Teoremi della divergenza e di Stokes

Ultimo aggiornamento: 18 febbraio 2017

Vediamo in questo capitolo due risultati importanti riguardanti i campi di vettori. Il primo, il teorema della divergenza, è un risultato importante che vale in dimensione $n \geqslant 2$ e che noi vedremo solo in dimensione 2 e 3 e che estende in qualche senso il teorema fondamentale del calcolo integrale per funzioni di una variabile. Parallelamente a questo vedremo le formule di Gauss-Green in dimensione 2, sostanzialmente un modo diverso di vedere il teorema della divergenza in dimensione 2; il secondo, il teorema di Stokes, è un risultato che riguarda le superfici con bordo, ma che, come vedremo, altro non è che una versione del teorema della divergenza per superfici con bordo.

© Fabio Paronetto

1. Il teorema della divergenza e le formule di Gauss-Green

Prima di tutto definiamo l'operatore di divergenza: dato un campo di vettori $F : A \to \mathbf{R}^n$, A aperto di $\mathbf{R}^n$, si definisce divergenza di F la funzione ($x = (x_1, \dots x_n) \in A$)

$$\operatorname{div} F(x) := \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x).$$

Per il momento ci concentriamo nel caso $n = 2$ e cominciamo con il considerare un aperto limitato A di $\mathbf{R}^2$, che per semplicità considereremo connesso (ma la cosa vale anche se l'aperto è fatto di più componenti connesse) e con il definire, tra le due possibili scelte, un'orientazione privilegiata che chiameremo positiva.
Si supponga che la frontiera di A sia parametrizzata da

$$\gamma : [a, b] \to \partial A, \qquad \gamma(t) = (x(t), y(t)), \qquad \gamma \in C^1([a, b])\,. \tag{1}$$

Si consideri il vettore tangente

$$\tau\big(\gamma(t)\big) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$

e la normale unitaria esterna ad A, che indicheremo con $\nu\big(\gamma(t)\big)$.

Definizione 1.1. *Diremo che γ orienta positivamente o è un'orientazione positiva per ∂A se per ogni punto $x \in \partial A$ l'angolo tra il vettore $\tau(x)$ e il vettore $\nu(x)$ misurato in senso orario è $\pi/2$.*
A volte più intuitivamente si dice che percorrendo idealmente ∂A nel senso crescente del parametro ci si lascia l'insieme A a sinistra.
Diremo che γ è un'orientazione negativa per ∂A se non è positiva.

Vediamo di scrivere esplicitamente τ e ν: il versore tangente è dato da

$$\tau\big(\gamma(t)\big) = \frac{1}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \, \big(x'(t), y'(t)\big) \, .$$

Ricordando che la matrice di rotazione di un angolo ϑ (in senso antiorario) è data da

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

per trovare ν ruotiamo $\tau\big(\gamma(t)\big)$ in senso orario di $\pi/2$, cioè in senso antiorario di $3\pi/2$ o equivalentemente di $-\pi/2$, cioè moltiplichiamo τ per la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ottenendo il vettore

$$\nu\big(\gamma(t)\big) = \frac{1}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \, \big(y'(t), -x'(t)\big) \, .$$

Si osservi che non è possibile dire a priori se l'orientazione positiva è quella che percorre in senso orario o antiorario la frontiera di A: infatti una curva semplice e chiusa può essere la frontiera di due aperti diversi (uno il complementare dell'altro, bordo a parte), come mostrato in figura.

Osservazione 1.2. - Se γ fosse solo C^1 a tratti la definizione di orientazione è analoga, solo non potremmo definire tangente e normale per un numero finito di punti di ∂A.

© Fabio Paronetto

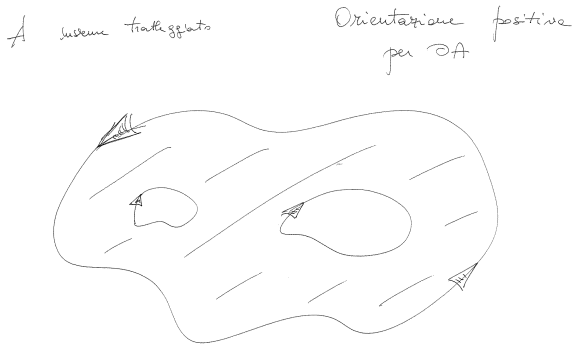


Figura 1

Dato A limitato indicheremo, in un integrale curvilineo di seconda specie, con ∂A^+ il fatto che ∂A è orientato positivamente, con ∂A^- il fatto che ∂A è orientato negativamente.

