Campi di vettori, forme differenziali e integrali curvilinei di seconda specie

Ultimo aggiornamento: 3 febbraio 2018

Una funzione F di n variabili reali e a valori in $\mathbf{R}^n$ è detta campo di vettori. Nel seguito considereremo $F : A \to \mathbf{R}^n$ con A aperto di $\mathbf{R}^n$.

1. Integrali curvilinei di seconda specie

Definizione 1.1. *Dato un campo $F : A \to \mathbf{R}^n$ continuo, A aperto di $\mathbf{R}^n$, e data $\gamma : [a, b] \to A$ curva regolare o regolare a tratti si definisce integrale di F lungo la curva la quantità*

$$\int_\gamma F(x)\,dx := \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt. \tag{1}$$

La quantità appena definita si scrive anche $\displaystyle\int_\gamma [F_1(x)\,dx_1 + \ldots F_n(x)\,dx_n]$, come il termine a destra altro non è che

$$\int_a^b \sum_{i=1}^n F_i(\gamma(t))\gamma_i'(t)\,dt.$$

L'integrale appena definito rappresenta, da un punto di vista fisico, il lavoro compiuto dal campo F lungo il cammino γ. È detto integrale curvilineo di seconda specie.

Forme differenziali - Matematicamente, date $a_1, \ldots a_n$ funzioni continue definite in A aperto di $\mathbf{R}^n$ e a valori reali, si definisce *forma differenziale* l'espressione

$$\omega = a_1(x)\,dx_1 + \ldots + a_n(x)\,dx_n\,.$$

Precisamente una forma differenziale ω è un'applicazione

$$\omega : A \to \mathcal{L}(\mathbf{R}^n; \mathbf{R})$$

come lo è il differenziale di una funzione (differenziabile) $f : A \to \mathbf{R}$.
La forma differenziale $\omega = dx_j$ è costante, cioè

$$\omega(x) = \omega(y) \qquad \text{per ogni } x, y \in A$$

e agisce come segue: dati $x_o \in A$ (arbitrario, visto che ω è costante) e $v \in \mathbf{R}^n$

$$\omega(x_o)(v) = dx_j(v) := v_j\,.$$

L'applicazione $dx_j \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n; \mathbf{R})$ è rappresentata dal vettore $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0)$ dove 1 sta nella j-esima posizione e la forma dx_j può essere pensata come il differenziale della funzione

$$f(x) = x_j \, .$$

Si noti come in questo caso $df(x_o)$, qualunque sia x_o, è rappresentato dal vettore e_j, il gradiente di f.
Una forma differenziale ω valutata in un punto $x \in A$ è un'applicazione lineare da $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}$, di conseguenza esisterà $V_\omega \in \mathbf{R}^n$ che la rappresenta nel senso usuale, cioè

$$\omega(x)\big(v\big) = \langle V_\omega, v \rangle \qquad \text{per ogni } v \in \mathbf{R}^n \, .$$

Tale vettore altro non è che

$$V_\omega = (a_1(x), \ldots a_n(x)) \, .$$

A questo punto si definisce l'integrale di una forma ω su una curva $\gamma : [a, b] \to A$ regolare o regolare a tratti come segue:

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \big(a_1(x)\, dx_1 + \ldots + a_n(x)\, dx_n \big) := \int_a^b \sum_{i=1}^n a_i(\gamma(t)) \gamma_i'(t) \, dt.$$

Matematicamente si parla di forme differenziali, fisicamente di campi di vettori.

Osservazione 1.2. - Si osservi che se si considera una curva equivalente a γ, ma con orientazione opposta, il valore dell'integrale cambia segno. Si consideri infatti $\eta : [a, b] \to A$, $\eta(t) := \gamma(b + a - t)$ e si valuti il lavoro di F lungo lo stesso cammino percorso al contrario:

$$\begin{aligned} \int_a^b \langle F(\eta(t)), \eta'(t) \rangle dt = & - \int_a^b \langle F(\gamma(b + a - t)), \gamma'(b + a - t) \rangle dt = \\ & = \int_b^a \langle F(\gamma(s)), \gamma'(s) \rangle ds = \\ & = - \int_a^b \langle F(\gamma(s)), \gamma'(s) \rangle ds. \end{aligned}$$

Infatti potremmo scrivere l'integrale (1) nel modo seguente:

$$\int_\gamma F(x)\, dx := \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \tau(t) \rangle |\gamma'(t)| dt,$$

dove, ricordiamo, $\tau(t)$ è il versore tangente $\gamma'(t)/|\gamma'(t)|$.

