

Curve

Iniziamo lo studio delle funzioni di più variabili, in generale funzioni di k variabili e a valori in $\mathbf{R}^n$, cioè

$$f : A \subset \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^n,$$

con il caso più semplice, cioè con le curve. Tale studio ci permetterà di sviluppare strumenti e concetti utili per un approccio sistematico al caso generale. Il caso delle curve è quello in cui $k = 1$.

1. CURVE E CURVE REGOLARI

Si consideri un intervallo I di $\mathbf{R}$. Chiameremo curva una funzione $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$.

Si osservi che ciò è equivalente a considerare n funzioni $\gamma_1, \dots, \gamma_n : I \rightarrow \mathbf{R}$ e a descrivere il punto $\gamma(t)$ in $\mathbf{R}^n$ come $(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$.

Definizione 1.1 (sostegno di una curva). *Si chiama sostegno di una curva $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ l'immagine di I tramite γ .*

Si supponga di avere $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ e che il suo sostegno $\gamma(I)$ sia $\Gamma \subset \mathbf{R}^n$. Qualche volta si usa impropriamente il termine *curva* indicando l'insieme Γ di $\mathbf{R}^n$ e non la curva come l'abbiamo definita, cioè la funzione γ , ma questo sarà chiaro dal contesto. In questi casi si sottointende che andrà trovata una *parametrizzazione* per Γ , cioè un intervallo $I \subset \mathbf{R}$ e una funzione γ definita in I il cui sostegno sarà Γ .

Se con il termine curva possiamo confondere la parametrizzazione e il sostegno, la stessa confusione non deve essere fatta tra sostegno di una curva, che è un sottoinsieme di $\mathbf{R}^n$, e grafico di una curva, che invece è un sottoinsieme di $\mathbf{R}^{n+1}$. Vediamo ora alcuni esempi che ci aiuteranno a capire meglio.

Esempi 1.2. - 1. Dati due punti $x, y \in \mathbf{R}^2$, cioè $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ con $x_i, y_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2$, la funzione $r : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$ definita da

$$r(t) = x + t(y - x)$$

ha come sostegno il segmento che unisce il punto x al punto y .
Il segmento sostegno di r viene spesso denotato con la scrittura $[x, y]$.

Se si considera la funzione $\tilde{r} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ definita

$$\tilde{r}(t) = x + t(y - x)$$

si ha che il sostegno di $\tilde{r}$ è una retta, in particolare la retta passante per i punti x e y .

Altro modo di definire la stessa retta è assegnare un punto per il quale si vuole far passare la retta ed un vettore. Ad esempio, fissati z punto di $\mathbf{R}^n$ e v vettore di $\mathbf{R}^n$ si può definire una retta come segue

$$\hat{r} = z + tv, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Scegliendo $z = x$ e il vettore $v := y - x$ la funzione $\hat{r}$ altro non è che la retta $\tilde{r}$ definita precedentemente.

Ci sono molti (infiniti) modi di parametrizzare una curva; in particolare anche un segmento. Ad esempio se scegliamo $x = (-1, -1)$ e $y = (1, 1)$ le tre curve

$$\begin{aligned} r_1 : [0, 1] &\rightarrow \mathbf{R}^2, & r_1(t) &= (-1, -1) + t((1, 1) - (-1, -1)) = (2t - 1, 2t - 1), \\ r_2 : [-1, 1] &\rightarrow \mathbf{R}^2, & r_2(t) &= (t, t), \\ r_3 : [-1, 1] &\rightarrow \mathbf{R}^2, & r_3(t) &= (t^3, t^3), \end{aligned}$$

parametrizzano lo stesso segmento, il segmento che unisce i punti $(-1, -1)$ e $(1, 1)$ e che con la nostra notazione indichiamo con $[(-1, -1), (1, 1)]$.

2. Si fissi $r > 0$. La curva

$$\begin{array}{ccc} \sigma_1 : [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ t & \mapsto & (r \cos t, r \sin t) \end{array}$$

ha come sostegno una circonferenza di raggio r centrata nell'origine. Si verifichi che $(\sigma_1(t))^2 + (\sigma_2(t))^2 = r^2$.

3. Si fissi $r > 0$. La curva

$$\begin{array}{ccc} \sigma_2 : [0, \pi] & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ t & \mapsto & (r \cos 2t, r \sin 2t) \end{array}$$

ha come sostegno una circonferenza di raggio r centrata nell'origine. Si verifichi che $(\sigma_1(t))^2 + (\sigma_2(t))^2 = r^2$.

4. Si fissi $r > 0$. La curva

$$\begin{array}{ccc} \sigma_3 : [0, 6\pi] & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ t & \mapsto & (r \cos t, r \sin t) \end{array}$$

ha come sostegno la stessa circonferenza dell'esempio 2.

5. Si fissino $a, b > 0$. La curva (il cui sostegno è in Figura 2.a per $a = 4, b = 2$)

$$\begin{array}{ccc} \sigma_4 : [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ t & \mapsto & (a \cos t, b \sin t) \end{array}$$

ha come sostegno l'ellisse data dal luogo di zeri $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

6. Si fissino $a, b > 0$. La curva (il cui sostegno è in Figura 2.b per $a = 1, b = 1$)

$$\begin{array}{ccc} \sigma_5 : [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ t & \mapsto & (a \cosh t, b \sinh t) \end{array}$$

ha come sostegno l'iperbole data dal luogo di zeri $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, x > 0$.

Figura 1 - Sostegno di σ_1, σ_2 e σ_3 (con $r = 1$)

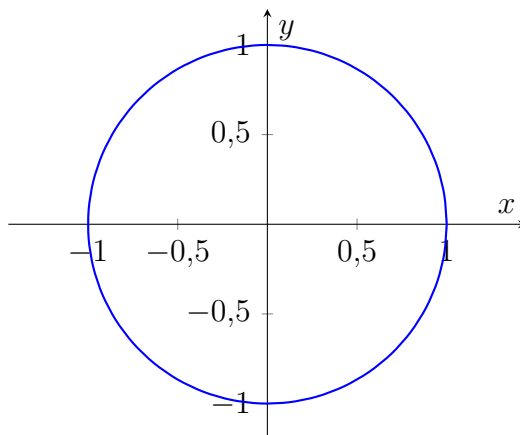


Figura 1

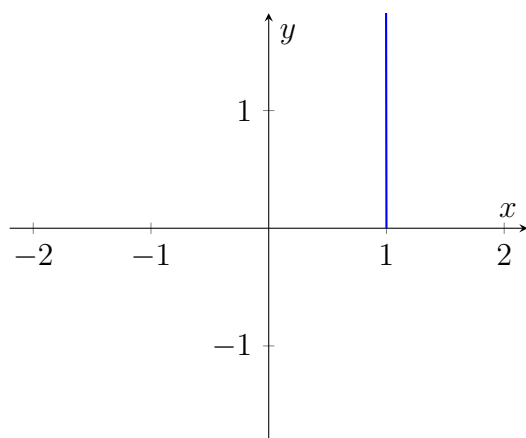
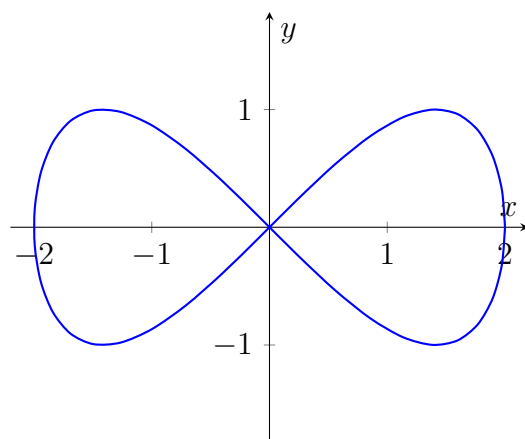
Figura 1 - Sostegno di σ_1 , σ_2 e σ_3 (con $r = 1$)

Figura 2.a

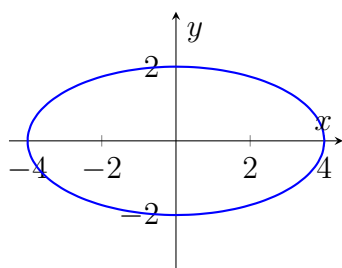
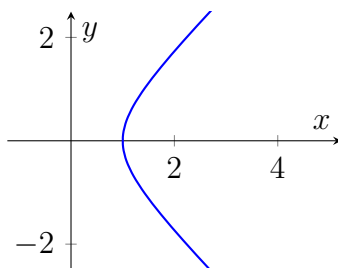


Figura 2.b



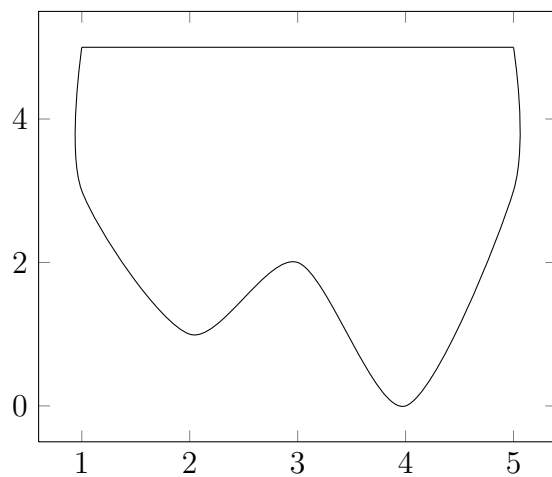
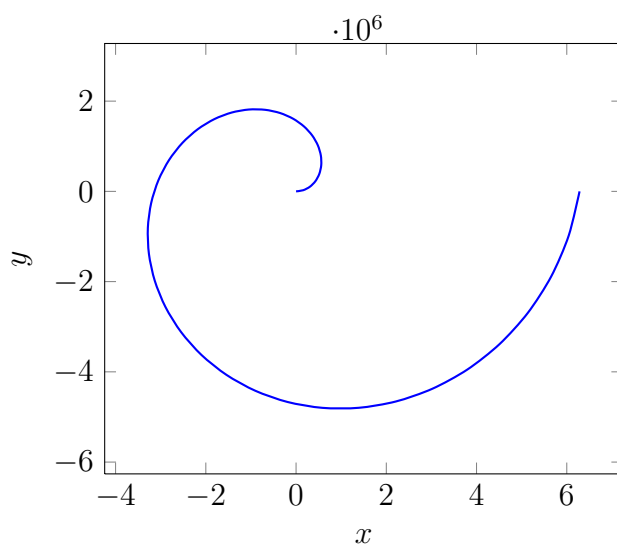
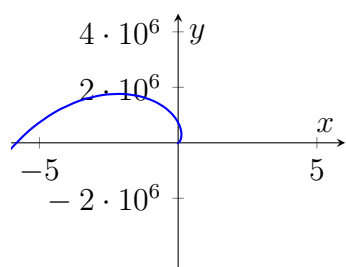


Figura 2.a



Osservazione 1.3. - Si osservi come curve che hanno lo stesso sostegno, come ad esempio una circonferenza come quella evidenziata nella figura di sopra nel caso di σ_1 , σ_2 e σ_3 , possono essere definite in domini diversi (come nel caso di σ_1 e σ_2 o anche r_1 e r_2) e avere grafici diversi, come nel caso di σ_1 e σ_3 . Si vedano a tal proposito le due figure successive.

Figura 3 - Elica cilindrica - Immagine di σ_1 e di σ_2 (con $r = 1$)

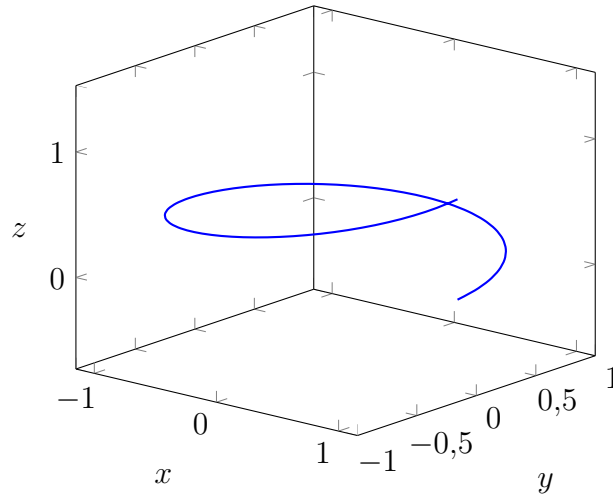
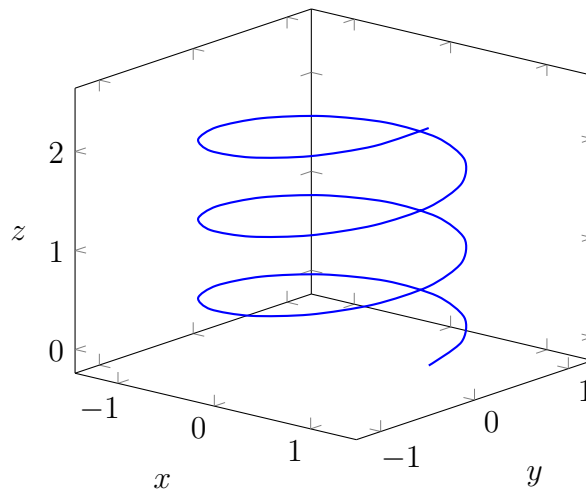
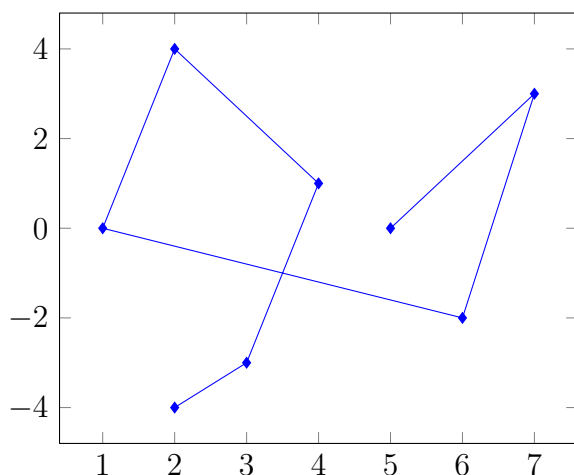


Figura 4 - Elica cilindrica - Immagine di σ_3 (con $r = 1$)



Poligonale - Giacché stiamo facendo degli esempi introduciamo anche una curva che richiameremo spesso in seguito: dati k punti (ordinati) $x_0, x_1, \dots, x_k$ in $\mathbf{R}^n$ chiamiamo poligonale l'unione (ordinata) dei segmenti $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, k$ e la denoteremo con $P(x_0, x_1, \dots, x_k)$. Ad esempio, dati i punti nel piano $x_0 = (2, -4), x_1 = (3, -3), x_2 = (4, 1), x_3 = (2, 4), x_4 = (1, 0), x_5 = (6, -2), x_6 = (7, 3), x_7 = (5, 0)$, la poligonale che unisce, nell'ordine, $x_0, x_1, \dots, x_7$ è la curva il cui sostegno è nella figura che segue.

