

Massimi e minimi vincolati

ULTIMO AGGIORNAMENTO: 18 FEBBRAIO 2017

Vedremo tra breve un metodo per studiare il problema di trovare il minimo e il massimo di una funzione su di un sottoinsieme dello spazio ambiente che non sia un aperto. Abbiamo già visto che in un tale insieme non è possibile fare le derivate per cui il problema va modificato e si è già visto che un modo è parametrizzare l'insieme. Vediamo ora alcuni casi particolari senza fare ragionamenti rigorosi, ma utili alla comprensione del metodo che illustreremo.

Prima di tutto facciamo un'osservazione importante. Si consideri una funzione $F : A \subset \mathbf{R}^{m+n} \rightarrow \mathbf{R}$ di classe C^1 , A aperto, e un insieme $V \subset A$ (che potrebbe essere chiuso). Si supponga che $\bar{x}$ sia un punto di minimo (oppure di massimo) per F nell'insieme V . Allora per ogni curva γ di classe C^1 , $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V \subset \mathbf{R}^{m+n}$ soddisfacente $\gamma(0) = \bar{x}$ si ha che

$t = 0$ è di minimo (rispettivamente di massimo) per $F \circ \gamma$

e si ha

$$(1) \quad \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (F(\gamma(t))) = \langle \nabla F(\bar{x}), \gamma'(0) \rangle = 0.$$

Definizione 0.1. Diremo che $\bar{x}$ è critico o stazionario o stazionario per F nell'insieme V se per ogni curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{R}^{m+n}$ di classe C^1 , il cui sostegno sia contenuto in V e soddisfacente $\gamma(0) = \bar{x}$ si ha che $t = 0$ è critico o stazionario per la funzione $F \circ \gamma$. Inoltre, se anche F è C^1 , vale (1).

Si osservi che da (1) si ha che il gradiente di F è ortogonale, nel punto $\bar{x}$, alla retta tangente alla curva γ , e questo per ogni curva γ passante per il punto $\bar{x}$ e il cui supporto sia contenuto in V .

Si può dimostrare che ciò implica il fatto che il gradiente di F in $\bar{x}$ è ortogonale allo spazio generato dalle rette tangenti a tutte le possibili curve regolari passanti per $\bar{x}$. In particolare, nel caso in cui V è una curva in $\mathbf{R}^2$, $\nabla F(\bar{x})$ è ortogonale alla retta tangente alla curva V , nel caso in cui V è una superficie in $\mathbf{R}^3$ $\nabla F(\bar{x})$ è ortogonale al piano tangente alla superficie V , nel caso in cui V è una curva in $\mathbf{R}^3$ $\nabla F(\bar{x})$ è ortogonale alla retta tangente alla curva V .

Nella sezione dedicata al teorema delle funzioni implicite abbiamo dato la definizione di dimensione per un luogo di zeri che è grafico di una funzione. Se $F : A \subset \mathbf{R}^{m+n} \rightarrow \mathbf{R}$ e l'insieme $V = \{x \in A \mid G_1(x) = 0\} \cap \dots \cap \{x \in A \mid G_n(x) = 0\}$ con $G = (G_1, \dots, G_n)$ che soddisfa il teorema delle funzioni implicite diciamo che V ha dimensione m . Con il termine *codimensione* denotiamo il numero n riferito al fatto che V ha dimensione m ed è un sottoinsieme di $\mathbf{R}^{m+n}$.

Caso 1 - Il vincolo è una curva in $\mathbf{R}^2$ (la codimensione è 1) -
Si supponga di voler cercare i punti stazionari per una certa funzione $F : A \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ di classe C^1 , A aperto, in un insieme $V \subset A$ e che V sia il sostegno di una curva. Se tale curva è data come luogo di zeri di una funzione $G : A \rightarrow \mathbf{R}$

$$V := \{(x, y) \in A \mid G(x, y) = 0\}$$

sappiamo che sotto opportune ipotesi ($|\nabla G|(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$ per un qualche punto $(\bar{x}, \bar{y}) \in V$) tale luogo di zeri è, almeno localmente, una curva cartesiana. Se si ha $|\nabla G|(x, y) \neq 0$ in ogni punto $(x, y) \in V$ tale luogo di zeri è, in particolare, il sostegno di una curva semplice.

