

Superfici

ULTIMO AGGIORNAMENTO: 18 FEBBRAIO 2017

1. SUPERFICI PARAMETRICHE

Si considerino un insieme $A \subset \mathbf{R}^2$ che sia aperto e connesso e un'applicazione $\varphi : A \rightarrow \mathbf{R}^3$.

Definizione 1.1 (Superficie regolare). *Diciamo che $\varphi : A \rightarrow \mathbf{R}^3$ è una superficie regolare se*

- (a) $\varphi \in C^1(A)$;
- (b) φ è *iniettiva*;
- (c) *il rango di $D\varphi(u, v)$ è 2 per ogni $(u, v) \in A$.*

L'insieme $S = \varphi(A)$ è detto sostegno della superficie φ .

Commento - La richiesta che il rango di $D\varphi$ sia 2 significa che i due vettori

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) &:= \varphi_u(u, v) = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}(u, v) \right), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) &:= \varphi_v(u, v) = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u, v), \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u, v), \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}(u, v) \right), \end{aligned}$$

che formano la matrice

$$D\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti. Questo garantisce l'esistenza del piano tangente alla superficie, come indicato nella figura seguente.

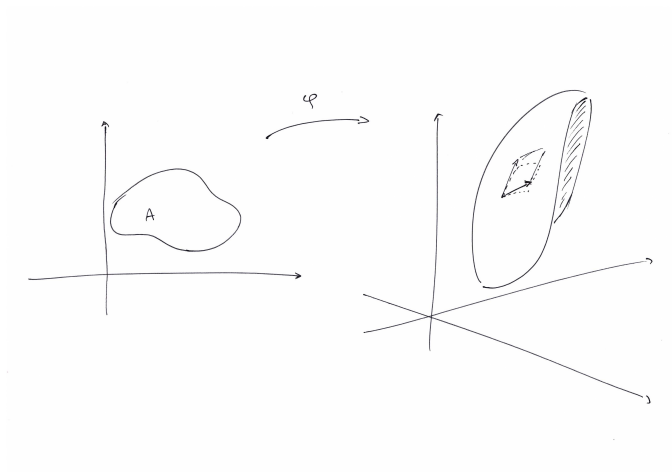


Figura 1

Superfici compatte - A volte si definiscono anche superfici compatte, $\varphi : K \rightarrow \mathbf{R}^3$, dove K è un compatto, chiusura di un aperto connesso e limitato $A \subset \mathbf{R}^2$. In tal caso si fanno le stesse richieste fatte nella definizione precedente, ma non per ogni $(x, y) \in K$, ma per ogni $(x, y) \in A$.

Il sostegno della superficie sarà $\varphi(K)$.

Esempio 1.2. - 1. Si consideri $\varphi : A \rightarrow \mathbf{R}^3$ dove $A = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$, definita da

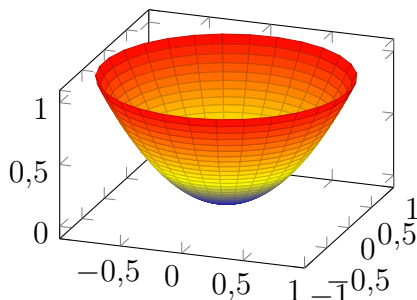
$$\varphi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2),$$

il cui sostegno è in Figura 2.a, è una superficie. Anche la mappa $\psi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ definita da $\varphi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ è una superficie. La funzione ψ ristretta al chiuso

$$K = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq 1\}$$

è una superficie compatta.

Figura 2.a



2. Si consideri $\varphi : [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^3$ definita da

$$\varphi(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v).$$

In questo caso $\partial([0, 2\pi] \times [0, 1])$ viene mappato in parte sul bordo del cilindro, in parte all'interno della superficie. Limitandoci alla parte interna di $[0, 2\pi] \times [0, 1]$, cioè all'insieme $(0, 2\pi) \times (0, 1)$, si verificano le condizioni (a), (b), (c), per cui tale cilindro è una superficie compatta.