Figura 5 - Esempio di poligonale



Un modo, ma ce ne sono diversi, per descrivere parametricamente una poligonale che unisce k punti, è il seguente:

$$\gamma : [0, k] \rightarrow \mathbf{R}^n, \quad \gamma(t) = \begin{cases} x_0 + t(x_1 - x_0) & t \in [0, 1], \\ x_1 + (t-1)(x_2 - x_1) & t \in [1, 2], \\ x_2 + (t-2)(x_3 - x_2) & t \in [2, 3], \\ \vdots & \\ x_{k-1} + (t-k+1)(x_k - x_{k-1}) & t \in [k-1, k]. \end{cases}$$

EX - Trovare un'altra parametrizzazione per la poligonale.

Curve cartesiane - Altri esempi di curve, già note, sono tutti i grafici di funzioni di una variabile reale e a valori in $\mathbf{R}$ che possono essere visti come una curva (e viceversa: una curva cartesiana può essere vista come un grafico).

Data una funzione $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ dove I è un intervallo di $\mathbf{R}$ si può considerare la curva $\gamma(t) := (t, f(t))$ con $t \in I$. Una curva così definita è

a volte detta curva cartesiana per sottolineare che è un grafico, cioè il sostegno di γ coincide con il grafico di f .

Si osservi che queste curve sono curve in $\mathbf{R}^2$, cioè nel piano.

Un esempio è riportato nelle figure che seguono, dove dapprima abbiamo il grafico della funzione $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $f(x) = \sin x$ che può anche pensato come il sostegno della curva $\gamma(t) := (t, \sin(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$, poi abbiamo il grafico di γ , che sarà un sottoinsieme di $\mathbf{R}^3$ e non di $\mathbf{R}^2$!

Ovviamente anche la curva $\eta : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ definita da $\eta(t) = (f(t), t)$ è una curva cartesiana.

Figura 6

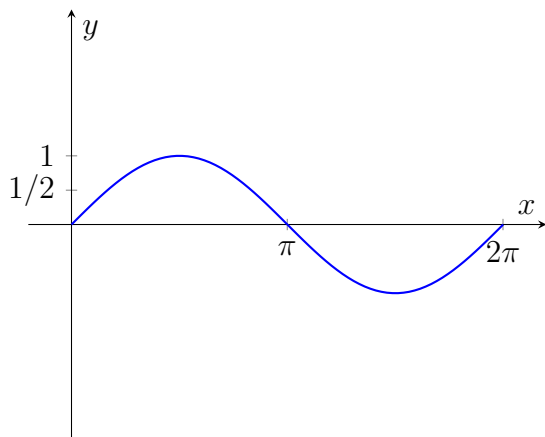


Figura 6

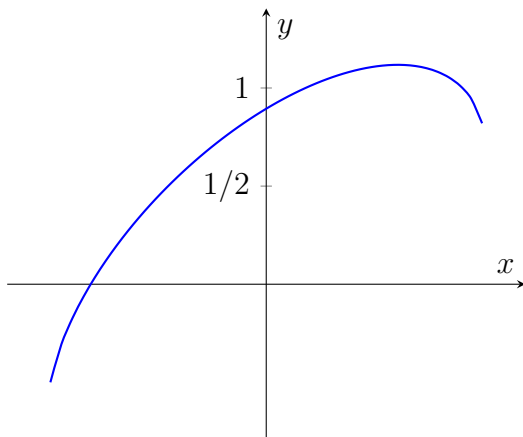
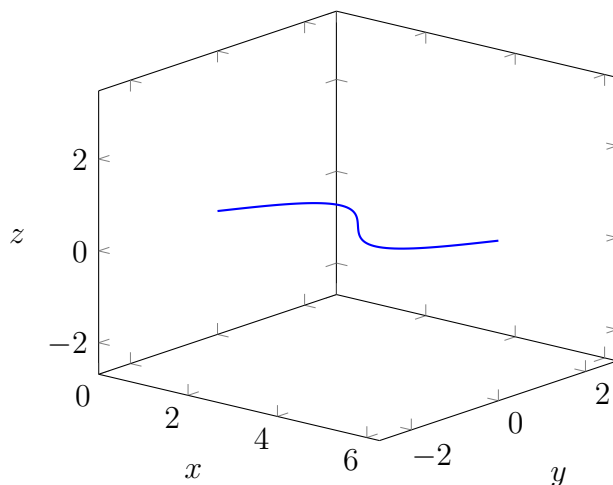


Figura 7



Avremo spesso a che fare con curve continue o regolari, almeno a tratti. Andiamo quindi a definire questi concetti per funzioni a valori vettoriali. Cominciamo dalla nozione di limite.

Definizione 1.4 (limite). *Dati I intervallo di $\mathbf{R}$, $t_o \in I$, $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbf{R}^n$ e $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$, diremo che*

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_o \\ t \in I}} \gamma(t) = l$$

se

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_o \\ t \in I}} |\gamma(t) - l| = 0.$$

Nella definizione di limite scrivendo anche $t \in I$ quando scriviamo $\lim_{t \rightarrow t_o}$ per sottolineare che t deve appartenere all'insieme di definizione di γ . Se per esempio I fosse $[a, b)$ e t_o fosse a tale limite si ridurrebbe a $\lim_{t \rightarrow a^+} \gamma(t)$.

D'ora in poi, per semplicità, scriveremo soltanto $\lim_{t \rightarrow t_o}$ sottintendendo però che $t \in I \ni t_o$.

Osservazione 1.5. - Si osservi che $|\gamma(t) - l|^2 = (\gamma_1(t) - l_1)^2 + \dots + (\gamma_n(t) - l_n)^2$. Di conseguenza

$$\lim_{t \rightarrow t_o} |\gamma(t) - l| = 0 \quad \text{se e solo se} \quad \lim_{t \rightarrow t_o} \gamma_i(t) = l_i \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, n.$$

Osservazione 1.6. - Tutte le proprietà che valgono per i limiti di funzioni di una variabile e a valori scalari vale anche per le funzioni di una variabile e a valori vettoriali (unicità del limite, limite della somma di due funzioni, ...).

Come conseguenza della Definizione 1.4 abbiamo la definizione di continuità in un punto t_o per una curva definita in $I \ni t_o$.

Definizione 1.7 (continuità). *Diremo che una curva $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}$ è continua in $t_o \in I$, I intervallo di $\mathbf{R}$ non necessariamente aperto, se*

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_o \\ t \in I}} \gamma(t) = \gamma(t_o).$$

Definizione 1.8 (derivata). *Dati $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$, I intervallo (non necessariamente aperto) di $\mathbf{R}$, e $t_o \in I$, diremo che γ è derivabile nel punto t_o se esiste come vettore di $\mathbf{R}^n$ il limite*

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_o \\ t \in I}} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_o)}{t - t_o}$$

che denoteremo con $\gamma'(t_o)$. Diremo che è derivabile in I se lo è in ogni punto di I . Diremo che è $C^1(I)$ se è derivabile e la sua derivata è continua in I . Diremo che è $C^k(I)$ se è derivabile k volte e la sua derivata k -esima è continua in I .

Un commento alla definizione: che esista il limite suddetto significa, come abbiamo già visto, che esistano i seguenti n limiti:

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_o \\ t \in I}} \frac{\gamma_i(t) - \gamma_i(t_o)}{t - t_o} \quad i = 1, \dots, n.$$

Che tale limite sia un vettore di $\mathbf{R}^n$ significa che ognuno di questi limiti è l_i numero reale (cioè il limite di sopra esiste ed è finito).

Inoltre nel caso in cui I fosse l'intervallo chiuso $[a, b]$ e t_o fosse a , γ è derivabile in a se esiste semplicemente la derivata destra.

Un po' di nomenclatura - Diremo che una curva $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ è

regolare se $\gamma \in C^1(I)$ con $|\gamma'(t)| \neq 0$ per ogni $t \in I$;

regolare a tratti se possiamo decomporre I in sottointervalli disgiunti I_i con $i = 1, \dots, k$ in modo tale che γ sia regolare in I_i per ogni $i = 1, \dots, k$;

cioè, se ad esempio $I = [a, b]$, se esistono $t_1, \dots, t_k \in (a, b)$ con $t_1 < \dots <$

t_k , tale che γ è regolare in $[a, t_1]$, $[t_k, b]$, $[t_i, t_{i+1}]$ con $i = 1, \dots, k-1$ e $|\gamma'(t)| = 0$ (al più) per $t \in \{t_1, \dots, t_k\}$;

C^1 **a tratti** se, supposto che $I = [a, b]$, esistono $t_1, \dots, t_k \in (a, b)$ con $t_1 < \dots < t_k$, tale che γ è $C^1([a, t_1])$, $C^1([t_k, b])$, $C^1([t_i, t_{i+1}])$ con $i = 1, \dots, k-1$ e $\gamma'(t)$ non esiste al più per $t \in \{t_1, \dots, t_k\}$;

semplice se $t_1 \neq t_2$ implica $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$, con almeno uno dei due punti t_1 o t_2 interno ad I (cioè può capitare che $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ solo se t_1 e t_2 sono gli estremi dell'intervallo I);
altrimenti: se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ ristretta all'intervallo (a, b) risulta iniettiva;

chiusa se $I = [a, b]$ e se $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Osservazione 1.9. - Facciamo notare la differenza tra curva regolare a tratti e C^1 a tratti: una curva regolare a tratti è comunque C^1 e in alcuni punti ha (o potrebbe avere) il modulo della derivata uguale a zero; una curva C^1 a tratti ha (o potrebbe avere) in alcuni punti derivata discontinua.

L'esempio in Figura 5 è una C^1 a tratti, non semplice.

L'esempio 1.2.2 è invece una curva semplice. Infatti anche se $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$, 0 e 2π non sono punti interni all'intervallo di definizione. Tale curva invece risulta chiusa.

In generale una curva semplice o è iniettiva oppure, se non lo è, è chiusa.

La curva r_3 nell'Esempio 1.2.1 non è regolare, perché entrambe le componenti di $r'_3(t) = (3t^2, 3t^2)$ si annullano per $t = 0$. Poco male: è regolare a tratti. Tale curva, che come sostegno ha il segmento $[(-1, -1), (1, 1)]$, può essere parametrizzata in altro modo in maniera da renderla regolare (ad esempio, le curve r_1 e r_2 nello stesso esempio).

Un altro esempio è dato dalla curva $\sigma_6 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ definita da $\sigma_6(t) = (t(t-1), t(t-1)(2t-1))$ il cui sostegno (o meglio, una parte del sostegno, visto che è illimitato) è mostrato in Figura 8. Si osservi che

$$\sigma'_6(t) = (2t-1, 6t^2-6t+1)$$

per cui si ha $|\sigma'_6(t)| \neq 0$ per ogni t . Infatti

$$2t - 1 = 0 \quad \text{per } t = \frac{1}{2},$$

$$6t^2 - 6t + 1 = 0 \quad \text{per } t = \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{12} \text{ e per } t = \frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{12},$$

di conseguenza le due componenti di σ'_6 non si annullano mai contemporaneamente. Tale curva è regolare, non chiusa, non semplice.

Se si restringe il dominio di σ_6 a $[0, 1]$ e si considera $\sigma_7 : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\sigma_7(t) = (t(t-1), t(t-1)(2t-1))$, si ottiene una curva chiusa e semplice. Si veda il sostegno di σ_7 in Figura 9.

Figura 8 - Sostegno di σ_6

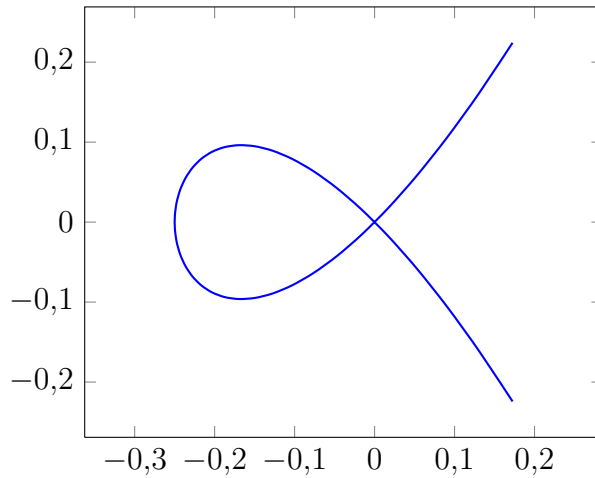
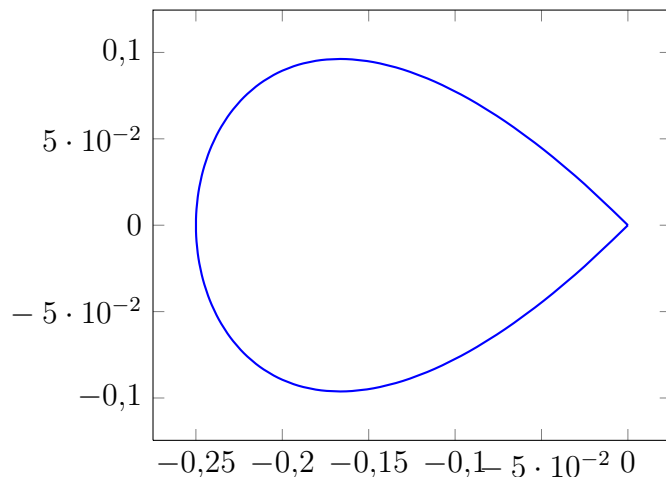


Figura 9 - Sostegno di σ_7 

Questi primi esempi fanno capire come curve diverse parametrizzino uno stesso insieme o viceversa come uno stesso insieme possa essere parametrizzato in più modi diversi. Introduciamo di conseguenza la seguente definizione.

Definizione 1.10 (Curve equivalenti). *Due curve $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ e $\tilde{\gamma} : J \rightarrow \mathbf{R}^n$ si dicono equivalenti se esiste una funzione $\alpha : J \rightarrow I$ di classe $C^1(I)$ tale che $\alpha'(t) \neq 0$ per ogni $t \in J$ e*

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\alpha(t)), \quad \text{per ogni } t \in J.$$

La mappa α viene anche chiamata cambiamento di parametro o di variabile o riparametrizzazione ammissibile.

Commento - Il fatto che $\alpha'(t) \neq 0$ per ogni $t \in J$ (α' è continua!) implica che $\alpha'(t) > 0$ per ogni $t \in J$ oppure che $\alpha'(t) < 0$ per ogni $t \in J$. In particolare α è una biiezione tra J e I .

Si supponga di avere due curve equivalenti: se il cambio di variabile è tale che $\alpha'(t) > 0$ per ogni t diremo che le due curve hanno la stessa orientazione, nel caso in cui invece $\alpha'(t) < 0$ per ogni t diremo che hanno orientazione opposta. Possiamo così mettere una relazione d'equivalenza sull'insieme delle curve dicendo che due curve sono equivalenti se esiste un cambiamento di variabile ammissibile.