Si supponga allora di parametrizzare V con $\gamma : I \rightarrow V$. Poiché V è un insieme di livello per G (l'insieme di livello 0) si avrà in particolare che

$$G(\gamma(t)) = 0 \quad \text{per ogni } t \in I$$

e quindi

$$(2) \quad \frac{d}{dt}(G(\gamma(t))) = \langle \nabla G(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0.$$

Nel caso in cui un punto $(\bar{x}, \bar{y})$ sia di minimo o di massimo per F sul vincolo V e $\gamma(\bar{t}) = (\bar{x}, \bar{y})$ si ha che vale

$$(3) \quad \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=\bar{t}} (F(\gamma(t))) = \langle \nabla F(\bar{x}, \bar{y}), \gamma'(\bar{t}) \rangle = 0.$$

Sintetizziamo queste informazioni dicendo che

$$(3) \implies \nabla F(\bar{x}, \bar{y}) \perp V \quad \text{e}$$

$$(2) \implies \nabla G(x, y) \perp V \quad \text{per ogni } (x, y) \in V.$$

In particolare si ha $\nabla G(\bar{x}, \bar{y}) \perp V$ per cui, poiché lo spazio ambiente è $\mathbf{R}^2$, i due vettori devono essere linearmente dipendenti ed esiste un numero $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che

$$(4) \quad \nabla F(\bar{x}, \bar{y}) + \lambda \nabla G(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0).$$

Caso 2 - Il vincolo è una superficie in $\mathbf{R}^3$ (la codimensione è 1) - Sia ora il caso in cui $A \subset \mathbf{R}^3$ e

$$V := \{(x, y, z) \in A \mid G(x, y, z) = 0\}.$$

Nell'ipotesi che $G_z(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \neq 0$ (assumiamo tale ipotesi solo per semplicità, ricordiamo che è sufficiente che $|\nabla G(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})| \neq 0$) dal teorema del Dini si ha che il luogo degli zeri di G è, localmente, una superficie cartesiana ed in particolare il grafico di una funzione g di modo tale

$$G(x, y, g(x, y)) = 0.$$

Si supponga che $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ sia di minimo o di massimo per la funzione F relativamente al vincolo V e si consideri ora una curva $\gamma : I \rightarrow V$ di classe C^1 in I , I intervallo contenente 0, in modo tale che $\gamma(0) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Si ha allora che

$$(5) \quad \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (F(\gamma(t))) = \langle \nabla F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), \gamma'(0) \rangle = 0.$$

Poiché ciò vale per ogni curva γ si ottiene che $\nabla F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ è ortogonale al piano tangente all'insieme V nel punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

Per convincerci meglio di questo fatto si supponga che, in un intorno di $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, il vincolo V sia quello mostrato in Figura 1, cioè il grafico della funzione g . Si considerino le due curve

$$\bar{\eta}(t) = (t + \bar{x}, \bar{y}, g(t + \bar{x}, \bar{y})), \quad \bar{\sigma}(t) = (\bar{x}, t + \bar{y}, g(\bar{x}, t + \bar{y}))$$

il cui sostegno sta sulla superficie V , come mostrato ancora in Figura 1. Di conseguenza, poiché

$$\bar{\eta}'(t) = (1, 0, g_x(t + \bar{x}, \bar{y})), \quad \bar{\sigma}'(t) = (0, 1, g_y(\bar{x}, t + \bar{y})),$$

da (5) si ottengono in particolare che

$$\begin{aligned} \langle \nabla F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), (1, 0, g_x(\bar{x}, \bar{y})) \rangle &= 0, \\ \langle \nabla F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), (0, 1, g_y(\bar{x}, \bar{y})) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

