① D_1: dominio interno al cilindro $x^2 + y^2 - 2x = 0$, tra il piano $z = 0$ e la superficie $z = x + 1$;
② D_2: dominio del I ottante al di sotto della superficie $z = 1 - x^2 - y^2$.

$$\left[① \frac{14128}{1575}; ② \frac{1}{240}\right]$$

25 Calcolare i seguenti integrali tripli:

$$① \iiint_{D_1} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz; \qquad ② \iiint_{D_2} (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz;$$

① D_1: interno della superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - y = 0$;
② D_2: interno della superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, al di sopra del piano $z = 0$.

$$\left[① \frac{\pi}{10}; ② \frac{128}{15}\pi\right]$$

26 Calcolare la massa e le coordinate del baricentro dei seguenti solidi:

① parallelepipedo $\{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 3\}$, avente densità di massa $\delta(x, y, z) = x + y + z$;
② interno della superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, al di sopra del piano $z = 0$, sapendo che la densità nel punto P è uguale alla distanza di P dall'origine.

$$\left[① M = 18, x_B = \frac{19}{36}, y_B = \frac{10}{9}, z_B = \frac{7}{4}; ② M = 8\pi, x_B = y_B = 0, z_B = \frac{4}{5}\right]$$

4 Curve e superfici

4.1 Esercizi svolti e richiami di teoria

4.1.1 Curve

Esercizio 4.1 — Rappresentazione parametrica

Scrivere una rappresentazione parametrica delle seguenti curve:

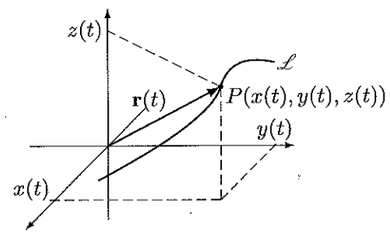
① $\mathscr{L}_1$: *segmento del piano xy, da* $A(3, -1)$ *a* $B(-1, 9)$;
② $\mathscr{L}_2$: *segmento del piano xy, da* $B(-1, 9)$ *a* $A(3, -1)$;
③ $\mathscr{L}_3 : x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$, *percorsa in senso orario a partire da* $(5, 1)$;
④ $\mathscr{L}_4 : (bx)^2 + (ay)^2 = (ab)^2$, *con* $a > 0, b > 0$, *percorsa in senso antiorario a partire da* $(0, b)$;
⑤ $\mathscr{L}_5$: *ramo con* $x > 0$ *dell'iperbole* $x^2 - y^2 = 1$, *percorso nel verso delle y crescenti*;
⑥ $\mathscr{L}_6$: *segmento da* $A(1, 2, 5)$ *a* $B(3, 1, 0)$.

Soluzione

Data una curva $\mathscr{L}$, la scrittura

$$\mathscr{L}: \mathbf{r}(t) = \big[x(t)\big]\mathbf{i} + \big[y(t)\big]\mathbf{j} + \big[z(t)\big]\mathbf{k}, \qquad t \in [a, b]$$

prende il nome di *rappresentazione parametrica* di $\mathscr{L}$, in essa il vettore $\mathbf{r}(t)$ che dall'origine indica il punto $P(x(t), y(t), z(t))$ della curva, corrispondente al valore t del parametro è scritto a partire dalle sue componenti $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$:



notiamo che una curva può avere infinite rappresentazioni parametriche, da queste dipende anche il *verso di percorrenza*, ossia la direzione con cui, al crescere del parametro t, il punto $P(x(t), y(t), z(t))$ si muove lungo la curva stessa.

① $\mathscr{L}_1$ è il segmento che unisce $A(3, -1)$ e $B(-1, 9)$, quindi, detto $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = -4\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$, i suoi punti appartengono alla retta

$$\mathfrak{r} : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

e corrispondono ai valori di t compresi tra $t = 0$ (il punto A) e $t = 1$ (il punto B); in definitiva

$$\mathscr{L}_1 : \mathbf{r}(t) = [3 - 4t]\mathbf{i} + [-1 + 10t]\mathbf{j}, \qquad t \in [0, 1].$$

② $\mathscr{L}_2$ è la stessa curva del punto precedente, cambia il verso di percorrenza; per ottenere la sua rappresentazione parametrica possiamo ragionare in modo analogo al punto ①, ma possiamo anche usare la seguente tecnica, più generale: se una curva ha la rappresentazione

$$\mathbf{r}(t) = [x(t)]\mathbf{i} + [y(t)]\mathbf{j} + [z(t)]\mathbf{k}, \qquad t \in [a, b],$$

la stessa curva, parametrizzata con verso di percorrenza opposto, è

$$\mathbf{r}(t) = [x(b + a - t)]\mathbf{i} + [y(b + a - t)]\mathbf{j} + [z(b + a - t)]\mathbf{k}, \qquad t \in [a, b]$$