Esempio 1.3. - Calcoliamo

$$\int_\gamma (y\, dx + (x^2 - y^2)\, dy)$$

dove γ è l'arco di circonferenza $x^2 + y^2 = 4$, $y \geqslant 0$, che va dal punto $(-2, 0)$ al punto $(2, 0)$, percorsa in senso orario. Una parametrizzazione di tale curva è

$$\gamma : [0, \pi] \to \mathbf{R}^2, \quad \gamma(t) = (2 \cos(\pi - t), 2 \,\mathrm{sen}\,(\pi - t)) = (-2 \cos t, 2 \,\mathrm{sen}\, t).$$

L'integrale diventa

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma (y\,dx + (x^2 - y^2)\,dy) = \\
&\quad = \int_0^\pi \left[(2\mathrm{sen}\,t)^2 + (4\cos^2 t - 4\,\mathrm{sen}^2 t)2\cos t\right] dt = \\
&\quad = \int_0^\pi \left[4\,\mathrm{sen}^2 t + 8\cos^3 t - 8\,\mathrm{sen}^2 t\cos t\right] dt = \\
&\quad = \int_0^\pi \left[4\,\mathrm{sen}^2 t + 8\cos t\,(1 - \mathrm{sen}^2 t) - 8\,\mathrm{sen}^2 t\cos t\right] dt = \\
&\quad = 4\,\frac{\pi}{2} + 8\int_0^\pi \cos t\,dt - 16\int_0^\pi \mathrm{sen}^2 t\cos t\,dt = \\
&\quad = 4\,\frac{\pi}{2} - 16\,\frac{1}{3}\,\mathrm{sen}^3 t\Big|_0^\pi = 2\pi.
\end{aligned}$$

Che succede se valutiamo un integrale lungo uno stesso cammino parametrizzato però in due modi diversi?

Proposizione 1.4. *Date due curve equivalenti* $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbf{R}^n$, $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbf{R}^n$ *risulta*

$$\int_{\gamma_1} F(x)\,dx = \int_{\gamma_2} F(x)\,dx$$

se γ_1 *e* γ_2 *sono orientate allo stesso modo,*

$$\int_{\gamma_1} F(x)\,dx = -\int_{\gamma_2} F(x)\,dx$$

se γ_1 *e* γ_2 *sono orientate in maniera diversa.*

Dimostrazione - Per ipotesi esiste un cambiamento di variabile (un diffeomorfismo)

$$\alpha : [a,b] \to [c,d]$$

tale che $\gamma_1(t) = \gamma_2(\alpha(t))$. Si ha allora

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} F(x)\,dx &= \int_a^b \langle F(\gamma_1(t)), \gamma_1'(t)\rangle\,dt = \\
&= \int_a^b \langle F(\gamma_2(\alpha(t))), \gamma_2'(\alpha(t))\rangle \alpha'(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Ora, facendo il cambio di variabile $s = \alpha(t)$ questo termine è

$$\int_c^d \langle F(\gamma_2(s)), \gamma_2'(s)\rangle \, ds \qquad \text{se } \alpha'(t) > 0,$$
$$\int_d^c \langle F(\gamma_2(s)), \gamma_2'(s)\rangle \, ds \qquad \text{se } \alpha'(t) < 0,$$

il che conclude la dimostrazione. $\square$

Si osservi ora la seguente cosa: nel caso particolare in cui, dato un campo $F : A \to \mathbf{R}^n$, esista una funzione $f : A \to \mathbf{R}$, $f \in C^1(A)$, tale che

$$F_j(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \qquad \text{per } j = 1, \dots n$$