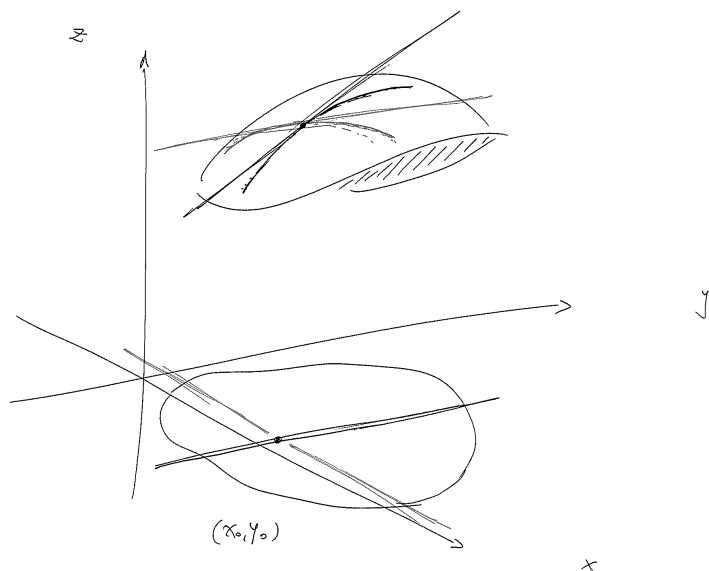


Figura 1

Si noti che i due vettori

$$(1, 0, g_x(\bar{x}, \bar{y})) \quad \text{e} \quad (0, 1, g_y(\bar{x}, \bar{y}))$$

sono paralleli al piano tangente (sono le derivate di due curve il cui sostegno sta sulla superficie) e sono linearmente indipendenti (basti guardare le prime due coordinate). Per cui tali vettori generano tutto il piano tangente o, meglio, generano un piano parallelo al piano tangente (si veda la Figura 2).

Poiché V è l'insieme di livello 0 di G , considerando le due curve con $t \in \mathbf{R}$ ($z = g(x, y)$, con (x, y, z) in un intorno di $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$)

$$\eta(t) = (t + x, y, g(t + x, y)), \quad \sigma(t) = (x, t + y, g(x, t + y))$$

il cui sostegno sta sulla superficie V e, come prima,

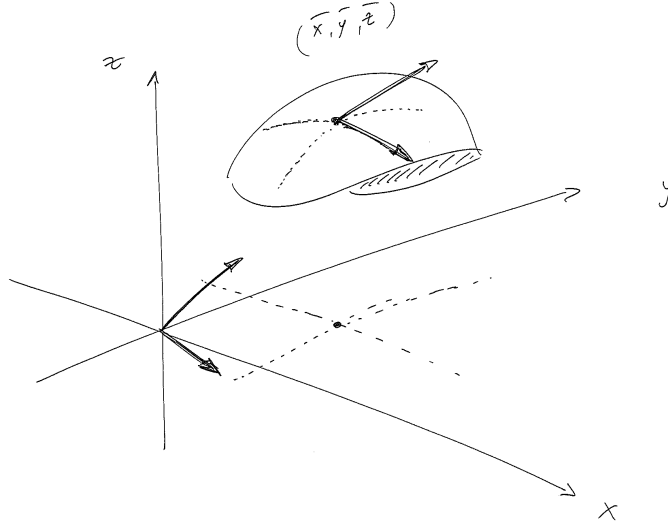


Figura 2

$$\eta'(t) = (1, 0, g_x(t+x, y)), \quad \sigma'(t) = (0, 1, g_y(x, t+y)),$$

si ottengono

$$\langle \nabla G(x, y, f(x, y)), (1, 0, g_x(x, y)) \rangle = 0,$$

$$\langle \nabla G(x, y, f(x, y)), (0, 1, g_y(x, y)) \rangle = 0,$$

e quindi il gradiente di G è ortogonale al piano tangente al grafico di g in ogni punto $(x, y, z) \in V$. In particolare lo sarà per $(x, y, z) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Poiché due vettori in $\mathbf{R}^3$ ortogonali ad un stesso piano giacciono sulla stessa retta e sono quindi linearmente dipendenti, esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che

$$(6) \quad \nabla F(\bar{x}, \bar{y}, g(\bar{x}, \bar{y})) + \lambda \nabla G(\bar{x}, \bar{y}, g(\bar{x}, \bar{y})) = (0, 0, 0).$$