Vediamo ora le formule di Gauss-Green.

Lemma 1.3. *Siano A, B sottoinsiemi aperti di $\mathbf{R}^2$, $f : B \to \mathbf{R}$ con $\overline{A} \subset B$ e $f \in C^1(B)$. Allora*

se A è normale rispetto all'asse x vale

$$\iint_A \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dxdy = -\int_{\partial A^+} f(x,y)dx; \tag{GG1}$$

se A è normale rispetto all'asse y vale

$$\iint_A \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dxdy = \int_{\partial A^+} f(x,y)dy. \tag{GG2}$$

Dimostrazione - Vediamo per esempio la prima delle due formule, essendo le dimostrazioni analoghe. Sia

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, a < x < b\,, \varphi(x) < y < \psi(x)\}\,.$$

Se si valuta il primo dei due termini della formula si ha

$$\begin{aligned}\iint_A \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dxdy &= \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy\, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \\ &= \int_a^b \left[f(x,\psi(x)) - f(x,\varphi(x))\right] dx\,.\end{aligned}$$

Ora parametrizziamo con orientazione positiva ∂A con una curva γ data dalle quattro

$$\begin{aligned}
\gamma^{(1)}(t) &= \big(b, (1-t)\varphi(b) + t\psi(b)\big) && t \in [0.1],\\
\gamma^{(2)}(t) &= \big(b + a - t, \psi(b + a - t)\big) && t \in [a, b],\\
\gamma^{(3)}(t) &= \big(a, (1-t)\psi(a) + t\varphi(a)\big) && t \in [0.1],\\
\gamma^{(4)}(t) &= \big(t, \varphi(t)\big) && t \in [a, b].
\end{aligned}$$

Valutando il termine a destra in (GG1) si ha

$$\begin{aligned}
\int_{\partial A^+} f(x,y)\,dx &= \int_0^1 f\big(\gamma^{(1)}(t)\big)\dot\gamma_1^{(1)}(t)dt + \\
&\quad + \int_a^b f\big(\gamma^{(2)}(t)\big)\dot\gamma_1^{(2)}(t)dt + \\
&\quad + \int_0^1 f\big(\gamma^{(3)}(t)\big)\dot\gamma_1^{(3)}(t)dt + \\
&\quad + \int_a^b f\big(\gamma^{(4)}(t)\big)\dot\gamma_1^{(4)}(t)dt = \\
&= \int_a^b f\big(b + a - t, \psi(b + a - t)\big)(-1)dt + \int_a^b f\big(t, \varphi(t)\big)dt = \\
\big[s = b + a - t\big] \qquad &= -\int_a^b f\big(s, \psi(s)\big)ds + \int_a^b f\big(t, \varphi(t)\big)dt
\end{aligned}$$

il che conclude la verifica. □

Due casi particolari

1. Se consideriamo un campo di vettori $F : A \to \mathbf{R}^2$ e usiamo la formula (GG1) con $f = -F_1$, la formula (GG2) con $f = F_2$ e sommiamo le due uguaglianze così ottenute si ricava

(2)
$$\int_{\partial A^+} \big[F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy\big] = \iint_A \left[\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)\right] dxdy$$

SISTEMARE!!!

2. Se consideriamo un campo di vettori $F : A \to \mathbf{R}^2$ e usiamo la formula (GG1) con $f = F_2$, la formula (GG2) con $f = F_1$ e sommiamo le due uguaglianze così ottenute si ricava

(3)
$$\iint_A \operatorname{div} F(x,y)\,dxdy = \int_{\partial A^+} \big(F_1\,dy - F_2\,dx\big).$$

© Fabio Fagnetti

Vediamo ora come scrivere le formule di Gauss-Green in maniera alternativa. Supponiamo che la curva γ in (1) orienti positivamente ∂A. Possiamo allora scrivere

$$\begin{aligned}\int_{\partial A^+} f(x,y)\,dy &= \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)y'(t)dt = \\ &= \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\frac{y'(t)}{|\gamma'(t)|}\,|\gamma'(t)|\,dt = \\ &= \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\nu_1\big(\gamma(t)\big)\,|\gamma'(t)|\,dt = \\ &= \int_\gamma f\nu_1 ds.\end{aligned}$$

Si osservi che nell'ultima uguaglianza si legano due quantità: la prima è un integrale curvilineo di seconda specie, il secondo un integrale curvilineo di prima specie. In maniera analoga si può provare (e la dimostrazione viene lasciata per esercizio)

$$\int_{\partial A^+} f(x,y)\,dx = -\int_\gamma f\nu_2 ds.$$

Mettendo assieme queste due uguaglianze con (GG1) e (GG2) si ottengono

(GG1)-bis $$\iint_A \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dxdy = \int_\gamma f\nu_1\,ds,$$

(GG2)-bis $$\iint_A \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dxdy = \int_\gamma f\nu_2\,ds.$$

dove la prima vale se A è normale rispetto all'asse y e la seconda se A è normale rispetto all'asse x.