All'interno della stessa classe possiamo distinguere due sottoclassi, parlando così di curve orientate.

Da qui l'ambiguità del termine curva di cui si è parlato all'inizio del

paragrafo. Mettendo in relazione tutte le curve che sono equivalenti tra loro si mettono di fatto in relazione tutte le curve che hanno lo stesso sostegno.

Vediamo un esempio: ognuna delle due curve σ_1 e σ_2 degli esempi 2. e 3. è una riparametrizzazione dell'altra. Per esempio, considerando prima σ_2 possiamo riparametrizzarla e ottenere σ_1 considerando

$$\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow [0, \pi], \quad \alpha(t) = \frac{t}{2}$$

e così ottenere $\sigma_1(t) = \sigma_2(\alpha(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Viceversa potremmo considerare

$$\beta : [0, \pi] \rightarrow [0, 2\pi], \quad \beta(t) = 2t$$

e riparametrizzare σ_1 ottenendo $\sigma_2(t) = \sigma_1(\beta(t))$, $t \in [0, \pi]$. Si osservi che $\beta = \alpha^{-1}$ e viceversa.

Le curve σ_1 e σ_2 hanno la stessa orientazione e facilmente si può verificare che α' e β' sono positive.

Se si considerasse il cambio di variabile

$$\delta : [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi], \quad \delta(t) = 2\pi - t$$

si ha che la curva

$$\tilde{\sigma}_1 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad \tilde{\sigma}_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_1(\delta(t))$$

ha lo stesso sostegno di σ_1 , è semplice e chiusa come lo è σ_1 , ma ha orientazione opposta. Si osservi che $\delta'(t) \equiv -1$. Spesso quando si ha a che fare con curve nel piano, cioè curve a valori in $\mathbf{R}^2$, si distinguono le due orientazioni in oraria e antioraria.

EX - Trovare due cambiamenti di variabile (diversi da quelli proposti di seguito), uno con derivata prima positiva ed uno con derivata prima negativa, tra i due intervalli $[a, b]$ e $[c, d]$.

La funzione

$$\alpha : [a, b] \rightarrow [c, d], \quad \frac{1}{b-a}((b-t)c + (t-a)d) = \frac{(bc - ad + t(d-c))}{b-a}$$

è un cambio di variabile con derivata positiva. Per trovarne uno con derivata negativa è sufficiente invertire i ruoli di c e d . Si ottiene quindi

$$\beta : [a, b] \rightarrow [c, d], \quad \frac{1}{b-a}((b-t)d + (t-a)c) = \frac{(bd - ac + t(c-d))}{b-a}.$$

Questi sono due funzioni lineari (o affini), ma ovviamente una qualunque funzione di classe C^1 , strettamente crescente da $[a, b]$ a $[c, d]$ e con

derivata mai nulla è un possibile cambio di variabile tra i due intervalli.

Coordinate polari - Ricordiamo le coordinate polari, che dovrebbero essere già note. Sono coordinate per descrivere punti in $\mathbf{R}^2$. Dato $\rho \in [0, +\infty)$ e $\vartheta \in [0, 2\pi)$ possiamo descrivere, alternativamente alla coordinate cartesiane, un punto P nel piano con la coppia (ρ, ϑ) . Il punto si individua intersecando una semiretta con una circonferenza, la semiretta è quella uscente dall'origine che si ottiene ruotando in senso antiorario la semiretta delle ascisse positive di un angolo ϑ ; la circonferenza è quella dei punti che distano ρ dall'origine, come mostrato in Figura 10.

Figura 10

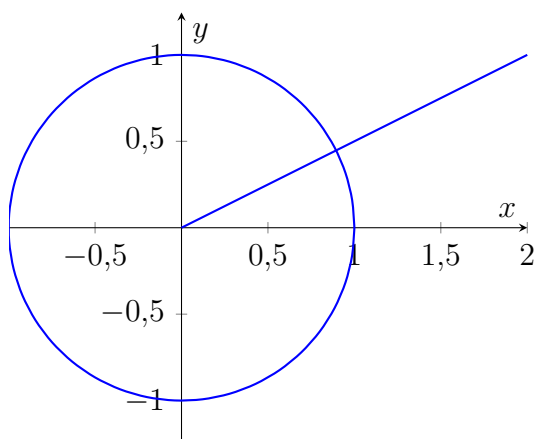
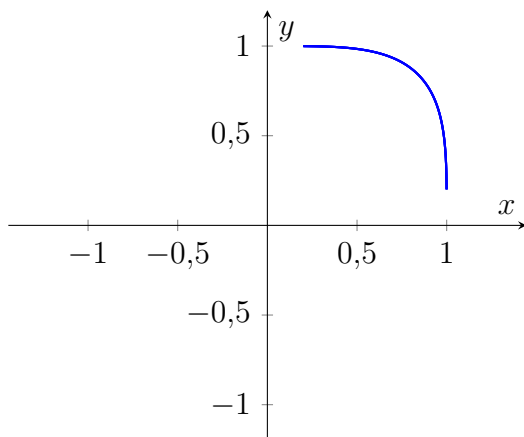


Figura 1 - Sostegno di σ_1 , σ_2 e σ_3 (con $r = 1$)



Per passare dalla rappresentazione polare (ρ, ϑ) a quella cartesiana (x, y) è sufficiente considerare

$$x(\rho, \vartheta) = \rho \cos \vartheta, \quad y(\rho, \vartheta) = \rho \sin \vartheta.$$

Per il viceversa ricordiamo che

$$\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \vartheta(x, y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{se } x > 0, y \geq 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0, y > 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \pi & \text{se } x < 0, y \geq 0, \\ \frac{3}{2}\pi & \text{se } x = 0, y < 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2\pi & \text{se } x < 0, y < 0. \end{cases}$$

L'espressione di ϑ si trova osservando che il punto

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

ha modulo 1, per cui sta sulla circonferenza di raggio 1. Esisterà quindi un angolo $\vartheta \in [0, 2\pi)$ tale che

$$\cos \vartheta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \vartheta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

A questo punto si conclude osservando che

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} = \frac{y}{x}.$$

Forma polare - Un modo alternativo per descrivere una curva nel piano (e solo nel piano!) è la forma polare. Si usano le coordinate polari $\rho \in [0, +\infty)$ e $\vartheta \in [0, 2\pi)$ descrivendo uno dei due parametri in funzione dell'altro, tipicamente ρ in funzione di ϑ , cioè è data una funzione $f : [\vartheta_1, \vartheta_2] \rightarrow [0, +\infty)$ e la curva è descritta implicitamente da

$$(1) \quad \rho = f(\vartheta) \quad \text{con } \vartheta \in [\vartheta_1, \vartheta_2].$$

È possibile passare dalla rappresentazione in forma parametrica alla forma polare e viceversa usando i cambi di variabile ricordati sopra.

Esempio 1.11. - Consideriamo le curve espresse in forma polare da

$$(2) \quad \rho = 2a \cos \vartheta + h.$$

Per $h = 2a$ abbiamo la curva chiamata cardioide (si veda la Figura 11); la cuspid è nell'origine e corrisponde a $\vartheta = \pi$. Per $h > 2a$ la curva in Figura 11.b, per $h < 2a$ la curva in Figura 11.c.

Supponiamo di volerla scrivere in maniera esplicita rispetto ad un parametro: poiché $x(\rho, \vartheta) = \rho \cos \vartheta$ e $y(\rho, \vartheta) = \rho \sin \vartheta$ e poiché conosciamo anche ρ in termini di ϑ si avrà che x e y dipendono di fatto solo da ϑ come segue

$$x(\vartheta) = f(\vartheta) \cos \vartheta \quad \text{e} \quad y(\vartheta) = f(\vartheta) \sin \vartheta.$$

Quindi la curva parametrizzata (rispetto al parametro ϑ) sarà

$$(3) \quad x(\vartheta) = 2a \cos^2 \vartheta + h \cos \vartheta, \quad y(\vartheta) = 2a \cos \vartheta \sin \vartheta + h \sin \vartheta.$$

Per cui $\gamma(\vartheta) = (x(\vartheta), y(\vartheta))$ con $\vartheta \in [0, 2\pi]$ descrive la stessa curva indicata in (2).

Provando a ritroso si ha che $x^2(\vartheta) + y^2(\vartheta) = (2a \cos \vartheta + 2a)^2$ (abbiamo scelto $h = 2a$), per cui

$$\rho(\vartheta) = 2a \cos \vartheta + 2a.$$

EX - Si scriva in forma polare la curva $\gamma(t) = (t^2 \cos t, t^2 \sin t)$ con $t \in [0, +\infty)$, disegnata parzialmente in Figura 12.

Figura 11.a - Cardioide

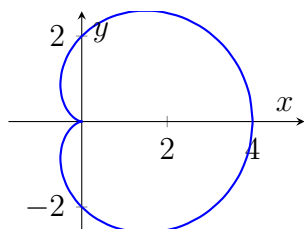


Figura 11.b

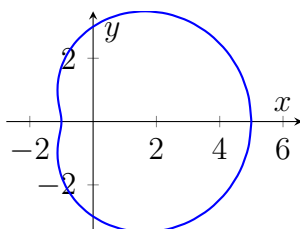


Figura 11.c

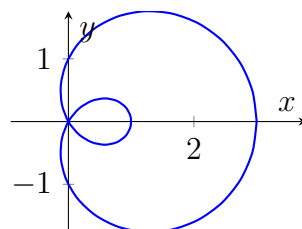
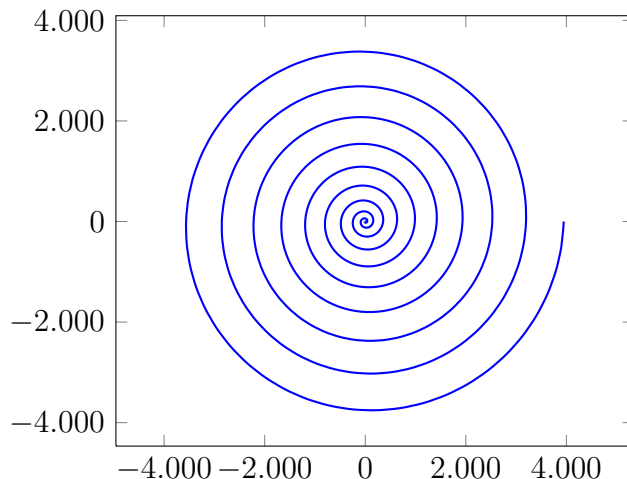


Figura 12



2. CURVE COME LUOGHI DI ZERI DI FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

Inseriamo in questo capitolo una piccola parentesi anticipando l'uso di funzioni di più variabili, che sarà forse più chiaro quando ne parleremo, ma che può essere utile ad una migliore comprensione dell'argomento che stiamo trattando.

Le curve possono essere espresse non solo in maniera parametrica, e quindi esplicita, ma anche implicitamente come intersezione di superfici o ipersuperfici.

L'esempio più semplice può essere il seguente: una curva nel piano espressa come luogo di zeri di una funzione $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$. Si osservi che il grafico di f è un sottoinsieme di $\mathbf{R}^3$, se f è regolare tale grafico è una superficie (che sarà definita precisamente più avanti). Indicando con x, y, z nell'ordine le tre variabili di $\mathbf{R}^3$, con x, y le due variabili da cui dipende f e che metteremo abitualmente nel piano orizzontale e z la variabile nell'asse verticale, si osservi come considerare il luogo degli zeri di f

$$f(x, y) = 0$$

è equivalente a considerare l'intersezione tra le due superfici

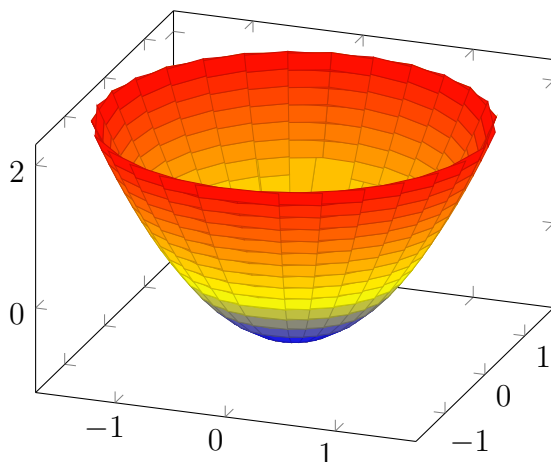
$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ z = 0 \end{cases}$$

Ad esempio la circonferenza in Figura 1 può essere vista come il luogo degli zeri della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ il cui grafico è mostrato

in Figura 13. Si noti che ciò è equivalente a considerare la funzione $\tilde{f}(x, y) = x^2 + y^2$ ed intersecarne il grafico con il piano $z = 1$

$$\begin{cases} z = \tilde{f}(x, y) \\ z = 1 \end{cases}$$

Figura 13 - Paraboloide



Più in generale possiamo intersecare $\tilde{f}(x, y) = x^2 + y^2$ con un piano inclinato: si ottiene (si può ottenere) un'ellisse (cosa si ottiene se il piano è verticale?). Un piano che è grafico di una funzione da $p : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $p(x, y) = ax + by + d$ è espresso come $z = ax + by + d$, $a, b, d \in \mathbf{R}$. Più in generale può essere visto come luogo di zeri di una funzione di tre variabili a valori in $\mathbf{R}$, cioè $q : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$, $q(x, y, z) = ax + by + cz + d = 0$, $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. In questo caso contempliamo più casi, perché i piani verticali, ottenuti considerando $c = 0$, non possono essere visti come grafici di una funzione come p .

Verifichiamo che il paraboloide ha come intersezione con un piano $z = ax + by + d$ un'ellisse se d è abbastanza grande. Considerando il sistema

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = ax + by + d \end{cases}$$

si ottiene

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = d + \frac{a^2 + b^2}{4} = \frac{4d + a^2 + b^2}{4}$$

che rappresenta una circonferenza di raggio r , dove r^2 è $(4d + a^2 + b^2)/4$, se $d > -\frac{a^2 + b^2}{4}$. Tale circonferenza è la proiezione sul piano xy dell'ellisse

che cerchiamo. Ora possiamo parametrizzare l'ellisse che cerchiamo come segue: le prime due componenti saranno quelle che descrivono la circonferenza appena ottenuta. La curva sarà quindi

$$\gamma(t) = \left(\frac{a}{2} + r \cos t, \frac{b}{2} + r \sin t, \dots \right), \quad t \in [0, 2\pi].$$

La terza componente, quella lungo l'asse z , può essere espressa usando l'espressione $x^2 + y^2$ oppure $ax + by + d$ dal momento che debbono essere uguali affinché i punti che γ descrive vogliano stiano sull'ellisse, per cui l'ellisse sarà parametrizzata da

$$\gamma(t) = \left(\frac{a}{2} + r \cos t, \frac{b}{2} + r \sin t, \left(\frac{a}{2} + r \cos t \right)^2 + \left(\frac{b}{2} + r \sin t \right)^2 \right), \quad t \in [0, 2\pi].$$

3. INTEGRALE DI UNA FUNZIONE A VALORI VETTORIALI

Data una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ poniamo per definizione

$$\int_a^b \gamma(t) dt := \left(\int_a^b \gamma_1(t) dt, \int_a^b \gamma_2(t) dt, \dots, \int_a^b \gamma_n(t) dt \right)$$

dove $\gamma_i : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ è la i -esima componente di γ . Per tale integrale valgono molte delle proprietà che valgono per l'integrale di funzioni scalari (ad esempio la linearità). Fra le altre vediamo due in modo particolare: la prima si mostra facilmente usando l'analogo teorema per funzioni scalari, la seconda è un po' più delicata, ma la dimostrazione si rifà sempre ad un calcolo per funzioni scalari.