Caso 3 - Il vincolo è una curva in $\mathbf{R}^3$ (la codimensione è 2) -

Se il vincolo V è dato da

$$V := \{(x, y, z) \in A \mid G_1(x, y, z) = 0\} \cap \{(x, y, z) \in A \mid G_2(x, y, z) = 0\}$$

abbiamo visto che, sotto opportune ipotesi, V è l'immagine di una curva (localmente cartesiana). La funzione F , come visto in (1), avrà gradiente ortogonale alla curva in un generico punto stazionario $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Si faccia attenzione che in questo caso, poiché siamo in $\mathbf{R}^3$, vi sono

infinite direzioni che può avere $\nabla F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, tutte quelle del piano ortogonale alla curva.

Dal teorema del Dini sappiamo che, se

$$(7) \quad \det \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) & \frac{\partial G_1}{\partial z}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ \frac{\partial G_2}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) & \frac{\partial G_2}{\partial z}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \end{pmatrix} \neq 0,$$

esistono y e z funzioni di una variabile, tali che

$$G_1(x, y(x), z(x)) = 0 \quad \text{e} \quad G_2(x, y(x), z(x)) = 0$$

da cui, derivando rispetto a x e y ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_1}{\partial x}(x, y(x), z(x)) + \frac{\partial G_1}{\partial y}(x, y(x), z(x))y'(x) + \frac{\partial G_1}{\partial z}(x, y(x), z(x))z'(x) &= 0 \\ \frac{\partial G_2}{\partial x}(x, y(x), z(x)) + \frac{\partial G_2}{\partial y}(x, y(x), z(x))y'(x) + \frac{\partial G_2}{\partial z}(x, y(x), z(x))z'(x) &= 0 \end{aligned}$$

cioè sia ∇G_1 che ∇G_2 sono ortogonali alla curva $x \mapsto (x, y(x), z(x))$ in ogni punto. In particolare lo saranno nel punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (\bar{x}, y(\bar{x}), z(\bar{x}))$. Dalla condizione (7) si ha che i due vettori $\nabla G_1(\bar{x}, y(\bar{x}), z(\bar{x}))$ e $\nabla G_2(\bar{x}, y(\bar{x}), z(\bar{x}))$ sono linearmente indipendenti, per cui generano il piano nel quale giacciono. Poiché anche $\nabla F(\bar{x}, y(\bar{x}), z(\bar{x}))$ giace in tale piano esso sarà combinazione lineare dei primi due, cioè esisteranno $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tali che

$$(8) \quad \begin{aligned} \nabla F(\bar{x}, y(\bar{x}), z(\bar{x})) + \lambda \nabla G_1(\bar{x}, y(\bar{x}), z(\bar{x})) + \\ + \mu \nabla G_2(\bar{x}, y(\bar{x}), z(\bar{x})) = (0, 0, 0). \end{aligned}$$

1. METODO DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Si è visto che per cercare i punti di minimo e i punti di massimo per una funzione f su un insieme chiuso V si può utilizzare una parametrizzazione, chiamiamola ϕ .

La difficoltà di questo metodo sta nel fatto che è necessario conoscere l'espressione di ϕ per poter fare i calcoli.

Vediamo ora un metodo alternativo, che prende il nome di *metodo dei moltiplicatori di Lagrange*, tramite il quale si può risolvere il problema della ricerca dei punti stazionari di F in V anche senza conoscere ϕ .