Un caso particolare - Se consideriamo un campo di vettori $F : A \to \mathbf{R}^2$ con A normale sia rispetto all'asse x che all'asse y (in modo tale che valgano entrambe (GG1) e (GG2)) e usiamo la formula (GG1)-bis con $f = F_1$, la formula (GG2)-bis con $f = F_2$ e sommiamo le due uguaglianze così ottenute si ricava

$$\iint_A \operatorname{div} F(x,y)\,dxdy = \int_{\partial A}\langle F,\nu\rangle\,ds \tag{4}$$

dove ν è la normale esterna ad A. Se A non è normale rispetto ad entrambi gli assi è possibile trovare una decomposizione di A fatta di

© Fabio Paronetto

insiemi normali rispetto ad entrambi gli assi, cioè

$$A = \bigcup_{j=1}^{N} A_j\,, \qquad A_j \text{ normale rispetto ad entrambi gli assi}$$

in modo tale che in ognuno degli insiemi A_j si possa utilizzare la formula (4). A questo punto, se indichiamo con $\nu^{(j)}$ la normale esterna all'insieme A_j, si può scrivere

$$\begin{aligned}\iint_A \operatorname{div} F(x,y)\,dxdy &= \iint_{\cup_{j=1}^N A_j} \operatorname{div} F(x,y)\,dxdy = \\ &= \sum_{j=1}^{N} \iint_{A_j} \operatorname{div} F(x,y)\,dxdy = \\ &= \sum_{j=1}^{N} \int_{\partial A_j} \langle F, \nu^{(j)}\rangle\,ds.\end{aligned}$$

Ora si osservi che scrivendo $\partial A_j = \big(\partial A_j \cap \partial A\big) \cup \big(\partial A_j \setminus (\partial A_j \cap \partial A)\big)$ si ha che

$$\sum_{j=1}^{N} \int_{\partial A_j \setminus (\partial A_j \cap \partial A)} \langle F, \nu^{(j)}\rangle\,ds = 0$$

per cui

$$\begin{aligned}\iint_A \operatorname{div} F(x,y)\,dxdy &= \sum_{j=1}^{N} \int_{\partial A_j} \langle F, \nu^{(j)}\rangle\,ds = \\ &= \sum_{j=1}^{N} \int_{\partial A_j \cap \partial A} \langle F, \nu^{(j)}\rangle\,ds = \\ &= \int_{\partial A} \langle F, \nu\rangle\,ds.\end{aligned}$$

Abbiamo così dimostrato il teorema della divergenza in dimensione 2, che ora enunciamo in dimensione 2 e 3. Prima abbiamo bisogno di definire una classe di insiemi sui quali il teorema sarà valido.

Diremo che un insieme $A \subset \mathbf{R}^2$ è *ammissibile* se è limitato e se ∂A è unione finita di curve chiuse C^1 a tratti.
Diremo che un insieme $A \subset \mathbf{R}^3$ è *ammissibile* se è limitato e se ∂A è unione finita di superfici regolari compatte o con bordo, le cui eventuali intersezione siano curve C^1 a tratti.
Alcuni esempi sono riportati in figura.