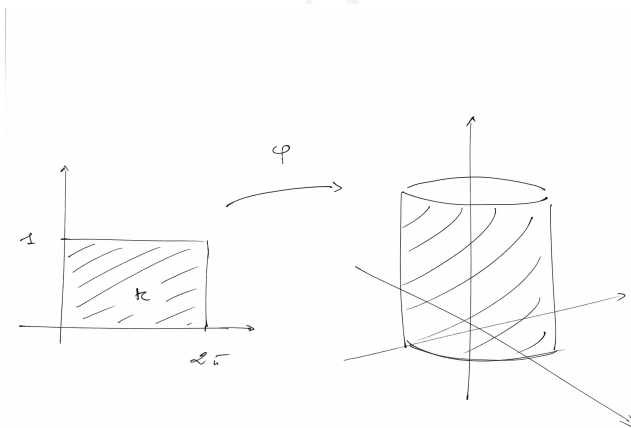


Figura 2.b

3. Si consideri $\phi : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbf{R}^3$ definita da

$$\phi(\vartheta, \alpha) = (\sin \alpha \cos \vartheta, \sin \alpha \sin \vartheta, \cos \alpha).$$

Il sostegno di ϕ è la sfera di raggio 1 centrata nell'origine. Anche questa è una superficie compatta. Si noti che nell'insieme $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$ oltre all'iniettività si perde anche il fatto che la matrice ha rango 2 (nei punti $(\vartheta, 0)$ la matrice jacobiana non ha rango 2).

A questo punto vediamo cos'è una superficie con bordo.

Definizione 1.3 (Superficie regolare con bordo). Diciamo che $\varphi : K \rightarrow \mathbf{R}^3$ è una superficie regolare con bordo se K è la chiusura di un aperto connesso $A \subset \mathbf{R}^2$, cioè $K = \bar{A}$ ed esiste un aperto $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ contenente K tale che φ sia la restrizione a K di una superficie $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ e ∂K sia il sostegno di una o più curve regolari. In tal caso si chiama sostegno della superficie l'insieme $S = \varphi(K)$ e bordo della superficie l'insieme $\varphi(\partial K)$.

Se consideriamo una superficie $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$, Ω aperto connesso di $\mathbf{R}^2$, ogni restrizione ad un chiuso $K \subset \Omega$ è una superficie con bordo. Varranno quindi in particolare le condizioni

- (a) $\varphi \in C^1(K)$,
- (b) $\varphi|_K$ è iniettiva,
- (c) il rango di $D\varphi(u, v)$ è 2 per ogni $(u, v) \in K$,

Con $C^1(K)$ si intende che le tre componenti $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ della mappa φ sono le restrizioni a K di una mappa $\varphi \in C^1(\Omega)$ (che in questo caso abbiamo già).

Il bordo della superficie appena definita non è la frontiera matematica del sostegno della superficie, ma lo identifichiamo con una parte del sostegno, l'immagine tramite φ dell'insieme ∂K .

Per capirlo torniamo agli esempi precedenti.

Nell'**Esempio 1.2.1** si consideri la mappa definita in consideriamo $K = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq 1\}$; possiamo considerare

$$\Omega = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1 + \varepsilon\} \quad \text{dove } \varepsilon > 0.$$

che chiaramente è un aperto che contiene K , inoltre l'insieme

$$\partial K = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid u^2 + v^2 = 1\}$$

è una curva regolare, la cui immagine identifichiamo con il “bordo” della superficie.