Si consideri il primo caso affrontato nella prima parte, l'insieme V è una curva in $\mathbf{R}^2$. Introduciamo la funzione ausiliaria, definita in $\mathbf{R}^3$,

$$H(x, y, \lambda) := F(x, y) + \lambda G(x, y).$$

Volendo cercare i punti stazionari di H , nell'ipotesi che F e G siano regolari, si studia il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x}(x, y, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial y}(x, y, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 0. \end{cases}$$

Questo sistema altro non è che, accoppiando le prime due equazioni,

$$\begin{cases} \nabla F(x, y) + \lambda G(x, y) = 0 \\ G(x, y) = 0. \end{cases}$$

Questo significa che cercando i punti stazionari liberi (cioè su tutto $\mathbf{R}^3$) di H si stanno in realtà chiedendo due condizioni bene precise: la prima è che i punti cercati debbano soddisfare l'equazione (4), la seconda è che tali punti appartenano all'insieme

$$V := \{(x, y) \in A \mid G(x, y) = 0\}.$$

Cosa analoga si può fare nel seconda caso, quando invece l'insieme V è una superficie in $\mathbf{R}^3$: si considera la funzione ausiliaria di quattro variabili

$$H(x, y, z, \lambda) := F(x, y, z) + \lambda G(x, y, z)$$

e si procede in maniera analoga a prima.

Nel terzo caso invece il vincolo è dato dall'intersezione di due superfici: si introduce la funzione ausiliaria

$$H(x, y, z, \lambda, \mu) := F(x, y, z) + \lambda G_1(x, y, z) + \mu G_2(x, y, z)$$

e si noti che eguagliando a zero tutte e cinque le derivate parziali di H si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \nabla F(x, y, z) + \lambda G_1(x, y, z) + \mu G_2(x, y, z) = 0 \\ G_1(x, y, z) = 0 \\ G_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

cioè che sia soddisfatta l'equazione (8) e che i punti trovati stiano in entrambi i luoghi di zeri che definiscono V .

Enunciato del teorema - Si consideri ora una funzione F definita in un aperto $A \subset \mathbf{R}^{m+n} \rightarrow \mathbf{R}$, una funzione $G : A \rightarrow \mathbf{R}^n$, l'insieme

$$V := \{x \in A \mid G_1(x) = 0\} \cap \cdots \cap \{x \in A \mid G_n(x) = 0\}$$

ed un punto $\bar{x} \in V$. Diremo che tale punto è *regolare* per il vincolo V se la matrice jacobiana di G valutata in $\bar{x}$ ha rango n , cioè esiste un minore $n \times n$ con determinante non nullo.

Teorema 1.1. *Nel caso in cui $\bar{x} \in V$ sia un punto regolare, $F, G_1, \dots, G_n$ siano di classe $C^1(A)$ si ha che $\bar{x}$ è un punto critico per F nell'insieme V se e solo se esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ (detti moltiplicatori di Lagrange) tali che*

$$\nabla F(\bar{x}) + \lambda_1 \nabla G_1(\bar{x}) + \cdots + \lambda_n \nabla G_n(\bar{x}) = (0, \dots, 0).$$

Concludiamo che per cercare i punti critici, fra i quali ci saranno il punto di massimo e il punto di minimo, di una funzione C^1 in un vincolo definito da n funzioni anch'esse C^1 è sufficiente trovare i punti critici liberi della funzione ausiliaria

$$H(x, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = F(x) + \lambda_1 G_1(x) + \cdots + \lambda_n G_n(x) \quad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Se poi in alcuni punti F oppure le G_i non saranno differenziabili si andranno a considerare come candidati, oltre ai punti critici di H , anche questi punti.

Attenzione!! Se si ha una funzione F definita in un aperto di $\mathbf{R}^3$ e si vuole minimizzare F su di una superficie espressa da $G(x, y, z) = 0$ se si riesce a parametrizzare tale superficie ci si riduce ad avere due variabili (e quindi a risolvere un sistema di due equazioni in due incognite), usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange si hanno quattro variabili.