© Fabio Paroretto

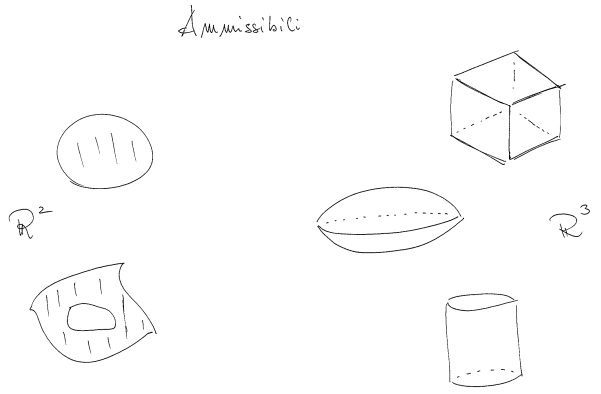


Figura 2

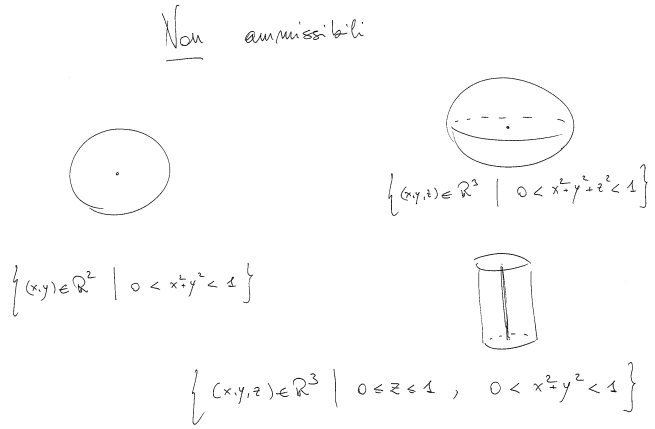


Figura 3

Se A è un insieme ammissibile chiameremo *flusso* del campo F attraverso ∂A l'integrale di linea

$$\int_{\partial A} \langle F, \nu \rangle \, ds \qquad \text{se } A \subset \mathbf{R}^2,$$

l'integrale di superficie

$$\iint_{\partial A} \langle F, \nu \rangle \, d\sigma \qquad \text{se } A \subset \mathbf{R}^3,$$

dove in entrambi i casi ν denota la normale esterna.

In generale si può considerare il flusso attraverso una qualunque curva anche se non è chiusa in $\mathbf{R}^2$, e attraverso una superficie, chiusa o con bordo, in $\mathbf{R}^3$, purché orientabile. L'importante è specificare in tal caso l'orientazione.

Definizione 1.4 (Flusso)**.** *Dati Γ curva in $\mathbf{R}^2$, A aperto di $\mathbf{R}^2$ contenente Γ ed $F : A \to \mathbf{R}^2$ campo di vettori, si denota con*

$$\int_\Gamma \langle F, \nu \rangle \, ds$$

il flusso di F attraverso Γ orientata con l'orientazione ν (che a questo punto sarà una delle due possibili normali).
Dati S superficie orientabile in $\mathbf{R}^2 = 3$, A aperto di $\mathbf{R}^3$ contenente S ed $F : A \to \mathbf{R}^3$ campo di vettori, si denota con

$$\int_S \langle F, \nu \rangle \, d\sigma$$

il flusso di F attraverso S orientata con l'orientazione ν (che sarà una delle due possibili normali).

Si osservi come è fondamentale che la superficie sia orientabile: se non lo fosse potrebbe non aver senso scegliere una normale (si veda la definizione di superficie orientabile e l'esempio fatto di superficie non orientabile).

Teorema 1.5 (della divergenza)**.** *Siano A un insieme aperto ammissibile di $\mathbf{R}^2$ ed $F : B \to \mathbf{R}^2$, $F \in C^1(B)$, B aperto di $\mathbf{R}^2$ contenente $\overline{A}$, ν la normale esterna ad A. Allora*

$$\iint_A \operatorname{div} F(x, y) \, dxdy = \int_{\partial A} \langle F, \nu \rangle \, ds.$$

Siano A un insieme aperto ammissibile di $\mathbf{R}^3$ ed $F : B \to \mathbf{R}^3$, $F \in C^1(B)$, B aperto di $\mathbf{R}^3$ contenente $\overline{A}$, ν la normale esterna ad A. Allora

$$\iiint_A \operatorname{div} F(x, y, z) \, dxdydz = \iint_{\partial A} \langle F, \nu \rangle \, d\sigma.$$

Dimostrazione - La prima uguaglianza è stata dimostrata sopra. La seconda non la vediamo. □

Commenti - Anche se ci siamo limitati agli enunciati in dimensione 2 e 3 è bene sapere che il teorema appena visto vale in dimensione arbitraria $n \geqslant 2$, solo bisogna dare un senso all'integrale sul bordo (cosa che noi non faremo).

© Fabio Paronetto

La prima uguaglianza lega l'integrale della divergenza con un integrale di linea, un integrale curvilineo di prima specie, la seconda, in dimensione 3, lega l'integrale della divergenza con un integrale di superficie.

Se si volesse vedere in dimensione 1 qual è il risultato analogo a quello appena visto è sufficiente osservare che la divergenza di una funzione $F : (a, b) \to \mathbf{R}$ non è altro che $F'(x)$. L'analogo delle formule (GG1)-bis, (GG2)-bis o del teorema della divergenza è il teorema fondamentale del calcolo integale

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a).$$

2. Qualche applicazione

Usando le formule di Gauss-Green (e quindi solo in dimensione 2) è possibile calcolare integrali due-dimensionali risolvendo in realtà un integrale curvilineo di seconda specie. Vediamone un esempio.