Nell'**Esempio 1.2.2** dobbiamo considerare un'altra parametrizzazione. Consideriamo

$$K = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid \sqrt{u^2 + v^2} \geq 2, \sqrt{u^2 + v^2} \leq 4\}$$

e la mappa

$$\varphi : K \rightarrow \mathbf{R}^3$$

così definita:

$$\varphi(u, v) = \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, 4 - \frac{4}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right)$$

il cui modo di agire è mostrato in Figura 3. Il sostegno di tale mappa è il cilindro

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, 2 \leq z \leq 3\}$$

Per trovare tale mappa considero il punto $(0, 0, 4)$ e un generico punto (u, v) di K . Possiamo immaginare prima di immergere K in $\mathbf{R}^3$ considerando punti del tipo $(u, v, 0)$ con $(u, v) \in K$. Unendo con un segmento il punto $(0, 0, 4)$ al punto $(u, v, 0)$ possiamo cercare quel valore di $t \in (0, 1)$ tale che

$$(1 - t)(0, 0, 4) + t(u, v, 0)$$

sta sul cilindro. Richiedere che $(tu, tv, 4(1 - t))$ stia sul cilindro significa che $(tu)^2 + (tv)^2 = 1$ e quindi

$$t = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

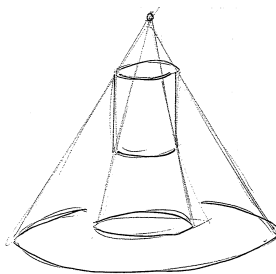


Figura 3

Chiaramente se consideriamo l'insieme

$$\Omega = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid \sqrt{u^2 + v^2} > 2 - \varepsilon, \sqrt{u^2 + v^2} < 4 + \varepsilon\}$$

per qualche valore di ε positivo e sufficientemente piccolo le richieste fatte nella Definizione 1.3 sono soddisfatte. In questo caso la superficie è una superficie con bordo e l'insieme ∂K è l'unione di due curve regolari, le cui immagini tramite φ rappresentano il bordo della superficie.

Nell'**Esempio 1.2.3** la superficie è senza bordo.

Superfici chiuse - Una superficie sarà detta *chiusa* quando è compatta e senza bordo. Questo sottintende che, essendo compatta, sia regolare. Nell'**Esempio 1.2.3** la superficie è chiusa.

Torniamo alla definizione di superficie. Il prodotto vettoriale $a \wedge b$ di due vettori $a, b \in \mathbf{R}^3$ è dato da

$$a \wedge b = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

Si osservi come $a \wedge b$ risulta il vettore nullo $(0, 0, 0)$ se e solo se a e b sono linearmente dipendenti, cioè esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che $a = \lambda b$. Quindi $a \wedge b$ ha modulo non nullo se e solo se a e b non sono linearmente indipendenti. Di conseguenza un altro modo di dare la condizione (c) nella Definizione 1.1 è chiedere che

$$(2) \quad |\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)| \neq 0 \quad \text{per ogni } (u, v) \in A.$$

Piano tangente - I due vettori $\varphi_u(u, v)$ e $\varphi_v(u, v)$ generano un piano che è detto piano tangente alla superficie nel punto (u, v) .

Un'espressione parametrica di tale piano nel punto $P_o = \varphi(u_o, v_o)$ è data da

$$p(u, v) = \varphi(u_o, v_o) + \varphi_u(u_o, v_o)(u - u_o) + \varphi_v(u_o, v_o)(v - v_o).$$

Esercizio 1.4. - Dati $a, b \in \mathbf{R}^3$ linearmente indipendenti si mostri che $a \wedge b$ è ortogonale sia ad a che a b .

Possiamo definire il vettore normale alla superficie in un punto $(x, y) \in A$ come segue (si veda l'Esercizio 1.4)

$$(3) \quad \nu(u, v) = \frac{\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)}{|\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)|}.$$

Superfici cartesiane - Data una funzione $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ dove A è un aperto connesso di $\mathbf{R}^2$ la superficie

$$\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

è una particolare superficie che ha come sostegno il grafico di f . Vediamo in questo caso chi sono i vettori che generano il piano tangente:

$$\begin{aligned}\varphi_x(x, y) &= (1, 0, f_x(x, y)), \\ \varphi_y(x, y) &= (0, 1, f_y(x, y)), \\ \varphi_x(x, y) \wedge \varphi_y(x, y) &= (-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1), \\ \nu(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f(x, y)|^2}} (-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1).\end{aligned}$$