Teorema 3.1 (Teorema fondamentale del calcolo integrale). *Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ è una curva di classe C^1 vale*

$$\int_a^b \gamma'(t) dt = \gamma(b) - \gamma(a).$$

Lemma 3.2. *Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ è integrabile (cioè lo è per componenti) allora*

$$\left| \int_a^b \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

4. LUNGHEZZA DI UNA CURVA

Data una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ si dice *suddivisione* di $[a, b]$ un insieme finito di punti $\mathcal{T} = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_k\}$ tale che

$$a = t_0 < t_1 < t_2 \cdots < t_{k-1} < t_k = b.$$

Ad una suddivisione possiamo far corrispondere una poligonale $P(\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_k))$ inscritta alla curva γ e di vertici i punti $\gamma(t_i)$, $i = 0, 1 \dots k$ come rappresentato in Figura 14. Definiamo la lunghezza della poligonale $P(\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_k))$, e la denoteremo con $l(\gamma, \mathcal{T})$, come segue:

$$l(\gamma, \mathcal{T}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^k |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|.$$

Ricordando che $[x, y]$ denota il segmento che unisce x e y la somma di sopra altro non è che la somma delle lunghezze di tutti i segmenti $[\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)]$.

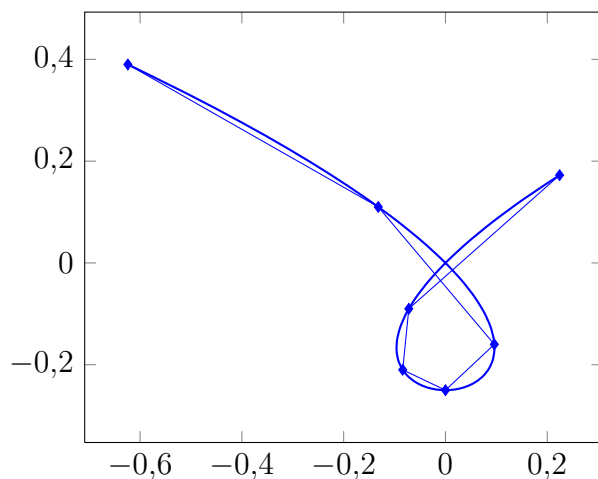
Date due suddivisioni $\mathcal{T}$ e $\mathcal{S}$ diremo che $\mathcal{S}$ è più fine di $\mathcal{T}$ se

$$\mathcal{S} \supset \mathcal{T}.$$

Si prova facilmente (**EX**) che $\mathcal{S}$ è più fine di $\mathcal{T}$ si ha

$$l(\gamma, \mathcal{T}) \leq l(\gamma, \mathcal{S}).$$

Figura 14



Definizione 4.1 (lunghezza di una curva). *Si definisce lunghezza di una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ la quantità*

$$(4) \quad l(\gamma; [a, b]) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{ l(\gamma, \mathcal{T}) \mid \mathcal{T} \text{ suddivisione di } [a, b] \},$$

cioè l'estremo superiore al variare di tutte le suddivisioni di $[a, b]$ delle lunghezze delle poligonali inscritte alla curva γ . Nel caso in cui tale quantità è finita diremo che la curva è rettificabile. Se chiaro dal contesto qualche volta scriveremo semplicemente $l(\gamma)$ anziché $l(\gamma; [a, b])$.

Attenzione! Nemmeno una curva continua e definita su di un intervallo compatto ha necessariamente lunghezza finita. Infatti $l(\gamma; [a, b])$ può essere $+\infty$, quindi non tutte le curve sono rettificabili (continueremo a denotare con $l(\gamma; [a, b])$ la lunghezza anche nel caso questa sia $+\infty$). A conferma di ciò si consideri la curva in Figura 15 definita da

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad \gamma(t) = \left(t, t \cos \left(\frac{\pi}{t} \right) \right).$$

Prendendo la particolare suddivisione decrescente

$$\mathcal{T}_m := \{t_0 = 1, t_1, t_2, \dots, t_m\}$$

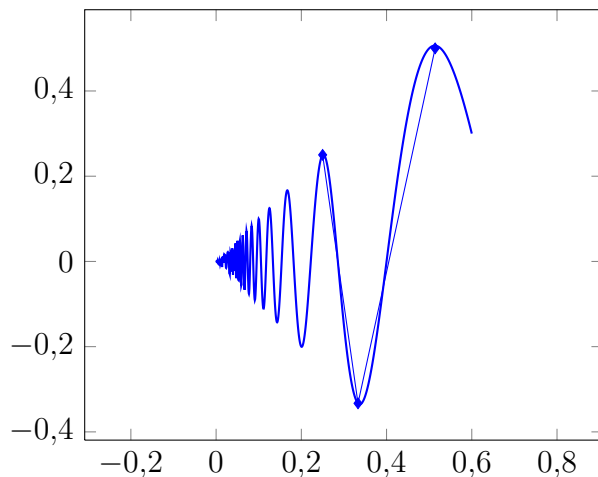
con $1 > t_1 > t_2 > \dots > t_m$ e t_j scelto in modo tale che

$$\cos \left(\frac{\pi}{t_j} \right) = 1 \quad \text{se } j \text{ dispari}, \quad \cos \left(\frac{\pi}{t_j} \right) = -1 \quad \text{se } j \text{ pari},$$

cioè $t_j = \frac{1}{j+1}$, si verifica facilmente che

$$\begin{aligned} l(\gamma, \mathcal{T}_m) &= \sum_{j=1}^m |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| = \sum_{j=1}^m \left| \frac{1}{j+1} \cos((j+1)\pi) - \frac{1}{j} \cos(j\pi) \right| = \\ &= \sum_{j=1}^m \left| \frac{1}{j+1} + \frac{1}{j} \right| \geq \sum_{j=1}^m \frac{1}{j} \end{aligned}$$

Figura 15



per cui passando all'estremo superiore su tutte le suddivisioni si ha

$$l(\gamma) \geq l(\gamma, \mathcal{T}_m) \geq \sum_{j=1}^m \frac{1}{j}$$

e poiché ciò vale per ogni $m \in \mathbf{N}$ possiamo passare al limite e ottenere

$$l(\gamma) \geq \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^m \frac{1}{j} = +\infty.$$

Proposizione 4.2. *Dati $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ e $a, b, c \in I$ con $a < b < c$ si ha che*

$$l(\gamma; [a, c]) = l(\gamma; [a, b]) + l(\gamma; [b, c]).$$

Senza dimostrazione -

Proposizione 4.3. *Siano $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$, I, J due intervalli e $\alpha : J \rightarrow I$ un cambio di parametro ammissibile (cioè di classe C^1 e $\alpha'(t) \neq 0$ per ogni $t \in J$). Allora $l(\gamma; I) = l(\gamma \circ \alpha; J)$.*

Dimostrazione - È sufficiente osservare che data una suddivisione $\{t_0, t_1, \dots, t_k\}$ di I l'insieme $\{\alpha^{-1}(t_0), \alpha^{-1}(t_1), \dots, \alpha^{-1}(t_k)\}$ è una suddivisione di J . $\square$

Il seguente teorema è un risultato interessante perché fornisce una tecnica, perlomeno in molti casi, per calcolare esplicitamente l'estremo superiore (4).

Teorema 4.4. Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ una curva C^1 . Allora

$$l(\gamma; [a, b]) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Osservazione 4.5. - In realtà è sufficiente che la curva sia C^1 a tratti. Sia ad esempio $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ $C^1([a, c])$ e $C^1([c, b])$ con $c \in (a, b)$. Allora usando la Proposizione 4.2 ci si può limitare a calcolare $l(\gamma; [a, c])$ e $l(\gamma; [c, b])$ e sommare queste due quantità. Poiché negli intervalli $[a, c]$ e $[c, b]$ γ risulta C^1 usando il teorema appena enunciato si ottiene che

$$l(\gamma; [a, b]) = \int_a^c |\gamma'(t)| dt + \int_c^b |\gamma'(t)| dt.$$

A tal proposito si veda anche l'Esercizio 5.3.

Dimostrazione del Teorema 4.4 - Come si fa spesso mostriamo che valgono due disuguaglianze opposte, da cui avremo l'uguaglianza. Cominciamo con il mostrare che $l(\gamma; [a, b]) \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt$. Data una poligonale P inscritta a γ associata ad una suddivisione $\mathcal{T} = \{t_0, t_1, \dots, t_k\}$ di $[a, b]$ si ha che (usando il Teorema 3.1 e il Lemma 3.2

$$|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| = \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t) dt \right| \leq \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'(t)| dt$$

Sommando su tutti gli indici j si ha

$$l(\gamma; \mathcal{T}) = \sum_{j=1}^k |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \leq \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'(t)| dt = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

e passando all'estremo superiore su tutte le poligonali si ottiene

$$l(\gamma; [a, b]) \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Per mostrare la disuguaglianza opposta si fissi $\varepsilon > 0$ arbitrariamente. Poiché ogni componente di γ' è uniformemente continua in $[a, b]$ (teorema di Heine-Cantor) si può trovare $\delta = \delta(\varepsilon)$ tale che se $|t - s| < \delta$ si ha $|\gamma'(t) - \gamma'(s)| < \varepsilon$. Scegliendo quindi una suddivisione $\mathcal{T} = \{t_0, t_1, \dots, t_k\}$ tale che $|t_j - t_{j-1}| < \delta$ per ogni $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ in particolare si ha

$$(5) \quad |\gamma'(t) - \gamma'(t_{j-1})| < \varepsilon \quad \text{per ogni } j \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

Di conseguenza integrando si ottiene

$$(6) \quad \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'(t)| dt \leq \int_{t_{j-1}}^{t_j} (|\gamma'(t_{j-1})| + \varepsilon) dt = (|\gamma'(t_{j-1})| + \varepsilon)(t_j - t_{j-1})$$

Stimiamo ora la quantità $|\gamma'(t_{j-1})|(t_j - t_{j-1})$: usando 5 si ottiene

$$\begin{aligned} |\gamma'(t_{j-1})|(t_j - t_{j-1}) &= \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t_{j-1}) dt \right| = \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t) + (\gamma'(t_{j-1}) - \gamma'(t)) dt \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t) dt \right| + \varepsilon(t_j - t_{j-1}). \end{aligned}$$

Usando questa stima in (6) e sommando (6) su j si ottiene

$$\begin{aligned} \int_a^b |\gamma'(t)| dt &\leq \sum_{j=1}^k \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t) dt \right| + 2\varepsilon(b-a) = \\ &= \sum_{j=1}^k |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| + 2\varepsilon(b-a) = \\ &= l(\gamma, \mathcal{T}) + 2\varepsilon(b-a) \leq l(\gamma; [a, b]) + 2\varepsilon(b-a). \end{aligned}$$

Poiché la quantità $2\varepsilon(b-a)$ è arbitraria per l'arbitrarietà di ε si conclude che $\int_a^b |\gamma'(t)| dt \leq l(\gamma; [a, b])$. $\square$

Esercizio 4.6. - Calcoliamo la lunghezza della curva $\gamma : [0, a] \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\gamma(t) = (t, t^2/2)$. Poiché la curva è C^1 è sufficiente calcolare $\int_0^1 |\gamma'(t)| dt$. Si osservi che γ è una curva cartesiana, cioè $\gamma(t) = (t, f(t))$ con f funzione di una variabile reale e a valori reali. Calcolando il modulo della derivata si ha

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{1 + (f'(t))^2}.$$

che è l'espressione generale per $|\gamma'(t)|$ nel caso di curve cartesiane. Nel nostro caso $f(t) = t^2/2$ e si ha

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{1 + t^2}.$$

L'integrale, usando il cambio di variabile $t = \sinh x$ (ricordiamo che $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$), diventa

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= \int_0^a \sqrt{1 + t^2} dt = \int_0^{\log(a + \sqrt{1+a^2})} \cosh^2 x dx = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\log(a + \sqrt{1+a^2})} (e^{2x} + e^{-2x} + 2) dx = \\ &= \frac{1}{8} (a + \sqrt{1+a^2})^2 - \frac{1}{8} (a + \sqrt{1+a^2})^{-2} + \frac{1}{2} \log(a + \sqrt{1+a^2}). \end{aligned}$$

EX - Calcolare la lunghezza della curva cartesiana $t \mapsto (1, \sqrt{t})$ con $t \in [0, a^2]$.

5. PARAMETRO D'ARCO O ASCISSA CURVILINEA

Abbiamo già notato che alcune curve possono avere modulo della derivata nullo in qualche punto e che possono esistere parametrizzazioni diverse di uno stesso insieme, alcune regolari e altre che magari lo sono solo a tratti (si veda l'Esempio 1.2.1 nel primo paragrafo, funzioni r_2 e r_3).

Ora vedremo come esiste una maniera standard di parametrizzare una data una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ in modo tale che il modulo della derivata sia sempre uguale ad 1.

Data γ regolare a tratti definiamo la quantità

$$s(t) = \int_a^t |\gamma'(\sigma)| d\sigma, \quad s : [a, b] \rightarrow [0, l(\gamma; [a, b])].$$

Questa quantità esprime la lunghezza dell'arco di curva tra a e t e non è altro che $l(\gamma; [a, t])$. Si osservi che la funzione s ha come immagine l'intervallo $[0, l(\gamma; [a, b])]$ ed è strattamente crescente, per cui è una funzione invertibile. Chiamando t la sua inversa ed esprimendo t rispetto ad s si ha una funzione

$$\begin{array}{ccc} t : [0, l(\gamma; [a, b])] & \longrightarrow & [a, b] \\ s & \longmapsto & t(s) \end{array}$$

che è un cambio di variabile. Ora le due curve

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$$

e

$$\tilde{\gamma} : [0, l(\gamma; [a, b])] \rightarrow \mathbf{R}^n \quad \text{definita da } \tilde{\gamma}(s) := \gamma \circ t(s) = \gamma(t(s))$$

sono equivalenti. La particolarità del parametro s , detto *parametro d'arco* oppure *ascissa curvilinea*, è che s coincide esattamente con lo spazio percorso dall'ideale punto mobile che segue la curva. Questa fa sì che la derivata della curva così parametrizzata abbia sempre lunghezza 1.