Esempio - Calcoliamo l'area dell'insieme $E = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1 \right\}$.

È possibile scegliere un campo che abbia divergenza 1 cosicché, usando la formula (3),

$$|E| = \iint_E \mathrm{div} F(x, y)\, dxdy = \int_{\partial E^+} (F_1 dy - F_2 dx).$$

Se scegliamo $F(x, y) = (x, 0)$ e parametrizziamo ∂E con $\gamma(t) = (a\cos t, b\,\mathrm{sen}\, t)$ otteniamo che

$$|E| = \int_0^{2\pi} a\cos t\, b\cos t\, dt = ab\pi.$$

Lo stesso accade se si considera il campo $F(x, y) = (\alpha\, x, (1 - \alpha)y)$ con α un qualunque numero reale.

Esercizio 2.1. - Calcoliamo l'area della corona circolare

$$C = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, r^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant R^2 \right\}.$$

∂C è fatto di due curve disgiunte, se vogliamo orientare positivamente ∂C dobbiamo considerare le due curve

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (R\cos t, R\,\mathrm{sen}\, t) \qquad \text{con } t \in [0, 2\pi], \\ \eta(t) &= (r\cos t, -r\,\mathrm{sen}\, t) \qquad \text{con } t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

© Fabio Paronetto

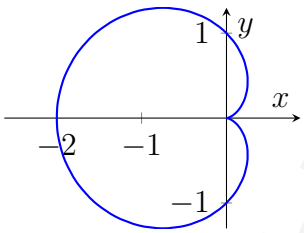
Scegliendo, ad esempio, il campo $F(x,y) = (x/2, y/2)$, che ha divergenza 1, si ha

$$\begin{aligned} |C| &= \iint_C \mathrm{div} F(x,y)\, dxdy = \int_{\partial C^+} (F_1 dy - F_2 dx) = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} R^2 \cos^2 t + \frac{1}{2} R^2 \mathrm{sen}^2 t\right] dt + \\ &\quad - \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} r^2 \cos^2 t + \frac{1}{2} r^2 \mathrm{sen}^2 t\right] dt = \pi R^2 - \pi r^2. \end{aligned}$$

Esercizio 2.2. - Calcoliamo ora l'area dell'insieme A il cui bordo è la cardioide parametrizzata da

$$\gamma(\vartheta) = \big((1-\cos\vartheta)\cos\vartheta, (1-\cos\vartheta)\,\mathrm{sen}\,\vartheta\big).$$

In questo caso il calcolo diretto dell'area presuppone di poter scrivere l'insieme come normale e questo non è semplice. Utilizzando le formule di Gauss-Green calcolare l'area di tale insieme risulta molto più semplice. La curva γ orienta positivamente ∂A (rappresentata in figura) per cui

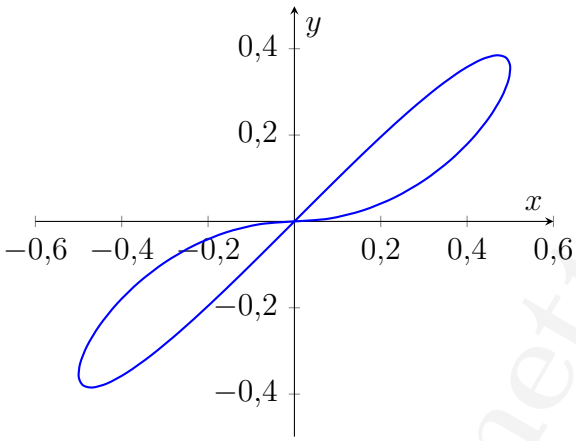


$$\begin{aligned} |A| &= \int_{\partial A^+} \Big(\frac{x}{2}\, dy - \frac{y}{2}\, dx\Big) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \big[(1-\cos\vartheta)\cos\vartheta\,[\mathrm{sen}^2\vartheta + (1-\cos\vartheta)\cos\vartheta] + \\ &\qquad - (1-\cos\vartheta)\,\mathrm{sen}\,\vartheta[\mathrm{sen}\,\vartheta\cos\vartheta - (1-\cos\vartheta)\,\mathrm{sen}\,\vartheta]\big] d\vartheta = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \big(1 + \cos^2\vartheta - 2\cos\vartheta\big) d\vartheta = \frac{3}{2}\pi. \end{aligned}$$