è possibile valutare in maniera immediata l'integrale di F lungo un cammino. Infatti sia $\gamma : [a, b] \to A$ curva regolare che unisce i punti $x_1 = \gamma(a)$ e $x_2 = \gamma(b)$.

$$\begin{aligned} \int_\gamma F(x)\, dx &= \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \, dt = \\ &= \int_a^b \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \, dt = \\ &= \int_a^b \left[\frac{d}{dt}\Big(f\big(\gamma(t)\big)\Big) \right] dt = f\big(\gamma(b)\big) - f\big(\gamma(a)\big) = \qquad (2) \\ &= f(x_2) - f(x_1). \end{aligned}$$

Quindi nel caso in cui F sia il gradiente di una funzione f, l'integrale lungo un qualunque cammino regolare che unisce due punti è un valore che dipende solo dalla valutazione in questi due punti della funzione f.

Definizione 1.5 (campo conservativo)**.** *Un campo $F : A \to \mathbf{R}^n$ si dice conservativo se esiste $f : A \to \mathbf{R}$ di classe C^1 tale che $F = \nabla f$ (cioè F è un gradiente). In tal caso f si dice primitiva o potenziale.*

Forme differenziali - Nel linguaggio delle forme differenziali si parla di *forme esatte*. Una forma differenziale $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$ definita in A aperto di $\mathbf{R}^n$ si dice esatta se esiste una funzione $f : A \to \mathbf{R}$, $f \in C^1(A)$, tale che

$$a_i = \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

cioè se ω è un differenziale. In tal caso si scrive $\omega = df$ e l'uguaglianza (2) si scrive

$$\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

A questo punto viene naturale porsi la seguente domanda: quand'è che un campo è un gradiente? Il teorema che segue fornisce delle caratterizzazioni dei campi che sono gradienti.

Definizione 1.6 (Insieme connesso per archi)**.** *Diremo che un insieme* $E \subset \mathbf{R}^n$ *è* connesso per archi *se per ogni coppia di punti* $x, y \in E$ *esiste una curva continua* $\gamma : [a,b] \to E$ *con* $\gamma(a) = x$ *e* $\gamma(b) = y$*.*

Teorema 1.7. *Sia* A *un aperto connesso per archi e* $F : A \to \mathbf{R}^n$ *un campo continuo. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) *per ogni coppia di curve* $\gamma_1 : [a,b] \to A$*,* $\gamma_2 : [c,d] \to A$ *regolari a tratti e con* $\gamma_1(a) = \gamma_2(c) = \bar{x}$*,* $\gamma_1(b) = \gamma_2(d) = \bar{y}$*, si ha*

$$\int_{\gamma_1} F(x)\, dx = \int_{\gamma_2} F(x)\, dx;$$

(b) *per ogni curva* $\gamma : [a,b] \to A$ *regolare a tratti, continua e chiusa risulta*

$$\int_{\gamma_1} F(x)\, dx = 0;$$

(c) F *è conservativo.*

Dimostrazione - (a) $\Rightarrow$ (c) - Si scelga un punto $x_o \in A$ e per ogni altro punto $x \in A$ si consideri un cammino (che esiste per ipotesi)

$$\gamma : [a,b] \to A\,, \qquad \text{con } \gamma(a) = x_o\,, \quad \gamma(b) = x.$$

A questo punto si consideri la quantità

$$f(x) := \int_\gamma F(y)\, dy. \tag{3}$$

Si osservi che f definisce una funzione dall'insieme A a valori in $\mathbf{R}$: infatti, per l'ipotesi (a), per ogni x il valore $f(x)$ è indipendente dal cammino scelto. Ora si fissi un vettore v di modulo 1 e si consideri $\delta > 0$ tale che

$$B_\delta(x) \subset A\,.$$

In tal modo il segmento $[x, x + hv]$ è contenuto in A per $h \in [-\delta, \delta]$ e la curva

$$\eta(t) := \begin{cases} \gamma(t) & \text{se } t \in [a,b], \\ x + (t-b)hv & \text{se } t \in [b, b+1]. \end{cases}$$