In questo caso si noti che il piano tangente in forma parametrica diventa

$$\begin{aligned}p(x, y) &= (x_o, y_o, f(x_o, y_o)) + \\ &\quad + (1, 0, f_x(x_o, y_o))(x - x_o) + (0, 1, f_y(x_o, y_o))(y - y_o) = \\ &= (x, y, f(x_o, y_o) + f_x(x_o, y_o)(x - x_o) + f_y(x_o, y_o)(y - y_o)),\end{aligned}$$

cioè il piano tangente ad una superficie parametrica è a sua volta una superficie cartesiana, grafico della funzione che rappresenta il piano tangente al grafico della funzione f nel punto $(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$.

Torniamo al vettore normale: tale vettore può essere definito in punti interni al dominio come abbiamo visto prima, potrebbero esserci problemi a definirlo sul bordo, anche definendolo come limite per il fatto che tale limite potrebbe non esistere, oppure possono succedere cose che rendono ambigua la definizione. Per questo motivo si rende necessario definire una nozione di orientabilità. A tal proposito si veda l'esempio che segue.

È quanto accade, ad esempio, per la superficie (detta nastro di Möbius e mostrata in figura) parametrizzata come segue



Figura 4

$$\varphi(u, v) = \left(\left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \cos u, \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \sin u, \frac{v}{2} \sin \frac{u}{2} \right)$$

con $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [-1, 1]$. Il vettore normale alla superficie è

$$\begin{aligned} \varphi_u \wedge \varphi_v = & \left(-\frac{v}{8} \sin u + \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \sin \frac{u}{2} \sin u, \right. \\ & \frac{v}{8} \cos u + \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \sin \frac{u}{2} \sin u, \\ & \left. - \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \cos \frac{u}{2} \right) \end{aligned}$$

e si osservi come la terza componente per $v = 0$ e per $u \rightarrow 0^+$ si ottiene $\varphi_u \wedge \varphi_v = (0, 0, -1)$, mentre $u \rightarrow 2\pi^-$ si ottiene $\varphi_u \wedge \varphi_v = (0, 0, 1)$. Ciò motiva la seguente definizione.

Definizione 1.5 (Superficie orientabile). *Una superficie $\varphi : E \rightarrow \mathbf{R}^3$, $S = \varphi(E)$, si dice orientabile se per ogni curva continua e chiusa $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ si ha che $\nu(\gamma(a)) = \nu(\gamma(b))$, ν definita in (3).*

Superfici equivalenti - Due superfici $\varphi : A \rightarrow \mathbf{R}^3$ e $\psi : B \rightarrow \mathbf{R}^3$, A e B aperti connessi di $\mathbf{R}^2$, si dicono equivalenti se esiste una mappa

$$\phi : A \rightarrow B \quad \text{tale che} \quad \varphi(u, v) = \psi(\phi(u, v))$$

per ogni $(u, v) \in A$ tale che

$$\phi : A \rightarrow B \quad \text{sia un diffeomorfismo.}$$

Poiché ϕ è invertibile si ha anche chiaramente che

$$\psi(r, s) = \varphi(\phi^{-1}(r, s)) \quad \text{per ogni } (r, s) \in B.$$

Due superfici con bordo $\varphi : K \rightarrow \mathbf{R}^3$ e $\psi : H \rightarrow \mathbf{R}^3$, K e H chiusure di due aperti limitati e connessi di $\mathbf{R}^2$ si dicono equivalenti se valgono le analoghe rischieste fatte sopra, ma rispettivamente in K e in H anziché in A e B e se inoltre la funzione