Attenzione! Questo significa che, da un punto di vista figurativo, la curva è tracciata a velocità costante. Ma solo nel modulo! Perché (siamo in $\mathbf{R}^n$) la velocità potrebbe cambiare direzione e quindi subire delle variazioni (come pure l'accelerazione).

Ad esempio, la curva σ_1 con $r = 1$ dell'Esempio 1.2.2 nel primo paragrafo ha chiaramente modulo della derivata uguale ad 1, ma la direzione della derivata cambia.

Esempio 5.1. - Vediamo ora qualche esempio nel quale riparametrizziamo secondo l'ascissa curvilinea. Consideriamo la curva $r_3 : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$ dell'esempio 1. nel primo paragrafo, definita da $r_3(t) = (t^3, t^3)$. La lunghezza di r_3 è $2\sqrt{2}$. Poiché $r'_3(\sigma) = (3\sigma^2, 3\sigma^2)$

$$s(t) = \int_{-1}^t 3\sqrt{2} \sigma^2 d\sigma = \sqrt{2} t^3 + 1.$$

Invertendo tale espressione si ha

$$t(s) = \left(\frac{s-1}{\sqrt{2}} \right)^{1/3}, \quad s \in [0, 2\sqrt{2}].$$

Valutando r_3 composta con la mappa t si ha

$$\tilde{r}_3(s) := r_3(t(s)) = (t(s)^3, t(s)^3) = \left(\frac{s-1}{\sqrt{2}}, \frac{s-1}{\sqrt{2}} \right).$$

Tale nuova curva (che di fatto è la stessa riparametrizzata) ha derivata

$$\frac{d\tilde{r}_3}{ds}(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Esercizio 5.2. - Vediamo un altro esempio. Consideriamo la curva

$$\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^3, \quad \gamma(t) = (r \cos t, r \sin t, \alpha t)$$

con $r, \alpha > 0$. Tale curva ha sostegno simile a quello indicato in Figura 4. Valutando il modulo di γ' si ottiene $|\gamma'(t)| = \sqrt{r^2 + \alpha^2}$ per cui

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{r^2 + \alpha^2} d\sigma = t\sqrt{r^2 + \alpha^2}$$

per la lunghezza della curva è $T\sqrt{r^2 + \alpha^2}$ e

$$t(s) = \frac{s}{\sqrt{r^2 + \alpha^2}}, \quad s \in [0, T\sqrt{r^2 + \alpha^2}].$$

La nuova curva diventa

$$\tilde{\gamma}(s) := \gamma(t(s)) = \left(r \cos \frac{s}{\sqrt{r^2 + \alpha^2}}, r \sin \frac{s}{\sqrt{r^2 + \alpha^2}}, \alpha \frac{s}{\sqrt{r^2 + \alpha^2}} \right).$$

Valutando $|\tilde{\gamma}'(s)|$ si ottiene 1.

Esercizio 5.3. - Calcolare la lunghezza della curva

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t).$$

Le singole componenti di γ sono sicuramente C^1 , ma questo non garantisce che la curva sia regolare (potrebbe annullarsi il modulo della derivata in qualche punto). Infatti si ha che

$$\gamma'(t) = (3 \cos^2 t \sin t, 3 \sin^2 t \cos t)$$

e che $\gamma'(t) = (0, 0)$ per $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$. Nonostante il sostegno (si veda l'immagine in Figura 16) possa far immaginare che la curva sia C^1 a tratti, essa è C^1 , ma regolare a tratti (a tal proposito si veda l'Osservazione 1.9). Infatti entrambe le componenti di γ sono C^1 .

Per calcolarne la lunghezza possiamo anche limitarci a calcolare solamente la lunghezza di uno dei quattro rami e poi moltiplicare per 4.

$$4 \int_0^{\pi/2} 9 \sin^2 t \cos^2 t \, dt = 12 \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t \, dt = 12 \left. \frac{\sin^2 t}{2} \right|_0^{\pi/2} = 6.$$

Volendo parametrizzare questa curva col parametro d'arco si otterrà una curva che sarà C^1 solamente a tratti, perché avendo derivata di modulo costante 1 nei quattro punti $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$ non potrà avere derivate continue. Valutiamo il parametro d'arco

$$s(t) = \int_0^t 3 \cos \sigma \sin \sigma \, d\sigma = \frac{3}{2} \sin^2 t.$$

Limitandoci a $t \in (0, \pi/2)$, cosicché $\sin t > 0$ e $\arcsin$ è la sua inversa, si ha

$$t(s) = \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} s, \quad s \in [0, 3/2].$$

Per $s \in [0, 3/2]$ si ha

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s)) = \left(\cos^3 \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} s, \sin^3 \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} s \right).$$

Usando $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ se $\cos \alpha > 0$ si ha che

$$\tilde{\gamma}(s) = \left(\left(1 - \frac{2}{3} s \right)^{3/2}, \left(\frac{2}{3} s \right)^{3/2} \right) \quad \text{con } s \in [0, 3/2]$$

parametrizza il primo ramo (quello colorato in rosso) della curva con l'ascissa curvilinea.

EX - Verificare che il modulo della derivata di $\tilde{\gamma}$ è 1.

EX - Scrivere la parametrizzazione di γ con l'ascissa curvilinea anche negli altri tre rami della curva.

EX - Scrivere la curva come luogo di zeri di una funzione di due variabili.

Figura 16

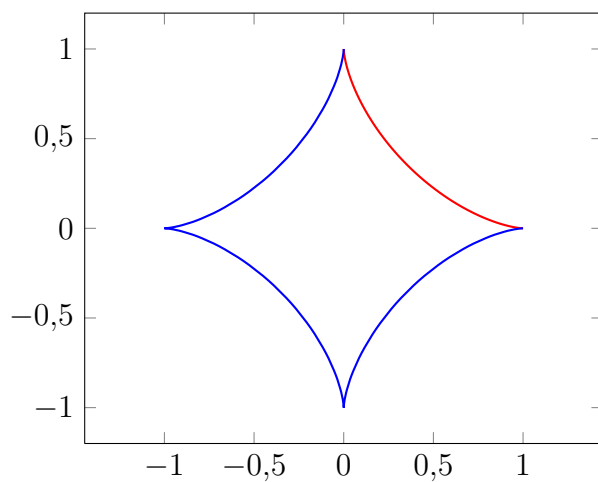
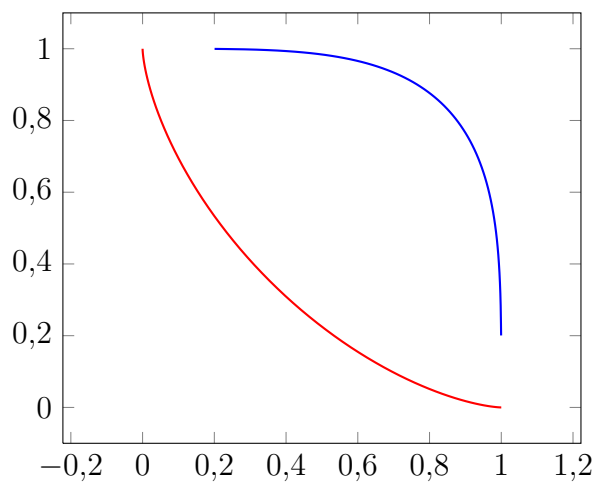


Figura 16



EX - Calcolare la lunghezza delle seguenti curve e parametrizzarle

con l'ascissa curvilinea:

- 1 - (parte della *spirale logaritmica*) $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$;
- 2 - (arco di *cicloide*) $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\gamma(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$;
- 3 - $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^3$, $\gamma(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$;
- 4 - (arco di parabola) $y = \frac{1}{2}x^2$ con $x \in [0, 1]$ e $x - y^2/2 - 5 = 0$ con $y \in [-2, 2]$;
- 5 - $y = \log x$ con $x \in [3/4, 4/3]$.

6. INTEGRALI CURVILINEI

Date una funzione $f : A \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ ed una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ dove A è un aperto di $\mathbf{R}^n$ possiamo considerare la funzione composta

$$f \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$$

che è una funzione di una variabile reale e a valori in $\mathbf{R}$. Se f è una funzione continua e γ una curva regolare e semplice si definisce *integrale curvilineo* (di prima specie) o *integrale di linea* (sempre di prima specie) e si denota per semplicità con il simbolo

$$\int_{\gamma} f \, ds$$

l'integrale

$$\int_a^b f \circ \gamma(t) |\gamma'(t)| \, dt = \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| \, dt.$$

Abbiamo già visto un caso semplice di integrale curvilineo quando abbiamo definito la lunghezza di una curva. Infatti se $f \equiv 1$ poiché γ è regolare si ha che

$$\int_{\gamma} f \, ds = l(\gamma).$$

Teorema 6.1. $\int_{\gamma} f \, ds$ è indipendente dalla parametrizzazione di γ .

Dimostrazione - È immediata. È sufficiente considerare un cambio di parametro α e valutare, se γ è definita in $[a, b]$ e $\tilde{\gamma}$ in $[\tilde{a}, \tilde{b}]$, i due integrali $\int_a^b f \circ \gamma(t) |\gamma'(t)| \, dt$ e $\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f \circ \tilde{\gamma}(t) |\tilde{\gamma}'(t)| \, dt$ per accorgersi che sono uguali. $\square$

Osservazione 6.2. - In particolare riotteniamo che la lunghezza, per curve regolari, è indipendente dalla parametrizzazione. Basta considerare nel teorema precedente $f \equiv 1$.

Osservazione 6.3. - Si osservi inoltre che, per il teorema precedente, possiamo scegliere come parametro l'ascissa curvilinea. In tal caso il modulo della derivata è sempre 1 e l'integrale si riduce a $\int_0^{l(\gamma)} f(\gamma(s)) ds$ con s ascissa curvilinea.

Esempio 6.4. - Calcolare l'integrale di linea $\int_{\gamma} f ds$ dove $f(x, y) = x$ e γ rappresenta la curva $y = x^2/2$, con $x \in [0, a]$.

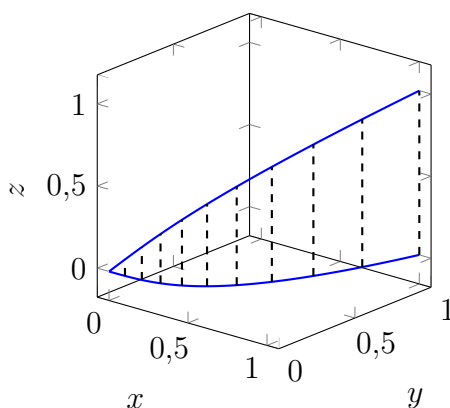
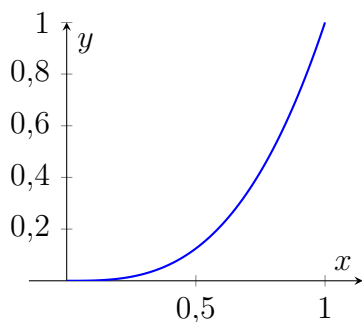
Per cercare di capire meglio cosa si sta facendo si osservi la Figura 17: l'integrale di linea proposto ci darà come risultato l'area sottesa dalla funzione $f(x, y) = x$ ristretta al sostegno, che giace sul piano xy , della curva γ . Sulla destra in Figura 17 è indicata col tratteggio tale area, sulla sinistra il sostegno della curva γ ($a = 1$).

La curva può essere parametrizzata da $\gamma(t) = (t, t^2/2)$, $t \in [0, a]$ (è una curva cartesiana) per cui $|\gamma'(t)| = |(1, t)| = \sqrt{1+t^2}$. Il calcolo di riduce quindi

$$\int_{\gamma} f ds = \int_0^a t \sqrt{1+t^2} dt = \frac{1}{3} [(1+a^2)^{3/2} - 1] .$$

Figura 17.b

Figura 17.a



Esempio 6.5. - Sia data la circonferenza parametrizzata dalla curva $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ e la funzione $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ definita

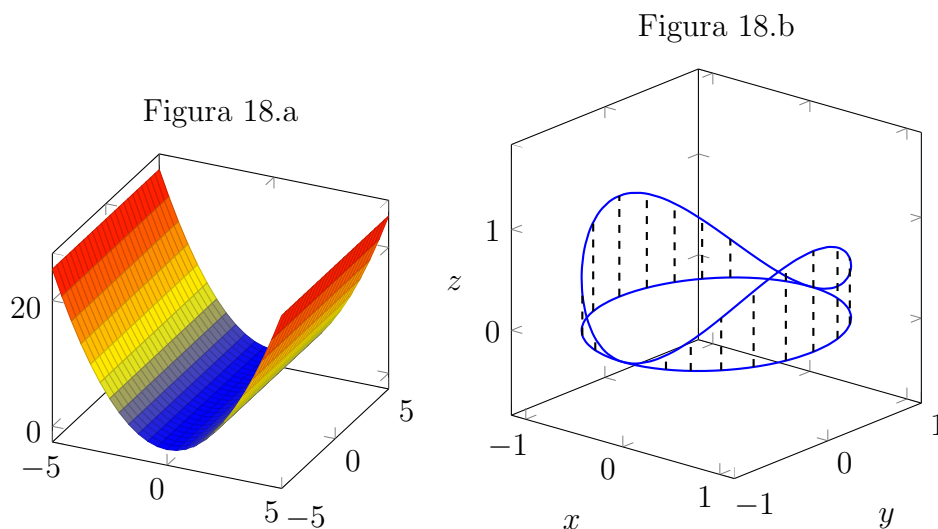
da $f(x, y) = x$ (! Attenzione! la funzione f è definita in $\mathbf{R}^2$) il cui grafico è riportato in Figura 18.a.

Supponiamo di voler calcolare

$$\int_{\gamma} f ds$$

che rappresenta l'area tratteggiata in Figura 18.b. Si ha che $|\gamma'(t)| = 1$ (quindi la parametrizzazione è già rappresentata tramite l'ascissa curvilinea, verificarlo per **EX**) e $f(\gamma(t)) = \cos^2 t$. Per cui si ha

$$\int_{\gamma} f ds = \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi.$$



EX - Calcolare sulla circonferenza dell'esempio precedente l'integrale curvilineo delle seguenti funzioni definite da $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}$:

$f(x, y) = x^2 - 2y$, $f(x, y) = e^x y$, $f(x, y) = x$, $f(x, y) = x^{2k+1}$ per $k \in \mathbf{N}$.