In tal modo la curva η è una curva continua che unisce i punti x_o e $x+hv$. Allora

$$
\begin{aligned}
f(x+hv)-f(x) &= \int_\eta F(y)\,dy - \int_\gamma F(y)\,dy = \\
&= \int_b^{b+1} \langle F(\eta(t)), \eta'(t)\rangle\,dt = \\
&= \int_b^{b+1} \langle F(x+(t-b)hv), hv\rangle\,dt = \\
(s=h(t-b)) \qquad &= \int_0^h \langle F(x+sv), v\rangle\,ds
\end{aligned}
$$

per cui

$$\frac{f(x+hv)-f(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_0^h \langle F(x+sv), v\rangle\,ds\,.$$

Il secondo membro dell'uguaglianza ammette limite per $h \to 0$: infatti poiché F è continuo e la curva $s \mapsto x+sv$ è continua la funzione $\tilde{g}(s) = F(x+sv)$ è continua e quindi lo è anche la funzione $g(s) = \langle F(x+sv), v\rangle$. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, detta G una primitiva di g, si ha che

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^h g(s)\,ds = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(G(h)-G(0)\big) = G'(0) = g(0) = \langle F(x), v\rangle\,.$$

Di conseguenza poiché si ha

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h \langle F(x+sv), v\rangle\,ds = \langle F(x), v\rangle$$

si deduce che anche il seguente limite esiste

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+hv)-f(x)}{h}$$

ed è uguale al precedente. Poiché, se tale limite esiste, vale

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+hv)-f(x)}{h} = \frac{\partial f}{\partial v}(x),$$

concludiamo che per ogni $x \in A$ e per ogni vettore v di modulo 1 vale l'uguaglianza

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \langle F(x), v\rangle$$

da cui f è derivabile (in tutte le direzioni v e in ogni punto $x \in A$) e

$$F(x) = \nabla f(x).$$

(c) $\Rightarrow$ (b) - Segue facilmente dal calcolo (2).
(b) $\Rightarrow$ (a) - Si considerino due curve $\gamma_1 : [a,b] \to A$, $\gamma_2 : [c,d] \to A$

regolari a tratti e con $\gamma_1(a) = \gamma_2(c)$, $\gamma_1(b) = \gamma_2(d)$. Costruiamo una curva continua e chiusa "percorrendo in senso opposto" il sostegno di γ_2. Definiamo quindi

$$\tilde{\gamma}_2(t) = \gamma_2(d + (b - t)(d - c)) \qquad t \in [b, b + 1]$$

e infine la curva chiusa

$$\gamma(t) := \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{se } t \in [a, b], \\ \tilde{\gamma}_2(t) & \text{se } t \in [b, b + 1]. \end{cases}$$

Per ipotesi si ha quindi che

$$\int_\gamma F(x)dx = 0$$

e poiché

$$\int_\gamma F(x)dx = \int_{\gamma_1} F(x)dx + \int_{\tilde{\gamma}_2} F(x)dx = \int_{\gamma_1} F(x)dx - \int_{\gamma_2} F(x)dx$$

si conclude. □

Facciamo ora un'altra considerazione: si supponga che un campo $F : A \to \mathbf{R}^n$ sia conservativo e di classe $C^1(A)$. Allora F ammette potenziale f di classe $C^2(A)$, per cui

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x), \qquad \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x)$$

e, per il teorema di Schwarz, si ha

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) \qquad \text{per ogni } i, j = 1 \ldots n. \tag{4}$$

Un campo F che soddisfa la condizione (4) si dice *irrotazionale*. Ci si può chiedere se per caso questa condizione garantisce l'esistenza di un potenziale, almeno in certe condizioni. La risposta è fornita dal seguente risultato. Prima abbiamo bisogno di definire una classe di insiemi.

Forme differenziali - Data una forma differenziale $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$ definita in A aperto di $\mathbf{R}^n$ e di classe $C^1(A)$, cioè $a_i \in C^1(A)$, una forma che soddisfa

$$\frac{\partial a_j}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(x) \qquad \text{per ogni } i, j = 1 \ldots n,$$

è detta *chiusa*.