$$\phi \quad \text{mappa } \partial K \text{ su } \partial H.$$

Di conseguenza, in entrambi i casi, le due mappe φ e ψ avranno la stessa immagine S . Come per le curve qualche volta con il termine superficie si denota il sostegno S e non la mappa φ (o ψ). Valutiamo ora le derivate di φ rispetto ad u e a v viste come composizione di ψ e ϕ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_j}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial \psi_j}{\partial r}(\phi(u, v)) \frac{\partial \phi_1}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial \psi_j}{\partial s}(\phi(u, v)) \frac{\partial \phi_2}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial \varphi_j}{\partial v}(u, v) &= \frac{\partial \psi_j}{\partial r}(\phi(u, v)) \frac{\partial \phi_1}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial \psi_j}{\partial s}(\phi(u, v)) \frac{\partial \phi_2}{\partial v}(u, v) \end{aligned}$$

per $j = 1, 2, 3$. Se denotiamo per semplicità

$$\begin{aligned}\varphi_u(u, v) &= \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) := \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}(u, v) \right), \\ \varphi_v(u, v) &= \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) := \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u, v), \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u, v), \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}(u, v) \right),\end{aligned}$$

possiamo scrivere

$$(4) \quad \varphi_u \wedge \varphi_v(u, v) = (\psi_r \wedge \psi_s)(\phi(u, v)) \det D\phi(u, v).$$

Poiché ϕ è un diffeomorfismo si ha che $\det D\phi(u, v) \neq 0$ per ogni $(u, v) \in A$ e in particolare

$$\det D\phi(u, v) > 0 \quad \text{oppure} \quad \det D\phi(u, v) < 0$$

per ogni $(u, v) \in A$. Diremo che φ e ψ hanno la stessa orientazione se $\det D\phi(u, v) > 0$, orientazione opposta se $\det D\phi(u, v) < 0$. In questo secondo caso, per la definizione di ν , si ha che $\varphi_u \wedge \varphi_v$ e $\psi_r \wedge \psi_s$ hanno stessa direzione, ma verso opposto.

Si considerino ora una superficie $\varphi : A \rightarrow \mathbf{R}^3$ e una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow A \subset \mathbf{R}^2$ regolare: allora la curva $\eta = \varphi \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^3$ è una curva regolare la cui derivata è

$$\begin{aligned}\frac{d\eta}{dt}(t) &= \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma)(t) = \frac{d}{dt}(\varphi_1(\gamma(t)), \varphi_2(\gamma(t)), \varphi_3(\gamma(t))) = \\ &= \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(\gamma(t))\gamma'_1(t) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(\gamma(t))\gamma'_2(t), \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(\gamma(t))\gamma'_1(t) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(\gamma(t))\gamma'_2(t), \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}(\gamma(t))\gamma'_1(t) + \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}(\gamma(t))\gamma'_2(t) \right) = \\ &= \varphi_u(\gamma(t))\gamma'_1(t) + \varphi_v(\gamma(t))\gamma'_2(t)\end{aligned}$$

per cui il vettore derivata di $\varphi \circ \gamma$ in un punto $t_o \in (a, b)$ è un vettore che giace sul piano generato dai due vettori $\varphi_u(\gamma(t_o))$ e $\varphi_v(\gamma(t_o))$, come mostrato in Figura 5. Il piano, come già visto, nel punto $P_o = \varphi(\gamma(t_o))$ ha equazione parametrica

$$p(u, v) = \varphi(u_o, v_o) + \varphi_u(u_o, v_o)(u - u_o) + \varphi_v(u_o, v_o)(v - v_o)$$

dove $(u_o, v_o) = \gamma(t_o)$.

