione F di tre variabili a valori in $\mathbf{R}^2$ è localmente una curva cartesiana se la matrice jacobiana DF ha un minore 2×2 con determinante non nullo.

© Fabio Paronetto

In questo caso si ha $F : A \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, per cui si può pensare F come una coppia di funzioni scalari F_1, F_2. Il luogo degli zeri di una funzione vettoriale F di tre variabili è l'insieme

$$\begin{aligned}\Gamma &= \big\{(x,y,z) \in A \,\big|\, F(x,y,z) = (0,0)\big\} = \\ &= \big\{(x,y,z) \in A \,\big|\, \big(F_1(x,y,z), F_2(x,y,z)\big) = (0,0)\big\}\end{aligned}$$

che coincide con l'intersezione

$$\big\{(x,y,z) \in A \,\big|\, F_1(x,y,z) = 0\big\} \cap \big\{(x,y,z) \in A \,\big|\, F_2(x,y,z) = 0\big\}.$$

Perciò spesso si parla, se $n > 1$, di sistemi. Si ha infatti che l'insieme Γ è la soluzione di

$$\begin{cases} F_1(x,y,z) = 0 \\ F_2(x,y,z) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Come visto nel caso precedente, i due insiemi, sotto opportune ipotesi, descrivono localmente due superfici cartesiane. È ragionevole aspettersi che, almeno in alcuni casi, tale intersezione sia una curva. È quello che garantisce il teorema delle funzioni implicite se in un certo punto $P_o = (x_o, y_o, z_o)$ la matrice

$$DF(P_o) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x}(P_o) & \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(P_o) & \dfrac{\partial F_1}{\partial z}(P_o) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x}(P_o) & \dfrac{\partial F_2}{\partial y}(P_o) & \dfrac{\partial F_2}{\partial z}(P_o) \end{pmatrix}.$$

ha un minore 2×2 invertibile. Se, come al solito, si considerano le ultime due variabili, e si ha $F(P_o) = (F_1(x_o, y_o, z_o), F_2(x_o, y_o, z_o)) = (0,0)$ e inoltre

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(P_o) & \dfrac{\partial F_1}{\partial z}(P_o) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y}(P_o) & \dfrac{\partial F_2}{\partial z}(P_o) \end{pmatrix} \neq 0$$

si può concludere che esiste una curva $\gamma : I \to \mathbf{R}^2$, I intervallo aperto che contiene x_o, tale che

$$F(x, \gamma_1(x), \gamma_2(x)) = 0.$$

Spesso alla scrittura $(x, \gamma_1(x), \gamma_2(x))$ si preferisce chiamare γ con le lettere corrispondenti alle variabili dipendenti

$$y = y(x), z = z(x)$$

© Fabio Fanoneto

e scrivere

$$\begin{cases} F_1(x, y(x), z(x)) = 0 \\ F_2(x, y(x), z(x)) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

oppure la scrittura

$$x = t, y = y(t), z = z(t)$$

usando il parametro t come variabile per la curva e denotando le componenti della funzione implicita con le lettere corrispondenti alle variabili dipendenti da t, per cui si avrebbe

$$\begin{cases} F_1(t, y(t), z(t)) = 0 \\ F_2(t, y(t), z(t)) = 0. \end{cases}$$

Per ottenere le derivate, come si vede dall'enunciato del teorema delle funzioni implicite, bisogna invertire una matrice, cioè risolvere un sistema. Noi, come al solito, deriviamo l'equazione che determina il luogo degli zeri, cioè (11), per ottenere

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\big(F_1(x, y(x), z(x))\big) = \dfrac{\partial F_1}{\partial x}(x, y(x), z(x)) + \\ \qquad + \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x, y(x), z(x))y'(x) + \dfrac{\partial F_1}{\partial z}(x, y(x), z(x))z'(x) = 0 \\ \dfrac{d}{dx}\big(F_2(x, y(x), z(x))\big) = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}(x, y(x), z(x)) + \\ \qquad + \dfrac{\partial F_2}{\partial y}(x, y(x), z(x))y'(x) + \dfrac{\partial F_2}{\partial z}(x, y(x), z(x))z'(x) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Volendo ottenere le derivate di ordine successivo si può continuare a derivare.

Esempio 2.4. - Spesso nei casi $n > 1$ si parla di sistemi di equazioni, come già osservato mostrando che l'insieme Γ è la soluzione del sistema (10).
Dato il sistema

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = x^3 - 3xy^2 + z^2 + 2 = 0 \\ F_2(x, y, z) = 10x^3 - 2y^2 - 3z^2 + 25 = 0 \end{cases} \tag{13}$$

provare che l'intersezione dei luoghi degli zeri di F_1 ed F_2, in un intorno di $x = 1$, è una curva, cioè esistono due funzioni $y(x), z(x)$ tali che

$$F_1(x, y(x), z(x)) = F_2(x, y(x), z(x)) = 0$$

in un intorno di $x = 1$ e soddisfacenti $y(1) = 2$, $z(1) = 3$. Calcolare poi un versore tangente alla curva definita da tali funzioni e si scriva

© Fabio Paronetto

la retta tangente in forma parametrica.
Si verifichi poi che il luogo degli zeri di F_1 ed il luogo degli zeri di F_2 possono essere visti come grafici di due funzioni f_1 e f_2 e che l'intersezione dei piani tangenti ai grafici di f_1 ed f_2 è la retta $t \mapsto (1,2,3) + t\mathrm{v}$ dove v è un vettore tangente alla curva soluzione del sistema.