Definizione 1.8 (Insieme semplicemente connesso)**.** *Un insieme $E \subset \mathbf{R}^n$ è detto semplicemente connesso se comunque dati una curva continua, semplice e chiusa $\gamma : [a, b] \to E$ e un punto $x_o \in E$ si ha che esiste una mappa*

$$\Gamma : [a, b] \times [0, 1] \to E, \qquad \textit{continua},$$

tale che $\Gamma(t, 0) = \gamma(t)$ e $\Gamma(t, 1) = x_o$ per ogni $t \in [a, b]$ e $\Gamma(a, s) = \Gamma(b, s)$ per ogni $s \in [0, 1]$.

La definizione appena data sostanzialmente significa richiedere l'esistenza di una famiglia di curve continue e chiuse, chiamiamole γ_s al variare del parametro s dove $\gamma_s(t) = \Gamma(t, s)$, che deformano la curva iniziale γ "retraendola" ad un punto (il punto x_o) rimanendo sempre dentro l'insieme E.

Esempio 1.9. - L'insieme $A = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ non è semplicemente connesso.
L'insieme $B = \mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ è semplicemente connesso.
L'insieme $C = \mathbf{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x = y = 0\}$ non è semplicemente connesso.

Teorema 1.10. *Si consideri $F : A \to \mathbf{R}^n$ campo di classe $C^1(A)$ con A aperto semplicemente connesso. Allora se F soddisfa* (4)*, F è conservativo.*

Forme differenziali - Nel linguaggio delle forme il teorema precedente si enuncia come segue.

Teorema 1.11. *Si consideri una forma ω di classe $C^1(A)$ con A aperto semplicemente connesso. Se ω è chiusa, ω è esatta.*

Non mostriamo questo risultato, ma esibiamo un esempio significativo.

Esempio 1.12. - **1.** Si consideri il campo

$$F(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right), \qquad (x, y) \in A = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Si verifica facilmente che $F \in C^1(A)$ e che

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Ciononostante il campo non può essere conservativo (grazie al Teorema 1.7) poiché

$$\int_\gamma (F_1 dx + F_2\, dy) = 2\pi$$

dove $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t)$ per $t \in [0, 2\pi]$.

2. Si consideri il campo (ricorda qualcosa?)

$$F(x,y,z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0 \right), \qquad (x,y,z) \in C,$$

dove C è l'insieme dell'Esempio 1.9. Chiaramente $F \in C^1(A)$ e

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}, \\ \frac{\partial F_2}{\partial z}(x,y) &= \frac{\partial F_3}{\partial y}(x,y) = 0, \\ \frac{\partial F_3}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial F_1}{\partial z}(x,y) = 0. \end{aligned}$$

Ma come nell'esempio precedente l'integrale del campo lungo il cammino $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, 0)$ per $t \in [0, 2\pi]$ dà 2π.

Il teorema (la dimostrazione del teorema) 1.7 fornisce una maniera costruttiva per trovare un potenziale di un campo, la funzione definita in (3). Tale funzione dipende però dal punto x_o che si è scelto. Che succede se si fissa un diverso punto y_o e si considera la primitiva

$$g(x) := \int_\gamma F(y)\, dy \qquad \text{dove } \gamma \text{ unisce } y_o \text{ a } x?$$

La funzione g così definita differisce da f definita in (3) per la quantità

$$g(x) - f(x) = \int_\gamma F(y)\, dy$$

dove γ è un qualunque cammino che unisce x_o a y_o, quindi $g(x) - f(x)$ è indipendente da x, e quindi costante. Concludiamo quindi che se esiste un potenziale ne esistono infiniti, che differiscono tra loro per una costante.

Esempio 1.13. - Si dica se il campo

$$F(x,y) = \left(\frac{2xy}{(1+x^2)^2}, -\frac{1}{1+x^2} \right)$$

è conservativo. In tal caso se ne trovi una primitiva.