2. SUPERFICI COME LUOGHI DI ZERI

Le superfici possono essere viste, oltre che come parametriche (come visto nel paragrafo precedente), anche come luoghi di zeri, cioè come

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid g(x, y, z) = 0\}$$

dove g è una funzione definita in $\mathbf{R}^3$ e a valori reali. Nel caso particolare in cui g sia della forma

$$g(x, y, z) = z - f(x, y)$$

per una qualche funzione $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ si parla di superfici cartesiane e possiamo scrivere che S è l'insieme dei punti (x, y, z) di $\mathbf{R}^3$ che soddisfano

$$z = f(x, y).$$

Ad esempio la superficie dell'Esempio 1.2.1 è una superficie cartesiana dove $f(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$. La superficie dell'Esempio 1.2.2 può essere vista come il luogo degli zeri di

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 \quad \text{con } z \in [0, 1].$$

La superficie dell'Esempio 1.2.3 può essere vista come il luogo degli zeri di

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

Come già visto per le curve le funzioni g che hanno lo stesso luogo di zeri sono infinite. Ad esempio la sfera di raggio 1 dell'Esempio 1.2.3 è il luogo degli zeri anche di

$$g(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 1.$$

In questo modo si possono produrre infinite funzioni, $g_\alpha(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^\alpha - 1$ con $\alpha > 0$, oppure le funzioni $g_n(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 1)^n$, $n \in \mathbf{N}$.

3. AREA DI UNA SUPERFICIE

Consideriamo un'applicazione lineare $L : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ definita da

$$L(x, y) = (v_1x + w_1y, v_2x + w_2y, v_3x + w_3y) = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Le immagini tramite L dei due vettori di base $(1, 0)$ e $(0, 1)$ sono rispettivamente i due vettori $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$. Vogliamo calcolare l'area del parallelogramma P di vertici $(0, 0, 0)$, (v_1, v_2, v_3) , (w_1, w_2, w_3) e $(v_1, v_2, v_3) + (w_1, w_2, w_3)$, disegnato in Figura 6. Prima

di far ciò ricordiamo la seguente formula vista nel capitolo degli integrali: dato un insieme $E \subset \mathbf{R}^n$ ed un'applicazione lineare B rappresentata dalla matrice M vale l'uguaglianza

$$|B(E)| = |\det M| |E|,$$

dove se A è un insieme $|A|$ rappresentano la misura dell'insieme A , mentre $|\det M|$ è il modulo di $\det M$.

Abbandoniamo per un momento il calcolo dell'area del parallelogramma e supponiamo di avere un'applicazione lineare

$$B : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3, \quad B(x, y, z) = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

cioè l'applicazione lineare B è rappresentata da una matrice le cui entrate sono tre vettori u, v, w . Se consideriamo il cubo $Q = [0, 1]^3$ si ha che il volume (la misura in $\mathbf{R}^3$) del parallelepipedo $B(Q)$ è dato dal volume di Q , che è 1, moltiplicato per valore assoluto del determinante della matrice che rappresenta B , cioè

$$\text{Vol}(B(Q)) = \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \right|$$

Calcoliamo tale determinante:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} &= \\ &= u_1(v_2w_3 - v_3w_2) - u_2(v_1w_3 - v_3w_1) + u_3(v_1w_2 - v_2w_1) = \\ &= \langle u, v \wedge w \rangle. \end{aligned}$$

Detto ciò, si supponga ora che i vettori u, v, w siano tre lati del parallelepipedo $B(Q)$ e si supponga inoltre che il vettore u sia ortogonale ai due vettori v e w , come mostrato in Figura 6. In tal modo il volume di questo parallelepipedo è dato dall'area del parallelogramma di base (che ha v e w come due dei suoi lati) e l'altezza che è data dal modulo di u , cioè

$$\text{Vol}(B(Q)) = |u| \text{Area}(P)$$

Se a questo punto si sceglie u in modo tale che abbia modulo 1 si ottiene

$$\text{Area}(P) = \text{Vol}(B(Q)) = \langle u, v \wedge w \rangle.$$

A questo punto si ricordi che il vettore $v \wedge w$ è ortogonale sia a v che a w (si veda l'Esercizio 1.4) e quindi, per la scelta fatta di u , è parallelo

a u , per cui

$$\langle u, v \wedge w \rangle = |u| |v \wedge w| = |v \wedge w|.$$

Conclusione:

$$(5) \quad \text{Area}(P) = |v \wedge w|.$$

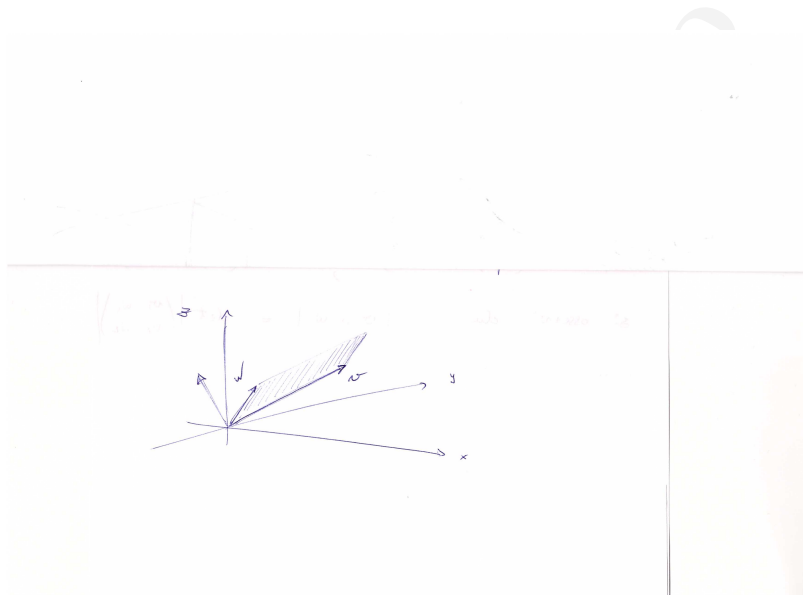


Figura 6

Si osservi come nel caso in cui $v = (v_1, v_2, 0)$ e $w = (w_1, w_2, 0)$ si ha

$$|v \wedge w| = \left| \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} \right|$$

Il calcolo fatto per ottenere (5) dovrebbe motivare la seguente definizione di area di una superficie (si veda anche la Figura 1).

Definizione 3.1 (Area di una superficie). *Si definisce area di una superficie $\varphi : K \rightarrow \mathbf{R}^3$, K compatto o aperto connesso e limitato, la quantità*

$$A(\varphi) = \iint_K |\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)| \, du \, dv.$$

Si osservi che la definizione appena data è la definizione di area di una superficie, dove la superficie è la mappa φ . Quindi a priori la definizione dipende dalla mappa φ e non tanto dal suo sostegno $\Sigma = \varphi(K)$.

Osservazione 3.2. - In realtà la quantità appena definita è indipendente dalla mappa φ , ma dipende solo dal suo sostegno. Infatti

sia

$$\phi : H \rightarrow \mathbf{R}^3$$

un'altra superficie regolare con lo stesso sostegno Σ di φ e che sia equivalente a φ a meno di un diffeomorfismo $\phi : K \rightarrow H$. Usando la formula (4) possiamo scrivere

$$\begin{aligned} A(\varphi) &= \iint_K |\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)| \, du \, dv = \\ &= \iint_K |(\psi_r \wedge \psi_s)(\phi(u, v))| |\det D\phi(u, v)| \, dudv = \\ &= \iint_H |\psi_r \wedge \psi_s(r, s)| \, drds = A(\psi). \end{aligned}$$

Grazie a questa osservazione, poiché $A(\varphi) = A(\psi)$ per ogni coppia φ, ψ di superfici equivalenti, si può in realtà definire la quantità

$$A(\Sigma)$$

che è indipendente dalla scelta della mappa che si sceglie per parametrizzare Σ e coincide con la quantità definita nella Definizione 3.1 per una qualunque scelta di una mappa φ regolare che ha come sostegno Σ .

In maniera analoga all'area si può definire l'integrale di superficie che, come per l'area, è indipendente dalla parametrizzazione di Σ .