Esercizio 6.6. - Supponiamo di avere un filo in $\mathbf{R}^3$ di densità variabile ρ , cioè ρ è una funzione di tre variabili che al punto (x, y, z) associa la densità (che potrebbe non essere omogenea) del filo. Per semplicità possiamo definire $\rho : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ dicendo che $\rho(x, y, z) = 0$ se il punto (x, y, z) non appartiene al filo. Parametrizzando il filo con una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^3$ possiamo esprimere la massa del filo come

$$m := \int_{\gamma} \rho ds.$$

Si osservi che se la massa del filo è costante (sul filo), cioè se il filo è omogeneo, questo integrale curvilineo altro non è che la lunghezza della curva γ , cioè del filo, moltiplicato per ρ che sarà la costante che descrive la densità di massa.

Se volessimo calcolare il baricentro di una curva basterebbe valutare i tre integrali

$$\frac{1}{m} \int_{\gamma} f_1 ds, \quad \frac{1}{m} \int_{\gamma} f_2 ds, \quad \frac{1}{m} \int_{\gamma} f_3 ds,$$

dove

$$f_1(x, y, z) = x, \quad f_2(x, y, z) = y, \quad f_3(x, y, z) = z.$$

Se per caso la curva rappresentasse un filo nello spazio di densità $\rho(x, y, z)$ bisognerebbe valutare i tre integrali

$$\frac{1}{m} \int_{\gamma} f_1 \rho ds, \quad \frac{1}{m} \int_{\gamma} f_2 \rho ds, \quad \frac{1}{m} \int_{\gamma} f_3 \rho ds.$$

Se la curva (o il filo) sta in $\mathbf{R}^2$ ci si limita alle due componenti. Ad esempio (verificarlo!), la circonferenza dell'esempio precedente ha baricentro in $(0, 0)$.

Altro esempio meno immediato: valutiamo il baricentro della cardioide, indicata in Figura 11.a e parametrizzata da

$$\gamma(t) = (2a(\cos^2 t + \cos t), 2a(\cos t \sin t + \sin t)), \quad t \in [0, 2\pi] \quad (a \text{ parametro positivo}).$$

Si verifica facilmente che il modulo della sua derivata è dato da

$$|\gamma'(t)| = 2a + 2a \cos t.$$

Cominciamo con il valutarne la lunghezza (supponendo abbia densità costante 1 questa rappresenta anche la massa). Si ha

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)| dt = \int_0^{2\pi} (2a + 2a \cos t) dt = 4a\pi.$$

Valutiamo le due coordinate del baricentro: denotando con f_1, f_2 le funzioni $f_1(x, y) = x$ e $f_2(x, y) = y$ si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f_1 ds &= \int_0^{2\pi} f_1(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt = \int_0^{2\pi} [2a(\cos^2 t + \cos t)] (2a + 2a \cos t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} 4a^2 (\cos^3 t + 2 \cos^2 t + \cos t) dt = 8a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = 8a^2 \pi. \end{aligned}$$

Valutiamo ora

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f_2 ds &= \int_0^{2\pi} f_1(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt = \int_0^{2\pi} [2a(\cos t \sin t + \sin t)] (2a + 2a \cos t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} 4a^2 (2 \cos t \sin t + \cos^2 t \sin t + \sin t) dt = 0.\end{aligned}$$

Per cui la seconda coordinata è zero (data la simmetria della curva ce lo aspettavamo). La prima coordinata è data da

$$\frac{1}{m} \int_{\gamma} f_1 ds = \frac{1}{4a\pi} 8a^2\pi = 2a.$$

Si osservi che tale quantità è strettamente positiva e, ovviamente, minore di $4a$ che è la coordinata del punto che corrisponde a $t = 0$ nella parametrizzazione, cioè $(4a, 0)$.

Concludiamo osservando che se γ è una curva chiusa nel piano il baricentro deve essere necessariamente un punto dell'insieme limitato che ha il sostegno di γ come bordo.

7. NORMALE PRINCIPALE E CURVATURA

Pensiamo ad una curva come alla descrizione del moto di un punto materiale nel piano o nello spazio. Il parametro t può essere pensato come il tempo, per cui all'istante t il punto occupa la posizione $\gamma(t)$. Definiamo ora alcune quantità che da un punto intuitivo possono essere meglio comprese con questa immagine in mente.

Si consideri una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ di classe C^2 , regolare. Per quanto riguarda le definizioni che daremo utilizzando solo la derivata prima di γ la regolarità C^2 è sovrabbondante, ma per definire la curvatura sarà utile avere più regolarità.

Dato $t_o \in [a, b]$ il vettore

$$\gamma'(t_o) \quad \text{è detto } \textit{vettore tangente} \text{ alla curva in } t_o.$$

Il vettore $\gamma'(t_o)$ rappresenta anche il *vettore velocità*, se vogliamo pensare la curva γ come la traiettoria di un punto ideale che si muove in $\mathbf{R}^n$. Si osservi che $\gamma'(t)$ è un vettore: il suo modulo rappresenta l'intensità della velocità.

La retta tangente al punto t_o è data da

$$r(t) = \gamma(t_o) + \gamma'(t_o)(t - t_o), \quad t \in \mathbf{R},$$

ma riparametrizzando $t - t_o$ in maniera lineare, cioè chiamando $s = t - t_o + \alpha$ con α costante arbitraria, ognuna delle seguenti rette

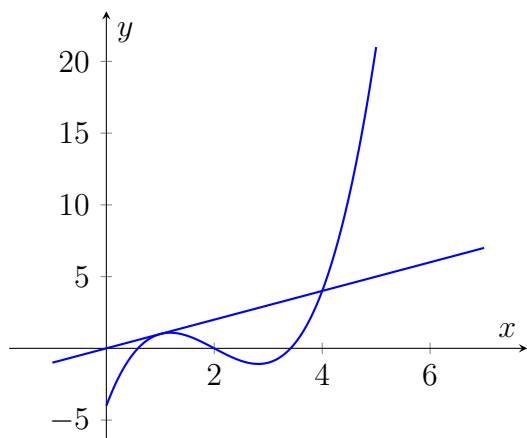
$$\rho_\alpha(s) = \gamma(t_o) + \gamma'(t_o)(s + \alpha), \quad s \in \mathbf{R}$$

parametrizza la retta tangente a γ , semplicemente rappresentano delle traslazioni rispetto a r . Per esempio anche la retta

$$\rho_0(s) = \gamma(t_o) + s \gamma'(t_o), \quad s \in \mathbf{R},$$

parametrizza la stessa retta. **EX** - Convincersene!

Figura 19



Se la curva è regolare definiamo

$$\tau(t) := \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \quad \text{il versore tangente,}$$

dove *versore* significa vettore di norma o modulo 1. Nel caso in cui la curva è parametrizzata con l'ascissa curvilinea si ha che il versore tangente coincide con il vettore tangente. Si noti che allora la velocità può essere scritta come

$$(7) \quad \gamma'(t) = |\gamma'(t)| \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} = |\gamma'(t)| \tau(t).$$

In quest'espressione la velocità viene scomposta in due parti, una *scalare*, $|\gamma'(t)|$, che rappresenta l'intensità della velocità, l'altra *vettoriale*, $\tau(t)$, che fornisce direzione e verso della velocità.

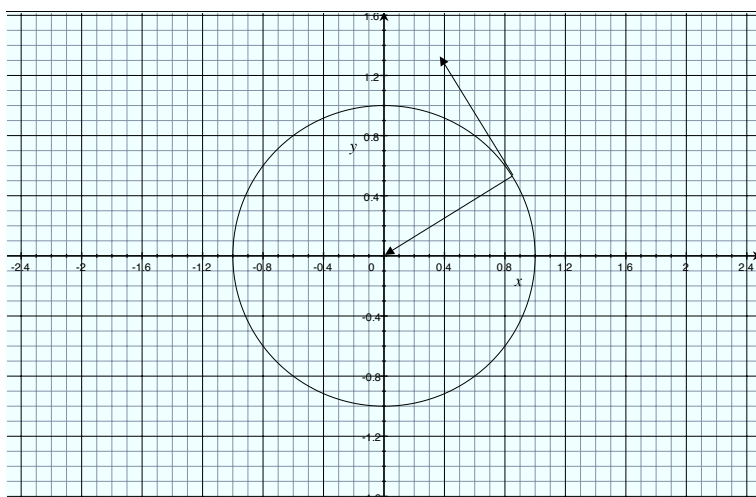
Osservazione 7.1. - Si osservi che vale il seguente fatto: se $|\gamma(t)| = c$, c costante, allora $\langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle = 0$ per ogni t ($\langle \xi, \eta \rangle$ denota il prodotto

scalare dei due vettori $\xi, \eta \in \mathbf{R}^n$), cioè il vettore $\gamma(t)$ è ortogonale al vettore $\gamma'(t)$.

Per dimostrarlo basta fare la derivata: se $|\gamma(t)| = c$ allora anche $|\gamma(t)|^2$ è costante e quindi la sua derivata è nulla:

$$0 = \frac{d}{dt} |\gamma(t)|^2 = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n (\gamma_i(t))^2 = 2 \sum_{i=1}^n \gamma_i(t) \gamma'_i(t) = 2 \langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle.$$

È il caso, ad esempio, della circonferenza parametrizzata da $(\cos t, \sin t)$. Verificarlo!



La derivata della velocità è detta *accelerazione* ed è il vettore $\gamma''(t)$. Si consideri per esempio la circonferenza dell'osservazione precedente. Si osservi come l'orientazione della curva sia quella antioraria, per cui il vettore velocità in un determinato punto seguirà quell'orientazione. Il vettore accelerazione, la variazione della velocità, in questo esempio, è un vettore che punta all'interno!

Possiamo ripetere quanto definito prima per la tangente e, se $|\gamma''(t)| \neq 0$, definire un vettore

$$\nu(t) = \frac{\gamma''(t)}{|\gamma''(t)|} \quad \text{che è un vettore di norma 1.}$$

Si osservi che se deriviamo il vettore τ si ottiene (deriviamo componente per componente):

$$(8) \quad \frac{d}{dt} \tau_j(t) = \frac{d}{dt} \frac{\gamma'_j(t)}{|\gamma'(t)|} = \frac{\gamma''_j(t) |\gamma'(t)|^2 - \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle \gamma'_j(t)}{|\gamma'(t)|^3}.$$

Facciamo ora questa ipotesi: che γ sia **parametrizzata con l'ascissa curvilinea**. Solo con questa ipotesi le cose si semplificano e vale quanto

stiamo per dire. Al solito denotiamo con s l'ascissa curvilinea. Si ha che $|\gamma'(s)| = 1$. Quindi, ragionando come nell'Osservazione 7.1, si ha

$$\frac{d}{ds} |\gamma'(s)|^2 = 0 \implies \langle \gamma'(s), \gamma''(s) \rangle = 0$$

cioè $\gamma''(s)$ è ortogonale a $\gamma'(s)$, che a sua volta è tangente alla curva. Allora la formula (8) si semplifica come segue in virtù del fatto che $\tau = \gamma'$, $|\gamma'| = 1$ e che $\langle \gamma', \gamma'' \rangle = 0$:

$$\frac{d}{dt} \tau_j(s) = \frac{d}{dt} \gamma'_j(s) = \gamma''_j(s)$$

notevolmente più semplice di (8). Quindi $\tau'(s) = \gamma''(s)$ e in virtù di questo fatto e del fatto che $\gamma''(s)$ è normale alla curva e al vettore tangente (perché stiamo usando l'ascissa curvilinea!!!) il vettore ν precedentemente definito è normale (od ortogonale) alla curva e al vettore tangente e coincide, se $|\tau'(s)| \neq 0$, con

$$\nu(s) = \frac{\tau'(s)}{|\tau'(s)|} \quad \text{ed è il versore normale.}$$

In questo caso (cioè se la curva è parametrizzata con l'ascissa curvilinea) analogamente a quanto fatto per la velocità in (7) si ha

$$(9) \quad \gamma''(s) = |\gamma''(s)| \frac{\gamma''(s)}{|\gamma''(s)|} = |\tau'(s)| \frac{\tau'(s)}{|\tau'(s)|} = |\tau'(s)| \nu(s).$$

La quantità $|\tau'(s)|$ è chiamata *curvatura* ed è denotata solitamente con $k(s)$. Riassumendo si ha

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= v(t) \tau(t), \\ \gamma''(s) &= k(s) \nu(s), \end{aligned}$$

dove

- $v(t) = |\gamma'(t)|$ intensità della velocità o velocità scalare,
- $k(s) = |\tau'(s)|$ curvatura (solo se si usa il parametro d'arco),
- $\tau(t)$ versore tangente alla curva nel punto $\gamma(t)$,
- $\nu(s)$ versore normale alla curva nel punto $\gamma(t)$.

Esercizio 7.2. - Vediamo un esempio che ci aiuterà a capire il significato geometrico della curvatura. Si consideri la curva

$$\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Parametrizziamo questa curva col parametro d'arco. Valutiamo quindi

$$\int_0^t r \, d\sigma = r \, t.$$

Chiamando $s(t)$ questa quantità ed invertendola si ottiene

$$t(s) = \frac{1}{r} s.$$

Quindi la curva γ è già parametrizzata con il parametro d'arco solo se $r = 1$, altrimenti va riparametrizzata. Consideriamo quindi

$$\tilde{\gamma}(s) := \gamma(t(s)) = \left(r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r} \right), \quad s \in [0, 2\pi r].$$

Il vettore velocità è dato allora da

$$\tilde{\gamma}'(s) = \left(-\sin \frac{s}{r}, \cos \frac{s}{r} \right)$$

il cui modulo è 1, per cui $\tau(s)$ coincide con $\tilde{\gamma}'(s)$ e $v(s) \equiv 1$. Veniamo alla derivata seconda:

$$\tilde{\gamma}''(s) = \left(-\frac{1}{r} \cos \frac{s}{r}, -\frac{1}{r} \sin \frac{s}{r} \right)$$

il cui modulo è $\frac{1}{r}$, per cui

$$\tilde{\gamma}''(s) = \frac{1}{r} \left(-\cos \frac{s}{r}, -\sin \frac{s}{r} \right)$$

e quindi

$$k(s) = \frac{1}{r}, \quad \nu(s) = \left(-\cos \frac{s}{r}, -\sin \frac{s}{r} \right).$$

Quindi minore è il raggio della circonferenza, maggiore è la curvatura. La curvatura fornisce quindi una misura scalare di quanto “la nostra curva si sta curvando”.

Il *raggio di curvatura* è definito come una funzione del parametro ed è definito (prendendo spunto dall'esempio precedente) come

$$\rho(s) := \frac{1}{k(s)}.$$

Chiaramente nel caso della circonferenza dell'esercizio precedente il raggio di curvatura è costante e coincide con r .