Le derivate necessarie a rispondere alla prima domanda sono

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -6xy, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial z} = 2z,$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = -4y, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial z} = -6z.$$

Si ha che la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y}(1,2,3) & \frac{\partial F_1}{\partial z}(1,2,3) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y}(1,2,3) & \frac{\partial F_2}{\partial z}(1,2,3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ -8 & -18 \end{pmatrix}$$

ha determinante non nullo, per cui le due funzioni $y(x), z(x)$ cercate esistono. Per deteminare il versore tangente cercato dobbiamo ricavare le derivate prime di y e z. Le derivate di F mancanti sono

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 30x^2.$$

Analogamente al sistema (12) si ottiene

$$\begin{cases} -12\, y'(1) + 6z'(1) = 9 \\ -8\, y'(1) - 18z'(1) = -30 \end{cases}$$

da cui

$$y'(1) = \frac{3}{44}, \qquad z'(x) = \frac{18}{11}.$$

La curva $x \mapsto (x, y(x), z(x))$ ha allora derivata in corrispondenza a $x = 1$ (o nel punto $(1,2,3)$)

$$\left(1, \frac{3}{44}, \frac{18}{11}\right)$$

che è un vettore tangente all'insieme soluzione del sistema (13) nel punto $(1,2,3)$, nel senso di percorrenza della curva ottenuta. Per averlo di modulo 1 basterà dividerlo per il suo modulo.
La retta tangente a tale curva sarà data, per esempio, da

$$r(t) = (1,2,3) + t\left(1, \frac{3}{44}, \frac{18}{11}\right) = \left(1+t, 2+t\frac{3}{44}, 3+t\frac{18}{11}\right), \tag{14}$$

© Fabio Paronetto

con $t \in \mathbf{R}$. Le derivate di F_1 e F_2 sono tutte non nulle nel punto $(1,2,3)$, per cui i due luoghi degli zeri $F_1(x,y,z)=0$ e $F_2(x,y,z)=0$ possono essere visti come grafici di funzioni di due variabili arbitrarie. Se scegliamo x e y per entrambe (ma potremmo fare due scelte differenti) si ha l'esistenza di due funzioni f e g tali che

$$F_1(x,y,f(x,y)) = F_2(x,y,g(x,y)) = 0$$

dal momento che

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial z}(x,y,z) &= 2z, & \frac{\partial F_1}{\partial z}(1,2,3) &= 6 \neq 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial z}(x,y,z) &= -6z, & \frac{\partial F_2}{\partial z}(1,2,3) &= -18 \neq 0. \end{aligned}$$

Ricaviamo le derivate prime di f e g dalle equazioni

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F_1}{\partial x}(1,2,3) + \frac{\partial F_1}{\partial z}(1,2,3)\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 0 \\ &\frac{\partial F_1}{\partial y}(1,2,3) + \frac{\partial F_1}{\partial z}(1,2,3)\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 0 \\ &\frac{\partial F_2}{\partial x}(1,2,3) + \frac{\partial F_2}{\partial z}(1,2,3)\frac{\partial g}{\partial x}(1,2) = 0 \\ &\frac{\partial F_2}{\partial y}(1,2,3) + \frac{\partial F_2}{\partial z}(1,2,3)\frac{\partial g}{\partial y}(1,2) = 0 \end{aligned}$$

da cui

$$f_x(1,2) = \frac{3}{2}, \quad f_y(1,2) = 2, \quad g_x(1,2) = \frac{5}{3}, \quad g_y(1,2) = -\frac{4}{9},$$

e i piani tangenti ai grafici di f e g sono dati da

$$\begin{aligned} z - 3 &= \frac{3}{2}(x-1) + 2(y-2), \\ z - 3 &= \frac{5}{3}(x-1) - \frac{4}{9}(y-2). \end{aligned}$$

Andiamo a verificare che i due piani tangenti hanno come intersezione la retta r trovata precedentemente.
Ponendo a sistema le due equazioni appena trovate si ricava che

$$\frac{3}{2}(x-1) + 2(y-2) = \frac{5}{3}(x-1) - \frac{4}{9}(y-2).$$

Volendo esprimere tutto rispetto alla variabile x si ottiene che

$$y = \frac{9}{132}(x-1) + 2 = \frac{3}{44}(x-1) + 2$$

© Fabio Paioretto

e usando una delle due espressione per $z-3$ ricavate sopra si ha

$$z = \frac{3}{2}(x-1) + 2\,\frac{9}{132}(x-1) + 3 = \frac{18}{11}(x-1) + 3.$$

Quindi le tre componenti della retta parametrizzata con x sono

$$\begin{aligned} &x, \\ &\frac{3}{44}(x-1) + 2, \\ &\frac{18}{11}(x-1) + 3. \end{aligned}$$

Si verifica che facendo una piccola traslazione e ponendo $t = x - 1$ si ottiene la parametrizzazione già trovata in (14).
Che succede se le funzioni f e g che trovo dipendono da altre variabili? Se, ad esempio, si avesse

$$F_1(f(y,z), y, z) = F_2(x, g(x,z), z) = 0$$

quali sono i piani tangenti ai grafici di f e g nel punto $(1,2,3)$? Sono gli stessi? E l'intersezione tra i due è sempre la stessa retta?

Caso generale: funzioni di $m+n$ variabili a valori in $\mathbf{R}^n$ - *Il sistema*

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots x_{m+n}) = 0 \\ F_2(x_1, \dots x_{m+n}) = 0 \\ \\ F_n(x_1, \dots x_{m+n}) = 0 \end{cases}$$

è un insieme che localmente è il grafico di una funzione di m variabili a valori in $\mathbf{R}^n$ se, detta F la funzione a valori in $\mathbf{R}^n$ definita da $F(x_1, \dots x_{m+n}) := (F_1(x_1, \dots x_{m+n}), \dots F_n(x_1, \dots x_{m+n}))$, un minore $n \times n$ della matrice jacobiana DF ha deteminante non nullo.

© Mario Pagotto