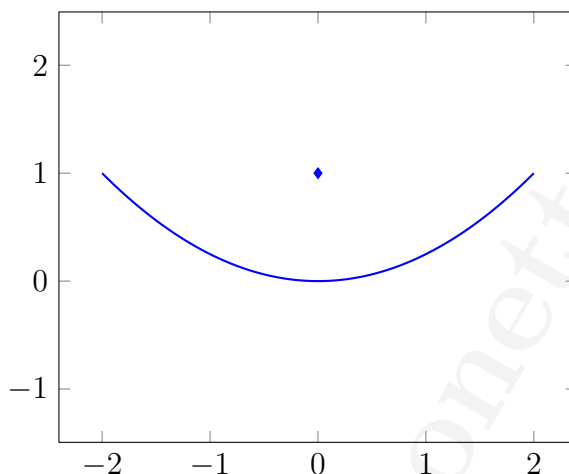
Se anziché una superficie si ha una curva in $\mathbf{R}^3$, parametrizzandola si ha una sola variabile, con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange si arriva a cinque variabili. È sempre conveniente?

Esempio 1.2. - Nell'enunciato si è supposto che il punto $\bar{x}$ sia regolare, cioè G soddisfi le ipotesi del teorema delle funzioni implicite. Questa ipotesi non è superflua, come mostra il seguente esempio.

Si trovi la minima distanza del punto $(0, 1)$ dall'insieme (mostrato in Figura 1)

$$V = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = \frac{1}{4}x^2 \right\}.$$

Figura 1



Al solito per misurare la distanza di un generico punto (x, y) da $(0, 1)$, anziché la funzione $\tilde{F}(x, y) = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$, consideriamo la funzione $F(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$. Applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange si considera la funzione

$$H(x, y, \lambda) = x^2 + (y - 1)^2 + \lambda \left(y - \frac{1}{4}x^2 \right).$$

Derivando si ha

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x}(x, y, \lambda) = 2x - \frac{\lambda}{2}x = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial y}(x, y, \lambda) = 2(y - 1) + \lambda = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = y - \frac{1}{4}x^2 = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava l'unica soluzione $x = 0$, $y = 0$, $\lambda = 2$. Del valore di λ in realtà ci interessa poco, quel che ci interessa sono i valori di x e y , cioè il punto $(0, 0)$, unico candidato. È chiaro che

$$\lim_{\substack{|(x, y)| \rightarrow +\infty \\ (x, y) \in V}} F(x, y) = +\infty$$

per cui $(0, 0)$ è di minimo e risulta quindi il punto più vicino a $(0, 1)$.

Ora consideriamo l'insieme

$$\tilde{V} = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y^2 = \frac{1}{16}x^4 \right\}$$

e si voglia trovare il punto di $\tilde{V}$ più vicino a $(0, 1)$. È chiaro che (si veda l'insieme $\tilde{V}$ in Figura 2) il punto più vicino a $(0, 1)$ è ancora il punto $(0, 0)$. Se però consideriamo la funzione

$$H(x, y, \lambda) = x^2 + (y - 1)^2 + \lambda \left(y^2 - \frac{1}{16}x^4 \right)$$

e la deriviamo otteniamo

$$(9) \quad \begin{cases} 2x - \frac{\lambda}{4}x^3 = 0 \\ 2(y - 1) + 2\lambda y = 0 \\ y^2 = \frac{1}{16}x^4 \end{cases}$$

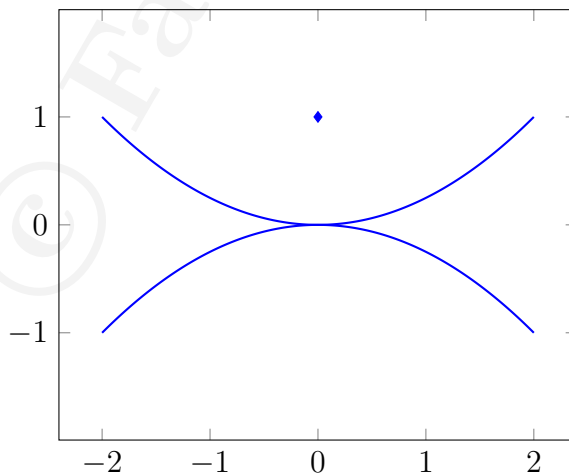
che non ha come soluzione il punto $(0, 0)$! La ragione è che proprio il punto $(0, 0)$ non è regolare nel senso definito sopra, visto che l'insieme $\tilde{V}$ non è grafico di una funzione in nessun intorno di $(0, 0)$.