Osservazione 7.3. - Si faccia attenzione a non essere fuorviati dagli esempi in dimensione 2. I vettori $\tau(s)$ e $\nu(s)$ formano una base (variabile nel tempo, se s rappresenta il tempo) per $\mathbf{R}^2$. Se abbiamo a che fare con curve in dimensione più alta esistono infiniti vettori normali alla curva. La normale $\nu(s)$ è una di queste direzioni ed è quella lungo la quale avviene la variazione della velocità.

8. CURVATURA - CASO GENERALE

Non sempre è agevole calcolare il parametro d'arco e quindi riparametrizzare la curva per lunghezza d'arco. Di conseguenza definire, o calcolare, la curvatura come visto nel paragrafo precedente potrebbe essere complicato. Vediamo come si può fare senza riparametrizzare la curva.

Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ di classe C^2 , regolare. Useremo l'accento $\tilde{}$ per denotare le quantità che useremo valutate rispetto al parametro d'arco.

Dalla definizione di parametro d'arco, $s(t) = \int_a^t |\gamma'(\sigma)| d\sigma$, si ha

$$\frac{d}{dt}s(t) = s'(t) = |\gamma'(t)| = v(t).$$

Inoltre, scrivendo $\tilde{\tau}(s) = \tau(t(s))$ equivalente a $\tilde{\tau}(s(t)) = \tau(t)$ e usando l'uguaglianza appena ottenuta, si ha

$$\tau'(t) = \frac{d}{dt}\tau(t) = \frac{d}{dt}(\tilde{\tau}(s(t))) = \frac{d}{ds}\tilde{\tau}(s) \frac{d}{dt}s(t) = \left(\frac{d}{ds}\tilde{\tau}(s) \right) v(t) = \tilde{\tau}'(s) v(t)$$

e poiché $\tilde{k}(s)$ è $|\tilde{\tau}'(s)|$ si ottiene

$$|\tau'(t)| = v(t) \tilde{k}(s).$$

Esprimendo la curvatura come funzione di t , cioè $k(t) = \tilde{k}(s(t))$, dalla precedente uguaglianza troviamo che

$$(10) \quad k(t) = \frac{|\tau'(t)|}{v(t)}.$$

In maniera più complicata possiamo scrivere la curvatura usando (8) anche in questo modo

$$k(t) = \frac{\left| |\gamma'(t)|^2 \gamma''(t) - \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle \gamma'(t) \right|}{|\gamma'(t)|^4}.$$

Questa quantità può essere anche scritta, valutando che

$$\left| |\gamma'(t)|^2 \gamma''(t) - \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle \gamma'(t) \right|^2 = |\gamma'(t)|^4 |\gamma''(t)|^2 - \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle^2 |\gamma'(t)|^2,$$

nel modo seguente

$$(11) \quad k(t) = \frac{\sqrt{|\gamma'(t)|^2 |\gamma''(t)|^2 - \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle^2}}{|\gamma'(t)|^3},$$

ma forse l'espressione più semplice da ricordare è quella in (10), dove $v(t) = |\gamma'(t)|$ e $\tau(t) = \gamma'(t)/|\gamma'(t)|$. Il raggio di curvatura rimane definito come

$$\rho(t) := \frac{1}{k(t)}.$$

Casi particolari - Supponiamo di essere in $\mathbf{R}^2$ e chiamiamo per semplicità $(x(t), y(t))$ le due componenti di γ . Valutando (11) si ottiene che

$$k(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|}{|\gamma'(t)|^3} = \frac{|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}}.$$

In $\mathbf{R}^3$ si può facilmente verificare che (11) può essere riscritto come segue:

$$k(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3},$$

dove $a \times b$ denota il prodotto vettoriale tra i due vettori $a = (a_1, a_2, a_3)$ e $b = (b_1, b_2, b_3)$ che può essere ricordato valutando il determinante della matrice

$$a \times b = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

dove $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ rappresentano rispettivamente i tre vettori $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

Da quanto visto nel capitolo precedente, considerare una funzione $r : I \rightarrow \mathbf{R}$ con $I \subset \mathbf{R}$ equivale a considerare n funzioni $r_i : I \rightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, \dots, n$,

$$r(t) = (r_1(t), \dots, r_n(t)).$$

La nozione di limite e di continuità su r si traduce nelle analoghe nozioni per le funzioni r_i , che sono quindi le usuali nozioni di limite e continuità per funzioni reali di variabile reale. Diremo quindi che r è continua in un punto $t_0 \in I$ se sono continue in t_0 tutte le funzioni r_i .

Una curva in $\mathbf{R}^n$ è data da una funzione continua $r : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ con I intervallo di $\mathbf{R}$, limitato o meno (non necessariamente aperto o chiuso). La richiesta della continuità nella definizione di curva serve per sottolineare che la variare di $t \in I$, il punto $r(t)$ si muove nello spazio con continuità, descrivendo cioè una traiettoria continua. Si definisce il supporto o sostegno di r l'insieme

$$r(I) = \{r(t) : t \in I\} \subset \mathbf{R}^n :$$

il sostegno di una curva non va confuso con il grafico della curva, il quale è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $I \times \mathbf{R}^n$.

Retta e Segmento.: Dati due punti x e y in $\mathbf{R}^n$, la retta passante per essi è parametrizzata da $r : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$

$$r(t) = x + t(y - x).$$

Se si usa la stessa parametrizzazione ma definita in $[0, 1]$, si ottiene il segmento, che denoteremo con $[x, y]$, congiungente x e y ; tale segmento è un segmento orientato che parte da x (tempo $t = 0$) e termina in y (tempo $t = 1$). Se denotiamo con $v = y - x$, troviamo che

$$r(t) = x + tv;$$

se si utilizza questa notazione si sta sottolineando che il segmento (semiretta o retta) individuato da r passa per il punto x e viene percorso in direzione v .

Unione di due segmenti.: Dati tre punti distinti $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}^n$, possiamo definire la curva unione di $[x_1, x_2]$ e $[x_2, x_3]$ in vari modi; ad esempio possiamo definire $r : [0, 2] \rightarrow \mathbf{R}^n$,

$$r(t) = \begin{cases} x_1 + t(x_2 - x_1) & t \in [0, 1] \\ x_2 + (t - 1)(x_3 - x_2) & t \in [1, 2]. \end{cases}$$

Analogamente potremmo considerare $\tilde{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$ data da

$$\tilde{r}(t) = \begin{cases} x_1 + 2t(x_2 - x_1) & t \in [0, 1/2] \\ x_2 + (2t - 1)(x_3 - x_2) & t \in [1/2, 1]; \end{cases}$$

come vedremo in seguito, queste due definizioni sono equivalenti tra loro, nel senso che specificheremo.

Poligonale. : Data una collezione ordinata di punti $x_0, x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^2$ di punti, si definisce poligonale P di vertici $x_0, \dots, x_k$ l'unione dei segmenti $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, k$ parametrizzata quindi dalla curva $r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$r(t) = x_{i-1} + \left(kt - \frac{i-1}{k} \right) (x_i - x_{i-1}), \quad \frac{i-1}{k} \leq t \leq \frac{i}{k}.$$

Circonferenza nel piano. Nel piano, la circonferenza di raggio $R > 0$ centrata nell'origine può essere parametrizzata dalla funzione $r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$r(t) = (R \cos t, R \sin t).$$

Ellisse nel piano. L'ellisse del piano $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ può essere parametrizzata dalla funzione $r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$r(t) = (a \cos t, b \sin t).$$

Si fissi ora un punto $t_0 \in I$ e si consideri, per $t_1 \in I$, la quantità

$$\frac{r(t_1) - r(t_0)}{t_1 - t_0} = \left(\frac{r_1(t_1) - r_1(t_0)}{t_1 - t_0}, \dots, \frac{r_n(t_1) - r_n(t_0)}{t_1 - t_0} \right).$$

Avremo quindi che il limite

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{r(t_1) - r(t_0)}{t_1 - t_0} = r'(t_0)$$

esiste se e solo se esistono i limiti

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{r_i(t_1) - r_i(t_0)}{t_1 - t_0}$$

per ogni $i = 1, \dots, n$, cioè se e solo se le componenti della curva sono funzioni derivabili. Diremo quindi che la curva è derivabile in t_0 se le sue componenti lo sono, mentre diremo che $r \in C^1(I)$ se le sue componenti sono derivabili con derivata continua in I .

Per quanto abbiamo visto, l'equazione

$$r_{t_1}(t) = r(t_0) + t \frac{r(t_1) - r(t_0)}{t_1 - t_0}$$

rappresenta la retta passante per $r(t_0)$ e $r(t_1)$, cioè la retta secante il sostegno di r in tali punti. Se passiamo al limite per $t_1 \rightarrow t_0$, tale retta tende alla tangente al supporto di r nel punto $r(t_0)$, che sarà quindi individuata dalla parametrizzazione

$$r(t) = r(t_0) + tr'(t_0).$$

Il vettore $r'(t_0)$ rappresenta la velocità della curva in t_0 e, nel caso $r'(t_0) \neq 0$, il vettore unitario

$$\hat{\tau}_r(t_0) = \frac{r'(t_0)}{\|r'(t_0)\|}$$

rappresenta il versore tangente alla curva in $r(t_0)$. Useremo anche la nozione di velocità scalare per indicare la quantità $v(t) = \|r'(t)\|$ e velocità vettoriale per $\vec{v}(t) = r'(t)$.

Data una curva $r : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, diremo che:

- (1) r è regolare se $r \in C^1(I)$ con $r'(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$;
- (2) r è regolare a tratti se possiamo decomporre I in sottointervalli disgiunti I_i con $i = 1, \dots, k$ in modo tale che r sia regolare in I_i per ogni $i = 1, \dots, k$;
- (3) la curva si dice semplice se $t_1 \neq t_2$ implica $r(t_1) \neq r(t_2)$, con almeno uno dei due punti t_1 o t_2 interno ad I ;
- (4) se $I = [a, b]$, il punto $r(a)$ si dice primo estremo o punto iniziale della curva, mentre $r(b)$ si dice secondo estremo o punto finale della curva;
- (5) se $I = [a, b]$, la curva si dice chiusa se $r(a) = r(b)$.

Vedremo che si potrà sempre ottenere la condizione $r' \neq 0$ nella definizione di curva regolare: qui è stata posta per una semplice questione di comodità. La definizione di curva semplice può sembrare complicata, ma serve semplicemente per ammettere anche curve chiuse semplici, quali la circonferenza, in cui gli unici due punti di non iniettività della curva sono gli estremi.

[Curve equivalenti] Due curve $r : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\tilde{r} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dicono equivalenti se esiste una funzione $\alpha : I \rightarrow J$ di classe $C^1(I)$ iniettiva e suriettiva tale che $\alpha'(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$ e

$$r(t) = \tilde{r}(\alpha(t)), \quad \forall t \in I.$$

La mappa α viene anche chiamata cambiamento di parametro o riparametrizzazione ammissibile.

L'equivalenza di due curve implica l'uguaglianza dei due sostegni, mentre il viceversa non è vero; ad esempio le due funzioni $r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $r(t) = (\cos t, \sin t)$ e $\tilde{r} : [0, 3\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\tilde{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ hanno lo stesso sostegno ma non sono equivalenti. Per poter caratterizzare curve equivalenti tramite il sostegno, bisogna restringersi alla classe delle curve semplici. Abbiamo cioè il seguente risultato.

Proposizione 8.1. *Siano $r : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\tilde{r} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ due curve regolari e semplici; allora le due curve sono equivalenti se e solo se hanno lo*

stegno sostegno, cioè se e solo se

$$r(I) = \tilde{r}(J).$$

Dimostrazione - Si costruisce la riparametrizzazione come segue; supponiamo che $I = [a, b]$ e $J = [c, d]$ e supponiamo che le curve non siano chiuse (altrimenti si ragiona su intervalli del tipo $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$). Per $t \in I$, abbiamo che $r(t) \in r(I) = \tilde{r}(J)$. Esiste quindi $s \in J$ tale che $\tilde{r}(s) = r(t)$. Tale s è unico e definiamo quindi $s := \alpha(t)$. La mappa $\alpha : [a, b] \rightarrow [c, d]$ così definita è iniettiva e suriettiva. Si dimostra anche che α è continua e derivabile con continuità, anche se la dimostrazione non è immediata.

Si noti che la condizione $\alpha' \neq 0$ implica che $\alpha' > 0$ oppure $\alpha' < 0$; quindi α è sempre strettamente monotona. Nel caso in cui α sia monotona crescente, avremo che due curve equivalenti avranno lo stesso verso di percorrenza, mentre nel caso di α decrescente, il loro verso di percorrenza sarà opposto.

- (1) Una riparametrizzazione per una curva $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ è data ad esempio da

$$\alpha : [a, b] \rightarrow [0, 1], \quad \alpha(t) = \frac{t - a}{b - a}.$$

Non sarà quindi restrittivo supporre sempre una curva definita sull'intervallo $[0, 1]$, almeno nel caso in cui I sia un intervallo chiuso e limitato.

- (2) L'arco di circonferenza $r : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$r(t) = (\cos t, \sin t)$$

può essere equivalentemente riparametrizzata da $\tilde{r} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\tilde{r}(t) = (t, \sqrt{1 - t^2}).$$

In questo caso cercare una riparametrizzazione significa cercare una funzione $\alpha : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ tale che $r(\alpha(t)) = \tilde{r}(t)$, cioè

$$(\cos \alpha(t), \sin \alpha(t)) = (t, \sqrt{1 - t^2}).$$

Troviamo quindi che $\alpha(t) = \arccos t$; tale riparametrizzazione è derivabile per $t \in (-1, 1)$ e $\alpha'(t) = -1/\sqrt{1 - t^2}$, cioè cambia l'orientamento della curva.

8.1. Curve nel piano. La geometria del piano permette di vedere le curve in vari modi. Ad esempio, se viene data una funzione $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ continua reale di variabile reale, allora possiamo definire in modo canonico due curve parametrizzate $r_x : I \rightarrow \mathbf{R}^2$, $r_y : I \rightarrow \mathbf{R}^2$

$$r_x(t) = (t, f(t)), \quad r_y(y) = (f(t), t),$$

dette curve cartesiane rispettivamente rispetto ad x e rispetto ad y definite dalla funzione f . In tal caso il sostegno delle curve r_x e r_y coincide con il grafico della funzione f , grafico rispettivamente in x e in y . Le curve date sono regolari se e solo se f è di classe $C^1(I)$ ed in tal caso, avendosi

$$r'_x(t) = (1, f'(t)), \quad r'_y(y) = (f'(t), 1)$$

la condizione $r' \neq 0$ è automaticamente verificata.

Viceversa, se si vuole vedere una curva parametrizzata $r : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ come una curva cartesiana, si dovrà richiedere che r sia una curva semplice e che il sostegno di r sia un grafico, cioè che l'intersezione del sostegno con rette verticali (nel caso di curva cartesiana rispetto alla x) contenga al più un punto, mentre l'intersezione con rette orizzontali (nel caso cartesiano rispetto alla y) contenga al più un punto.