Definizione 3.3 (Integrale superficiale). *Data $f : A \rightarrow \mathbf{R}$, A aperto di $\mathbf{R}^3$ contenente Σ , sostegno di φ , si definisce integrale di f su Σ la quantità*

$$\iint_{\Sigma} f \, d\sigma := \iint f(\varphi(u, v)) |\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)| \, du \, dv.$$

Superfici di rotazione - Valutiamo l'area di una superficie di rotazione, una superficie cioè definita come segue

$$\begin{aligned} \varphi &: [0, 2\pi] \times [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^3 \\ \varphi_1(\vartheta, z) &= f(z) \cos \vartheta \\ \varphi_2(\vartheta, z) &= f(z) \sin \vartheta \\ \varphi_3(\vartheta, z) &= z \end{aligned}$$

dove $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$, $f \geq 0$. Valutando le derivate delle varie componenti di φ si ha

$$\begin{aligned} \varphi_{\vartheta}(\vartheta, z) &= (-f(z) \sin \vartheta, f(z) \cos \vartheta, 0), \\ \varphi_z(\vartheta, z) &= (f'(z) \cos \vartheta, f'(z) \sin \vartheta, 1), \end{aligned}$$

il cui prodotto vettoriale è

$$\varphi_{\vartheta} \wedge \varphi_z(\vartheta, z) = (f(z) \cos \vartheta, f(z) \sin \vartheta, -f(z)f'(z)).$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} A(\Sigma) &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_a^b dz |\varphi_{\vartheta} \wedge \varphi_z(\vartheta, z)| = \\ &= 2\pi \int_a^b f(z) \sqrt{1 + (f'(z))^2} dz. \end{aligned}$$

Esempio - Si calcoli l'area della catenoidale ottenuta ruotando la curva detta *catenaria*

$$f(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z, \quad z \in [a, b].$$

Si ha che $f'(z) = \sinh z$ e quindi $f(z)\sqrt{1 + (f'(z))^2} = \cosh^2 z$, per cui l'area è data da

$$2\pi \int_a^b \frac{1}{4}(e^{2z} + e^{-2z} + 2)dz = 2\pi \left(\frac{1}{8}(e^{2b} - e^{-2b} - e^{2a} + e^{-2a}) + \frac{1}{2}(b - a) \right).$$

EX - Valutiamo la superficie della sfera. Anche in questo caso possiamo vedere la superficie come superficie di rotazione dove

$$f(z) = \sqrt{r^2 - z^2}, \quad f'(z) = -\frac{z}{\sqrt{r^2 - z^2}}.$$

Si ha quindi che $f(z)\sqrt{1 + (f'(z))^2} = r$ e quindi la superficie è

$$2\pi \int_{-r}^r dz r = 4\pi r^2.$$

Si rifaccia il calcolo usando le coordinate sferiche e anche con le coordinate cilindriche.

Esempio - Si calcoli l'area della porzione di grafico del paraboloide $f(x, y) = x^2 + y^2$ con $x^2 + y^2 \leq r^2$. Possiamo vedere tale superficie come superficie di rotazione ruotando idealmente il grafico di

$$f(z) = \sqrt{z}, \quad z \in [0, r^2].$$

In questo caso il calcolo risulta più semplice usando la seguente parametrizzazione:

$$\psi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2), \quad (u, v) \in C, \text{ cerchio di raggio } r \text{ e centro } (0, 0).$$

Si ha

$$\varphi_u(u, v) = (1, 0, 2u)$$

$$\varphi_v(u, v) = (0, 1, 2v)$$

$$\varphi_u \wedge \varphi_v(u, v) = (-2u, -2v, 1)$$

per cui l'area della superficie in questione è data da

$$\begin{aligned} \iint_C \sqrt{1 + 4(u^2 + v^2)} du dv &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^r d\rho \rho \sqrt{1 + 4\rho^2} = \\ &= \frac{\pi}{6} [(1 + 4r^2)^{3/2} - 1]. \end{aligned}$$