Attenzione! Oltre alle soluzioni del sistema (9) (che in questo caso è l'insieme vuoto) andranno presi i punti non regolari (nel senso della definizione data prima dell'enunciato del teorema). L'unico punto non regolare è quello che soddisfa

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(y^2 - \frac{1}{16}x^4 \right) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(y^2 - \frac{1}{16}x^4 \right) = 0$$

che è solo il punto $(0, 0)$.

Figura 2



Esempio 1.3. - Si trovi la minima distanza dall'origine dei punti appartenenti all'insieme

$$V = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy = 1\}.$$

Abbiamo già visto che un modo per risolvere il problema è parametrizzare l'insieme. In questo caso è possibile farlo nel modo seguente: l'insieme V è l'unione di due rami di un'iperbole. Limitandoci ad uno dei due possiamo parametrizzarlo come segue (se $xy = 1$ allora $y = 1/x$)

$$\gamma : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad \gamma(t) = \left(t, \frac{1}{t}\right).$$

L'altro ramo può essere parametrizzato da $\sigma : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\sigma(t) = (-t, -1/t)$. Ma limitiamoci al primo, tanto per simmetria l'altro sarà simile. La distanza di un punto (x, y) dall'origine è espressa dalla quantità $\sqrt{x^2 + y^2}$, ma come al solito considereremo $x^2 + y^2$. Detta f tale funzione e componendola con γ si ha $f(\gamma(t)) = t^2 + 1/t^2$. Derivando e ponendo uguale a zero si ha

$$\frac{d}{dt}(f(\gamma(t))) = 2t - 2\frac{1}{t^3} = 2\frac{t^4 - 1}{t^3} = 0$$

che si annulla solo per $t = 1$ (!! $t > 0$). Tale punto è l'unico stazionario e corrisponde al punto $(1, 1)$ sul vincolo. Come capire se è di minimo, di massimo o nessuno dei due?

Sappiamo che

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \quad \text{per ogni } a, b \in \mathbf{R}$$

per cui considerando $x = t$ e $y = 1/t$ si ha

$$f(\gamma(t)) = t^2 + \frac{1}{t^2} \geq 2.$$

Siccome per $t = 1$ si ha $f(\gamma(1)) = 2$ si conclude che il punto $t = 1$, e quindi $(1, 1)$ sul vincolo, è di minimo. Si osservi che la funzione è definita in un insieme illimitato e che

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(\gamma(t)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(\gamma(t)) = +\infty$$

per cui la funzione ammette solo un punto di minimo ed è quello trovato. Analogamente nell'altro ramo si troverà $(-1, -1)$ e la minima distanza sarà $\sqrt{2}$.

Ma vediamo come fare l'esercizio con i moltiplicatori di Lagrange. Si consideri la funzione

$$H(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(xy - 1)$$

e si consideri il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x}(x, y, \lambda) = 2x + \lambda y = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial y}(x, y, \lambda) = 2y + \lambda x = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = xy - 1 = 0. \end{cases}$$

Poiché x e y non si annullano, dalle prime due equazioni si ricava

$$\lambda = -\frac{2x}{y} = -\frac{2y}{x}$$

cioè

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x}$$

il che implica $x = y = 1$ oppure $x = y = -1$. Si conclude che sono punti di minimo analogamente a prima usando la stima

$$x^2 + y^2 \geq 2xy$$

e quindi per $x = y = 1$ e $x = y = -1$ si ha $x^2 + y^2 \geq 2$, oppure osservando che

$$\lim_{\substack{|(x,y)| \rightarrow +\infty \\ x \in V}} (x^2 + y^2) = +\infty$$

per cui la funzione nel punto trovato ha un punto di minimo.

Figura 1.d