Esercizio 2.3. - Si calcoli l'area dell'insieme A che ha come bordo il sostegno della curva (rappresentata in figura)

$$\gamma(\vartheta) = \left(\mathrm{sen}\,\vartheta\cos\vartheta, \cos\vartheta\,\mathrm{sen}^2\vartheta\right), \qquad \vartheta \in [0,\pi]\,.$$

© Fabio Paronetto



Se si usa la parametrizzazione data e si sceglie, ad esempio, il campo $F(x, y) = (0, y)$, calcolando

$$\int_0^{\pi} \cos\vartheta \operatorname{sen}^2\vartheta(\cos^2\vartheta - \operatorname{sen}^2\vartheta)\, d\vartheta$$

si ottiene zero. Chiaramente l'area non può essere zero. Il risultato è dovuto al fatto che la porzione di ∂A che sta nel primo quadrante è orientata positivamente da γ, mentre la parte che si trova nel terzo quadrante è orientata negativamente. Se si vuole trovare l'area di A bisogna calcolare (farlo per esercizio)

$$2\int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \operatorname{sen}^2\vartheta(\cos^2\vartheta - \operatorname{sen}^2\vartheta)\, d\vartheta.$$

Esercizio 2.4. - Ovviamente usando le formule di Gauss-Green si possono calcolare anche altri integrali, non solo aree. Ad esempio volendo calcolare

$$\iint_E (x^2 - y^2)dxdy$$

dove $E = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$ si può considerare

$$F(x, y) = \left(\frac{x^3}{3} - x\, y^2, 0\right)$$

e usando (3) l'integrale che si vuole calcolare diventa

$$\int_{\partial E^+} \left(\frac{x^3}{3} - x\, y^2\right) dy\,.$$

© Fabio Paronetto

Parametrizzando ∂E con $\gamma(t) = (a\cos t, b\,\mathrm{sen}\, t)$ otteniamo

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{a^3 \cos^3 t}{3} - ab^2 \cos t\, \mathrm{sen}^2 t \right) (b\cos t) dt = \pi \frac{ab}{4}(a^2 - b^2).$$

Esercizio 2.5. - Il teorema della divergenza può essere utile anche per calcolare flussi: attraverso curve in dimensione 2, attraverso superfici, sia compatte che con bordo, in dimensione 3. Vediamone un esempio. Si trovi il flusso del campo

$$F(x, y, z) = \left(z^2 \cosh y, x^{\sqrt{z^4 + \log(x+5)}}, y \right)$$

attraverso la superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geqslant 0\}$$

orientata in modo tale che la normale abbia la terza componente positiva.

Un modo di ricavare il flusso richiesto è il seguente: si scelgano ora un qualunque aperto A e una superficie con bordo Σ tali che

$$\partial A = S \cup \Sigma$$

e la normale esterna ad A mantenga l'orientazione prefissata su S. Allora

$$\iint_S \langle F, \nu \rangle d\sigma = \iiint_A \mathrm{div}\, F dx dy dz - \iint_\Sigma \langle F, \nu \rangle d\sigma \tag{5}$$

Se gli integrali che stanno a destra in (5) sono di più semplice risoluzione rispetto al termine di sinistra si può risparmiare un po' di fatica.
Nel nostro caso, poiché la divergenza di F è nulla, per trovare il flusso attraverso S sarà sufficiente trovare il flusso attraverso Σ. Poiché Σ è arbitraria la possiamo scegliere in modo tale da rendere il calcolo il più semplice possibile. È quel che accade se scegliamo

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant 1, z = 0\}.$$

In questo modo la normale esterna ad A su Σ risulta essere $\nu = (0, 0, -1)$, per cui

$$\iint_S \langle F, \nu \rangle d\sigma = -\iint_\Sigma \langle F, \nu \rangle d\sigma = \iint_C y\, dx dy = 0$$

dove $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

Un campo che ha divergenza nulla è detto *solenoidale*. Per i campi solenoidali valutare il flusso attraverso una superficie con bordo può essere semplificato "completando" tale superficie con un'altra scelta

© Paolo Piaretto

opportunamente in modo da rendere l'unione delle due una superficie chiusa, e quindi il bordo di un insieme limitato.

Esercizio 2.6. - Si calcoli il flusso del campo $F(x,y) = (-y, x)$ attraverso la curva

$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, y + x^2 - 4 = 0\,, y \geqslant 0\}$$

orientata in modo tale che la normale abbia la seconda componente positiva.