Un altro modo per definire una curva nel piano è tramite l'utilizzo delle coordinate polari; in tal caso esistono sostanzialmente due approcci, il metodo esplicito e quello parametrico.

Per metodo esplicito si intende il caso in cui nell'utilizzo delle coordinate polari (r, ϑ) , il raggio r sia una funzione esplicita dell'angolo ϑ , cioè $r = g(\vartheta)$, $g : [\vartheta_1, \vartheta_2] \rightarrow [0, +\infty)$. In questo caso, si può definire una curva parametrizzata $r : [\vartheta_1, \vartheta_2] \rightarrow \mathbf{R}^2$ ponendo

$$(12) \quad r(\vartheta) = (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) = g(\vartheta)(\cos \vartheta, \sin \vartheta);$$

derivando, si ottiene

$$(13) \quad r'(\vartheta) = (g'(\vartheta) \cos \vartheta - g(\vartheta) \sin \vartheta, g'(\vartheta) \sin \vartheta + g(\vartheta) \cos \vartheta).$$

La curva data sarà regolare se e solo se g è di classe $C^1([\vartheta_1, \vartheta_2])$.

Per metodo parametrico si intende il caso in cui sia r che ϑ sono funzioni di un parametro $t \in I$

$$\begin{cases} r = r(t) \\ \vartheta = \vartheta(t). \end{cases}$$

In tal caso si ottiene la curva parametrizzata $r : I \rightarrow \mathbf{R}^2$

$$r(t) = (r(t) \cos \vartheta(t), r(t) \sin \vartheta(t));$$

derivando, si ottiene anche che

$$r'(t) = (r'(t) \cos \vartheta(t) - r(t) \vartheta'(t) \sin \vartheta(t), r'(t) \sin \vartheta(t) + r(t) \vartheta'(t) \cos \vartheta(t)).$$

9. LUNGHEZZA, ASCISSA CURVILINEA E INTEGRALI CURVILINEI

In questa sezione diamo la definizione di lunghezza di una curva e forniamo un metodo di calcolo, almeno nel caso di curve regolari. La prima osservazione è che, dati due punti $x, y \in \mathbb{R}^n$, la distanza tra essi coincide con la lunghezza del segmento che li unisce, cioè

$$l([x, y]) = \|x - y\|.$$

Analogamente, data una poligonale P di vertici $x_0, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$, possiamo definire la lunghezza della poligonale ponendo

$$l(P) = \sum_{i=1}^k \|x_i - x_{i-1}\|.$$

Infine, data una curva $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, una poligonale inscritta in r è una scelta crescente di istanti $a \leq t_0 < \dots < t_k \leq b$ che individuano la poligonale P di vertici definiti da

$$x_i = r(t_i), \quad i = 0, \dots, k.$$

[Lunghezza di una curva] Data $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ curva parametrizzata, si definisce lunghezza di r la quantità

$$(14) \quad l(r, [a, b]) = \sup\{l(P) : P \text{ poligonale inscritta in } r\}.$$

Nel caso in cui sia $r : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, con I intervallo generico, si procede con un metodo di esaustione, nel senso che si calcola la lunghezza sugli intervalli $[a, b] \subset I$ e si invade I con tali intervalli.

Diremo che la curva r è rettificabile in I se ha lunghezza finita, cioè se $l(r, I) < +\infty$.

Una proprietà importante della definizione della lunghezza di una curva $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è che se $c \in (a, b)$, allora

$$l(r, [a, b]) = l(r, [a, c]) + l(r, [c, b]).$$

In particolare, la funzione $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$s(t) = l(r, [a, t])$$

è una funzione monotona crescente. Tale funzione prende il nome di *ascissa curvilinea*, oppure *parametro* o *lunghezza d'arco*. Per il calcolo della lunghezza di una curva abbiamo la Proposizione 9.2, valida nel caso di curve regolari. Prima di enunciare e dimostrare tale proposizione, introduciamo e dimostriamo alcune proprietà dell'integrazione per curve. Se $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una curva, possiamo definire il suo integrale ragionando componente per componente;

$$\int_a^b r(t) dt := \left(\int_a^b r_1(t) dt, \dots, \int_a^b r_n(t) dt \right).$$

Per tale integrale vale la seguente proprietà, che enunciamo come Lemma.

Lemma 9.1. *Sia $r : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una curva; allora*

$$\left\| \int_a^b r(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|r(t)\| dt.$$

Dimostrazione - La continuità della funzione r implica che il suo integrale può essere ottenuto come limite delle somme di Riemann

$$\sum_{j=1}^{k-1} r(t_j)(t_{j+1} - t_j),$$

con $a \leq t_0 < \dots < t_k \leq b$ suddivisione dell'intervallo $[a, b]$. Per la disuguaglianza triangolare della norma, si ottiene che

$$\left\| \sum_{j=1}^{k-1} r(t_j)(t_{j+1} - t_j) \right\| \leq \sum_{j=1}^{k-1} \|r(t_j)\|(t_{j+1} - t_j).$$

Passando al limite sulle somme di Riemann con

$$\max_{j=1, \dots, k-1} (t_{j+1} - t_j) \rightarrow 0,$$

il lemma risulta dimostrato.

Notiamo infine, che ragionando componente per componente, nel caso in cui $r : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ sia una curva regolare, vale ancora il Teorema fondamentale del calcolo integrale, cioè

$$\int_a^b r'(t) dt = r(b) - r(a).$$

Proposizione 9.2. *Sia $r : I \rightarrow \mathbf{R}$ una curva regolare a tratti; allora*

$$l(r, I) = \int_I \|r'(t)\| dt.$$

In particolare, per l'ascissa curvilinea si ha

$$\frac{ds(t)}{dt} = \|r'(t)\|,$$

mentre la curva $\tilde{r} : [0, l(r, I)] \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$\tilde{r}(s) = \tilde{r}(s(t)) := r(t)$$

è una riparametrizzazione equivalente di r con

$$\left\| \frac{d\tilde{r}(s)}{ds} \right\| = 1.$$

DIM. Supponiamo per comodità $I = [a, b]$ e $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ regolare; il caso generale si ottiene per additività ed invadendo un intervallo generico I con intervalli chiusi e limitati. Dimostriamo quindi che la funzione lunghezza d'arco

$$s(t) = l(r, [a, t])$$

è derivabile con $s'(t) = \|r'(t)\|$. Se consideriamo i punti t e $t+h$, $h > 0$, è facile rendersi conto che

$$(15) \quad \|r(t+h) - r(t)\| \leq s(t+h) - s(t) = l(r, [t, t+h]),$$

dato che t e $t+h$ definiscono una particolare partizione dell'intervallo $[t, t+h]$. Sia ora P una poligonale generica individuata da una partizione $t_0, \dots, t_k$ di $[t, t+h]$; grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale, otteniamo

$$\begin{aligned} l(r, P) &= \sum_{i=1}^k \|r(t_i) - r(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^k \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} r'(\tau) d\tau \right\| \leq \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|r'(\tau)\| d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t_k} \|r'(\tau)\| d\tau \leq \int_t^{t+h} \|r'(\tau)\| d\tau. \end{aligned}$$

Passando all'estremo superiore su tutte le partizioni:

$$(16) \quad s(t+h) - s(t) = l(r, [t, t+h]) \leq \int_t^{t+h} \|r'(\tau)\| d\tau.$$

Combinando (15) e (16), si ottiene infine:

$$\left\| \frac{r(t+h) - r(t)}{h} \right\| \leq \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|r'(\tau)\| d\tau;$$

Passando al limite $h \rightarrow 0^+$, dal fatto che r è derivabile con continuità si ottiene che

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \|r'(t)\|.$$

Il caso $h < 0$ si tratta in modo equivalente, e quindi la prima parte del teorema è dimostrata. Per la seconda parte, quanto detto sopra mostra che $s : [a, b] \rightarrow [0, l(r, [a, b])]$ è una funzione strettamente monotona crescente, quindi invertibile. Definiamo la curva $\tilde{r} : [0, l(r, [a, b])] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ponendo $\tilde{r}(\tau) = r(s^{-1}(\tau))$, cioè $r(t) = \tilde{r}(s(t))$. Le curve $\tilde{r}$ e r sono equivalenti con riparametrizzazione data proprio dalla lunghezza d'arco. Infine, dalla derivata della funzione composta, si ottiene

$$r'(t) = \frac{d}{ds} \tilde{r}(s(t)) = s'(t) \tilde{r}'(s(t)) = \|r'(t)\| \tilde{r}'(s(t)).$$

□

Abbiamo anche la seguente proprietà, che ci assicura che la lunghezza di una curva non dipende dalla parametrizzazione scelta.

Proposizione 9.3. *Siano $r : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\tilde{r} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ due curve regolari equivalenti; allora*

$$l(r, I) = l(\tilde{r}, J).$$

DIM. Supponiamo per comodità l'insieme $I = [a, b]$ e $J = [c, d]$ e sia $\alpha : [a, b] \rightarrow [c, d]$ una riparametrizzazione ammissibile; supponiamo anche $\alpha' > 0$, da cui si deduce che $\alpha(a) = c$ e $\alpha(b) = d$. Allora, tenendo conto che

$$r'(t) = \frac{d}{dt}r(t) = \frac{d}{dt}\tilde{r}(\alpha(t)) = \alpha'(t)\tilde{r}'(\alpha(t)),$$

si ottiene, mediante il cambio di variabile $\tau = \alpha(t)$,

$$l(\tilde{r}, [c, d]) = \int_c^d \|\tilde{r}'(\tau)\| d\tau = \int_a^b \frac{\|r'(t)\|}{|\alpha'(t)|} \alpha'(t) dt = \int_a^b \|r'(t)\| dt$$

in quanto $\alpha' > 0$. □

Osservazione 9.4. *Nel caso di curva $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ piana cartesiana rispetto ad esempio ad x , $r(t) = (t, f(t))$ con $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $C^1([a, b])$, la formula della lunghezza si riduce a*

$$l(r, [a, b]) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$$

che fornisce la formula della lunghezza del grafico della funzione f .

Nel caso di curva in coordinate polari esplicite, grazie alla (12) la formula diventa:

$$l(r, [\vartheta_1, \vartheta_2]) = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{g(\vartheta)^2 + g'(\vartheta)^2} d\vartheta,$$

mentre nel caso di curva in coordinate polari parametriche, da (13) si ricava :

$$l(r, [I]) = \int_I \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2 \vartheta'(t)^2} dt.$$

10. CURVATURA E TERNA DI FRENET

Supponiamo di avere una curva regolare $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$; per definire la curvatura di r abbiamo bisogno di prendere le derivate seconde di r e quindi supporremo $r \in C^2(I, \mathbb{R}^n)$. Se consideriamo la riparametrizzazione $\tilde{r}$ di r per lunghezza d'arco, abbiamo visto che $\|\tilde{r}'(s)\|^2 = 1$, e quindi

$$0 = \frac{d}{ds} (\tilde{r}'(s) \cdot \tilde{r}'(s)) = 2\tilde{r}'(s) \cdot \tilde{r}''(s),$$

cioè il vettore $\tilde{r}''(s)$ è ortogonale a $\tilde{r}'(s)$. La quantità

$$k_{\tilde{r}}(s) = \|\tilde{r}''(s)\|$$

viene detta curvatura scalare di $\tilde{r}$; se $k_{\tilde{r}}(s) \neq 0$, possiamo quindi definire il versore

$$\hat{n}_{\tilde{r}}(s) = \frac{\tilde{r}''(s)}{\|\tilde{r}''(s)\|}$$

che viene chiamato *normale principale* alla curva. In questo modo possiamo scrivere che

$$\tilde{r}''(s) = k_{\tilde{r}}(s)\hat{n}_{\tilde{r}}(s).$$

Siccome non sempre è agevole calcolare il parametro d'arco e quindi riparametrizzare la curva per lunghezza d'arco, vediamo come si può definire la curvatura utilizzando direttamente la parametrizzazione r . Denoteremo con

$$(17) \quad \hat{n}_r(t) := \hat{n}_{\tilde{r}}(s(t)), \quad k_r(t) := k_{\tilde{r}}(s(t)).$$

Dal fatto che $\hat{\tau}_r(t) = \hat{\tau}_{\tilde{r}}(s(t)) = \tilde{r}'(s(t))$ e da (17), derivando si ottiene che

$$\hat{\tau}_r'(t) = s'(t)\tilde{r}''(s(t)) = \|r'(t)\|k_r(t)\hat{n}_r(t) = v(t)k_r(t)\hat{n}_r(t).$$

Quindi, siccome $r'(t) = v(t)\hat{\tau}_r(t)$, otteniamo la seguente decomposizione per l'accelerazione vettoriale

$$(18) \quad \begin{aligned} \vec{a}(t) &:= r''(t) = v'(t)\hat{\tau}_r(t) + v^2(t)k_r(t)\hat{n}_r(t) \\ &= a(t)\hat{\tau}_r(t) + \frac{v^2(t)}{\varrho_r(t)}\hat{n}_r(t), \end{aligned}$$

dove abbiamo denotato con $a(t) = v'(t)$ l'accelerazione scalare e con $\varrho_r(t) = 1/k_r(t)$ il raggio di curvatura della curva. Si chiama *cerchio osculatore* il cerchio di raggio $\varrho_r(t)$ centrato in $r(t) + \varrho_r(t)\hat{n}_r(t)$ e convenuto nel piano generato da $\hat{\tau}_r(t)$ e $\hat{n}_r(t)$. Se moltiplichiamo (18) scalarmente per $\hat{\tau}_r(t)$ otteniamo che

$$a(t) = r''(t) \cdot \hat{\tau}_r(t),$$

che in realtà non è una formula tanto interessante in quanto $a(t)$ può essere calcolata derivando direttamente $v(t)$. Conoscendo la velocità scalare e $\hat{\tau}_r(t)$, si possono ricavare la curvatura e la normale principale mediante

$$k_r(t)\hat{n}_r(t) = r''(t) - a(t)\hat{\tau}_r(t).$$

Nel caso in cui la curva sia in $\mathbf{R}^3$, si può anche moltiplicare la (18) vettorialmente per $\hat{\tau}_r(t)$ in modo da ottenere

$$\hat{\tau}_r(t) \times r''(t) = v^2(t)k_r(t)\hat{\tau}_r(t) \times \hat{n}_r(t).$$

Il vettore $b_r(t) = \hat{\tau}_r(t) \times \hat{n}_r(t)$, chiamato *binormale alla curva* r , ha norma 1, è ortogonale sia a $\hat{\tau}_r(t)$ che a $\hat{n}_r(t)$ e quindi il sistema $\{\hat{\tau}_r(t), \hat{n}_r(t), b_r(t)\}$ definisce una base destrorsa di $\mathbf{R}^3$; tale sistema viene chiamato *terna di Frenet*. Se ne deduce che la curvatura di r può essere calcolata come

$$k_r(t) = \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3}.$$