F è definito in tutto $\mathbf{R}^2$, è C^1. Si verifica facilmente che è anche irrotazionale, infatti

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Allora esiste un potenziale. Come trovarlo? Se si integra, ad esempio, F_2 rispetto alla variabile y si ha che un potenziale f deve soddisfare

$$f(x,y) = -\frac{1}{1+x^2}\,y + g(x).$$

Derivando rispetto alla variabile x si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy}{(1+x^2)^2} + g'(x).$$

Eguagliando tale espressione a F_1 si ha che $g'(x) = 0$ da cui tutti i potenziali sono

$$-\frac{y}{1+x^2} + c, \qquad c \in \mathbf{R}.$$

Esempio 1.14. - Si dica se il campo

$$F(x,y,z) = (2y+1, 2x-1, 2z)$$

è conservativo. In tal caso se ne trovi una primitiva.

Si verifica facilmente che F è C^1, definito in un aperto semplicemente connesso ($\mathbf{R}^3$) e irrotazionale. Cerchiamo un potenziale f. Tale f soddisfarà

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2y+1,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2x-1,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z.$$

Integrando F_3 rispetto a z si ha

$$f(x,y,z) = z^2 + g(x,y),$$

da cui

$$2y+1 = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y),$$
$$2x-1 = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,y).$$

Integrando la prima uguaglianza rispetto a x si ottiene che

$$g(x,y) = 2xy + x + h(y).$$

Derivando quest'ultima e utilizzando le informazioni precedenti si ha che h deve soddisfare

$$2x-1 = \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2x + h'(y)$$

da cui infine $h(y) = -y + c$, $c \in \mathbf{R}$. Andando a ritroso si trova infine tutti i potenziali sono dati da

$$f(x,y,z) = z^2 + 2xy + x - y + c\,, \qquad c \in \mathbf{R}.$$

Un altro modo di trovare un potenziale è quello fornito, come già osservato, da (3). Si tratta di scegliere un punto e di collegarlo ad un altro generico punto con un cammino a scelta. In questo caso fissiamo per semplicità $(0,0,0)$ e lo colleghiamo ad un generico punto (x,y,z) con il segmento che li unisce, cioè con il cammino

$$\gamma(t) = t(x,y,z)\,, \qquad t \in [0,1]\,.$$

Un potenziale allora sarà dato da

$$\begin{aligned} f(x,y,z) = & \int_\gamma [F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz] = \\ = & \int_0^1 \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \\ = & \int_0^1 \big[(2ty+1)x + (2tx-1)y + 2tz^2\big] dt = \\ = & \, 2xy + x - y + z^2\,. \end{aligned}$$

Esercizio 1.15. - Dato il campo

$$F(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)\,,$$

si dica se esiste un dominio A nel quale $F : A \to \mathbf{R}^2$ risulti conservativo. In tal caso si dica se esiste un dominio massimale nel quale è possibile definire F in modo che risulti conservativo.

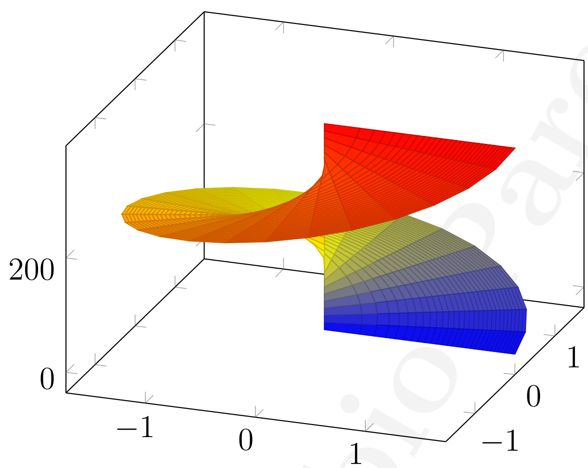
Il fatto che F non sia conservativo nel suo dominio massimale $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (si veda l'esempio 1.12.1) non significa che non esista un sottodominio di $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ nel quale F ammetta potenziale. Se ad esempio, si considera $A = \mathbf{R}^2 \setminus S$, dove S è una semiretta uscente dall'origine, si ha che F è irrotazionale, $C^1(A)$ e A è semplicemente connesso. Di conseguenza un potenziale deve esserci. Integrando, ad esempio, la seconda componente di F rispetto a y e ragionando come nell'Esempio 1.13 si ottengono tutti i potenziali