Visto che il campo è solenoidale si ha che il flusso richiesto può essere calcolato valutando il flusso attraverso un'altra curva che unita a Γ sia il bordo di un insieme limitato.
Si osservi che scegliendo

$$\eta(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t), \qquad t \in [\pi, 2\pi]$$

il campo F è ortogonale in ogni punto alla normale al sostegno di η. Di conseguenza il flusso è nullo.

Esercizio 2.7. - Ovviamente il fatto che la divergenza di un campo sia nulla non significa che il flusso attraverso una superficie con bordo sia nullo (sicuramente è nullo se la superficie è chiusa, cioè il bordo di un insieme aperto limitato). Ad esempio il campo $F(x,y,z) = (1,0,0)$ attraverso il disco

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, z^2 + y^2 \leqslant 1, x = 0\}$$

orientato in modo che la normale sia $(1,0,0)$ è π.

3. Il teorema di Stokes

Dato un campo di vettori $F : A \to \mathbf{R}^3$ con A aperto di $\mathbf{R}^3$ definiamo *rotore* di F il campo

$$\operatorname{rot} F := \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

Un campo il cui rotore è il vettore nullo è detto *irrotazionale*, come già visto precedentemente.

Si osservi come, dato un campo G da $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}^3$, il suo rotore è a sua volta un campo. Tale campo è a divergenza nulla, cioè

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} G) = 0\,.$$

© Fabio Paronetto

Consideriamo una superficie regolare con bordo e orientabile

$$\varphi : K \to \mathbf{R}^3,$$

K compatto e connesso, $S = \varphi(K)$. Supponiamo che ∂K sia fatto di N curve chiuse parametrizzate da $\gamma^{(j)} : [a_j, b_j] \to \mathbf{R}^2$, $j = 1, \dots N$, cioè ∂K è l'unione dei sostegni di tutte le $\gamma^{(j)}$. Diciamo che le curve $\varphi \circ \gamma^{(j)} : [a_j, b_j] \to \mathbf{R}^3$ orientano positivamente ∂S, e scriveremo ∂S^+, se $\gamma^{(j)} : [a_j, b_j] \to \mathbf{R}^2$ orientano positivamente ∂K. Nella figura che segue è riportato un esempio dove $N = 2$ ed è mostrata l'orientazione positiva.

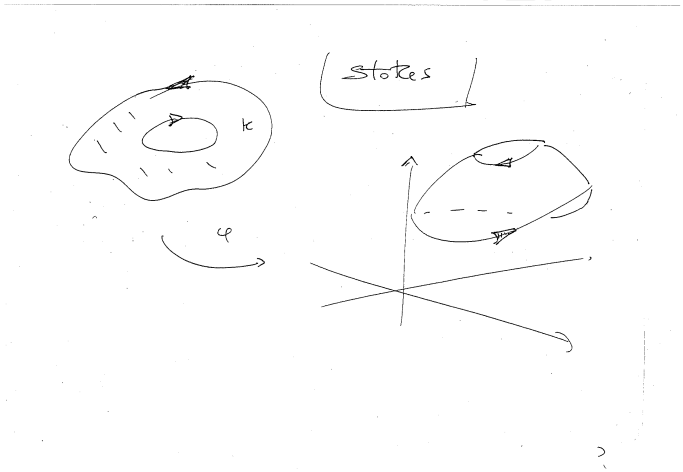


Figura 4

Teorema 3.1 (Stokes)**.** *Data S come sopra, superficie regolare con bordo e orientabile, con $\varphi \in C^2(K)$, si ha*

$$\iint_S \langle \operatorname{rot} F, \nu \rangle d\sigma = \int_{\partial S^+} (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz)$$

dove $\nu = \dfrac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|}$.

Osservazione 3.2. - Si osservi che ritroviamo il fatto che se un campo è irrotazione, cioè ha rotore uguale a $(0, 0, 0)$, ed è definito in un insieme semplicemente connesso di $\mathbf{R}^3$, ritroviamo che il lavoro di una campo F su un cammino chiuso (in questo caso solo in $\mathbf{R}^3$) è nullo.

Dimostrazione - Diamo un cenno della dimostrazione per vedere quale sia il legame di questo teorema con quanto visto precedentemente.

Se si valuta

$$\iint_S \langle \operatorname{rot} F, \nu \rangle d\sigma$$

dopo avere considerato una parametrizzazione $\varphi : A \to \mathbf{R}^3$ di S (A aperto di $\mathbf{R}^2$) si ottiene

$$\iint_A \Big\langle \operatorname{rot} F\big(\varphi(u,v)\big), \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|}(u,v) \Big\rangle |\varphi_u \wedge \varphi_v|(u,v)\, dudv = \\ = \iint_A \big\langle \operatorname{rot} F\big(\varphi(u,v)\big), \varphi_u \wedge \varphi_v(u,v) \big\rangle\, dudv\,.$$

Se ora si sceglie il campo vettoriale $G : A \to \mathbf{R}^2$,

$$G(u,v) := \Big(\big\langle F\big(\varphi(u,v)\big), \varphi_u(u,v) \big\rangle, \big\langle F\big(\varphi(u,v)\big), \varphi_v(u,v) \big\rangle \Big)$$

si può verificare (il conto è semplice, ma qui lo omettiamo) che (usando il fatto che φ è di classe C^2)

$$\big\langle \operatorname{rot} F\big(\varphi(u,v)\big), \varphi_u \wedge \varphi_v(u,v) \big\rangle = \frac{\partial G_2}{\partial u}(u,v) - \frac{\partial G_1}{\partial v}(u,v)$$

per cui usando le formule di Gauss-Green (equivalenti al teorema della divergenza) si ottiene

$$\begin{aligned} \iint_S \langle \operatorname{rot} F, \nu \rangle d\sigma &= \iint_A \big\langle \operatorname{rot} F\big(\varphi(u,v)\big), \varphi_u \wedge \varphi_v(u,v) \big\rangle\, dudv = \\ &= \iint_A \left[\frac{\partial G_2}{\partial u}(u,v) - \frac{\partial G_1}{\partial v}(u,v) \right] dudv = \\ &= \int_{\partial A^+} (G_1 du + G_2 dv)\ . \end{aligned}$$

Infine andando a valutare questo termine si ottiene (con qualche calcolo) che

$$\int_{\partial A^+} (G_1 du + G_2 dv) = \int_{\partial S^+} (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz)\,.$$

Si osservi come nel passaggio da S ad A si usino le formule di Gauss-Green. Il teorema di Stokes quindi non è altro che l'analogo del teorema della divergenza o delle formule di Gauss-Green per le superfici. □

Esempio 3.3. - Il fatto che l'insieme in cui è definito il campo sia semplicemente connesso impedisce ad un cammino chiuso di chiudersi attorno ad una curva Γ tale che $\mathbf{R}^3 \setminus \Gamma$ non sia semplicemente connesso. Cosa succede se il rotore di un campo è uguale a $(0,0,0)$, ma il dominio nel quale è definito il campo non è semplicemente connesso? Chiaramente il flusso del rotore attraverso una qualunque superficie è zero, quindi sarà nullo anche il lavoro (complessivo) in ∂S. Attenzione però! Se la superficie ha un bordo fatto da due cammini, come in Figura 4, questo significa che la somma dei lavori compiuti dal campo lungo i due cammini (orientati positivamente) è nullo, ma questo non significa che il lavoro compiuto dal campo lungo uno dei due cammini sia nullo. Il seguente esempio chiarisce questo fatto. Si consideri il dominio

$$\mathbf{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x = y = 0\},$$

© Fabio Paronetto

insieme nel quale è definito il campo, già studiato,

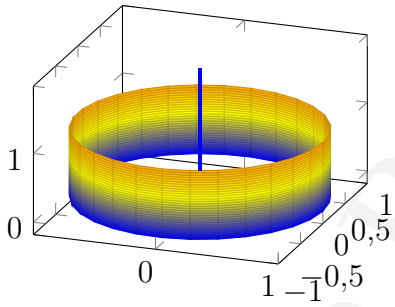
$$F(x,y,z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$$

il quale ha rotore nullo. Se si considera la superficie

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2+y^2 = 1, 0 \leqslant z \leqslant 1\},$$

si ha ovviamente che $\iint_S \langle \operatorname{rot} F, \nu \rangle d\sigma = 0$. Questo non è in contraddizione con quanto osservato precedentemente: infatti il bordo di questa superficie è composto da due curve chiuse disgiunte sulle quali l'orientazione è opposta, come nell'esempio mostrato in Figura 4.

Figura 5



Di conseguenza il flusso del rotore attraverso questa superficie è nullo non perché il lavoro sui singoli bordi sia nullo, ma perché i due lavori si compensano, essendo uguali in valore assoluto, ma con segno opposto. Infatti in uno dei due bordi (quello orientato positivamente) il lavoro è 2π come visto nell'Esempio 1.11 del capitolo **Campi**, nell'altro è -2π.

© Fabio Paronetto