$$f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + c, \qquad c \in \mathbf{R}$$

definite però per $x \neq 0$. Se scegliamo per semplicità la semiretta $S = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, y = 0, x \geqslant 0\}$ una funzione che sia $C^2(A)$ e che sia un potenziale in tutto A è data da

$$f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} & \text{se } x>0,\ y>0\,, \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{se } x=0,\ y>0\,, \\ \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} + \pi & \text{se } x<0\,, \\ \dfrac{3}{2}\pi & \text{se } x=0,\ y<0\,, \\ \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} + 2\pi & \text{se } x>0,\ y<0\,. \end{cases}$$

il cui grafico è mostrato parzialmente in figura (limitatamente a $(x,y) \in B_1\big((0,0)\big) \setminus S$).



Analogamente si può togliere una qualunque altra semiretta uscente dall'origine o più in generale una qualunque curva che sia semplice e che parta dall'origine e vada all'infinito.

Esercizio 1.16. - Dato il campo

$$F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right) ,$$

si dica se esiste un dominio A nel quale $F : A \to \mathbf{R}^2$ risulti conservativo.
Dopodiché si calcoli l'integrale di F lungo un qualunque arco di circonferenza centrata nell'origine.
Infine si calcoli l'integrale di F lungo l'ellisse di equazione $3x^2 - xy + 10y^2 = 1$.

Il fatto che il dominio massimale nel quale F è definito, cioè $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, non sia semplicemente connesso non significa che il campo non sia conservativo. Integrando infatti si ottiene che

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + c$$

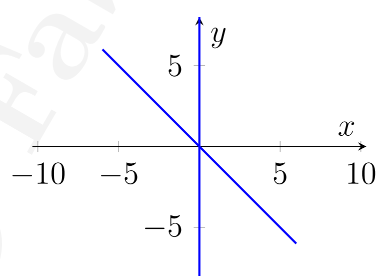
al variare di $c \in \mathbf{R}$ sono tutte le primitive di F.
Il lavoro compiuto lungo un qualunque arco di circonferenza è nullo perché il campo in ogni punto è ortogonale a qualunque circonferenza centrata nell'origine.
Infine, poiché il campo è conservativo, l'integrale lungo l'ellisse risulta zero.

Esercizio 1.17. - Dato il campo

$$F(x,y) = \left(\frac{2x+y}{(x^2+xy)^{2/3}}, \frac{x}{(x^2+xy)^{2/3}} + 2y \right)$$

dire se esiste un dominio nel quale F è conservativo.
F è definito in $\mathbf{R}^2$ meno le due rette $R_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x = 0\}$ e $R_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x = -y\}$, per cui il dominio è fatto da quattro componenti connesse, quindi non è connesso, ognuna delle quali è semplicemente connessa. Poiché il dominio è sconnesso in ognuna delle componenti connesse vi potrà essere un potenziale differente dai potenziali nelle altre componenti, chiaramente differente solo per una costante. Integrando si ottiene che una generica primitiva è data da

$$f(x,y) = 3(x^2+xy)^{1/3} + y^2 + c\,, \qquad c \in \mathbf{R}\,.$$



per cui un generico potenziale sarà dato da

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 3(x^2+xy)^{1/3} + y^2 + c_A & \qquad (x,y) \in A \\ f(x,y) &= 3(x^2+xy)^{1/3} + y^2 + c_B & \qquad (x,y) \in B \\ f(x,y) &= 3(x^2+xy)^{1/3} + y^2 + c_C & \qquad (x,y) \in C \\ f(x,y) &= 3(x^2+xy)^{1/3} + y^2 + c_D & \qquad (x,y) \in D \end{aligned}$$

dove A, B, C, D sono le quattro componenti connesse del dominio di F e c_A, c_B, c_C, c_D generiche costanti.