(ove naturalmente $x(\cdot)$, $y(\cdot)$ e $z(\cdot)$ sono le stesse funzioni della precedente rappresentazione). Nel nostro caso, allora, la rappresentazione di $\mathscr{L}_2$ è:

$$\mathscr{L}_2 : \mathbf{r}(t) = [3 - 4(1 - t)]\mathbf{i} + [-1 + 10(1 - t)]\mathbf{j}, \qquad t \in [0, 1],$$

e cioè

$$\mathscr{L}_2 : \mathbf{r}(t) = [-1 + 4t]\mathbf{i} + [9 - 10t]\mathbf{j}, \qquad t \in [0, 1].$$

③ L'equazione $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ è l'equazione di una circonferenza, sappiamo che i punti della generica circonferenza avente centro in (x_0, y_0) e raggio R possono essere descritti dalle equazioni

$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos\alpha \\ y = y_0 + R\sin\alpha \end{cases},$$

se $\alpha \in [0, 2\pi]$ la circonferenza verrà percorsa in senso antiorario a partire dal punto di ascissa massima, se invece $\alpha \in [-\pi, \pi]$ la circonferenza verrà percorsa, sempre in senso antiorario, a partire dal punto di ascissa minima. Nel nostro caso $(x_0, y_0) = (2, 1)$ e $R = 3$, inoltre a partire dal punto $(5, 1)$ (ossia dal punto di ascissa massima) dobbiamo percorrere la circonferenza in senso orario; possiamo, come nel punto precedente, sostituire α con $2\pi - \alpha$ nella parametrizzazione

$$\begin{cases} x = 2 + 3\cos(2\pi - \alpha) \\ y = 1 + 3\sin(2\pi - \alpha) \end{cases},$$

e poiché $\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$ e $\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha$ otteniamo

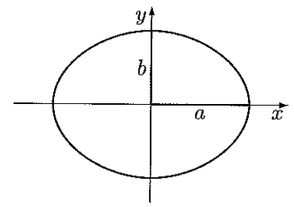
$$\mathscr{L}_3 : \mathbf{r}(\alpha) = [2 + 3\cos\alpha]\mathbf{i} + [1 - 3\sin\alpha]\mathbf{j}, \qquad \alpha \in [0, 2\pi].$$

In alternativa, avremmo potuto osservare che sarebbe stato sufficiente cambiare il segno a $\sin\alpha$.

④ L'equazione $(bx)^2 + (ay)^2 = (ab)^2$ (con $a > 0, b > 0$) si può riscrivere come

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

e questa è l'equazione di un'ellisse con centro nell'origine e assi orizzontale e verticale uguali a a e b rispettivamente:



la parametrizzazione di questa elisse è in genere

$$\begin{cases} x = a\cos\alpha \\ y = b\sin\alpha \end{cases},$$

e α ha gli stessi limiti visti più sopra per la circonferenza. Nel nostro caso, dobbiamo percorrere l'ellisse in senso antiorario, però a partire dal punto $(0, b)$, possiamo allora sommare $\frac{\pi}{2}$ a α, ottenendo

$$\mathscr{L}_4 : \mathbf{r}(\alpha) = \left[a\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right]\mathbf{i} + \left[b\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right]\mathbf{j}, \qquad \alpha \in [0, 2\pi];$$

oppure, osservando che $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin\alpha$ e $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos\alpha$,

$$\mathscr{L}_4 : \mathbf{r}(\vartheta) = [-a\sin\alpha]\mathbf{i} + [b\cos\alpha]\mathbf{j}, \qquad \alpha \in [0, 2\pi].$$

⑤ È sufficiente esprimere x in funzione di y: poiché $x > 0$ abbiamo $x = \sqrt{1 + y^2}$, scegliamo allora y come parametro (cioè $t = y$) e, poiché y può assumere qualsiasi valore reale, otteniamo

$$\mathscr{L}_5 : \mathbf{r}(t) = \left[\sqrt{1 + t^2}\right]\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

⑥ La procedura da seguire è la stessa del punto ①, occorre solo considerare anche le componenti in z: poiché $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ abbiamo

$$\mathscr{L}_6 : \mathbf{r}(t) = [1 + 2t]\mathbf{i} + [2 - t]\mathbf{j} + [5 - 5t]\mathbf{k}, \qquad t \in [0, 1].$$

Esercizio 4.2 — Nomenclatura

Stabilire se ciascuna delle seguenti curve è chiusa, semplice, regolare:

① $\mathscr{L}_1 : \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, $t \in [0, 4]$;
② $\mathscr{L}_2 : \mathbf{r}(t) = [\cos t]\mathbf{i} + [\pi - |t|]\mathbf{j} + [\sin t]\mathbf{k}$, $t \in [-\pi, \pi]$;
③ $\mathscr{L}_3 : \mathbf{r}(t) = [\cos t]\mathbf{i} + [\sin 2t]\mathbf{j}$, $t \in [0, 2\pi]$;
④ $\mathscr{L}_4 : \mathbf{r}(t) = [t^2 \operatorname{Sh} t]\mathbf{i} + [e^{-t^2}]\mathbf{j}$, $t \in \mathbb{R}$;
⑤ $\mathscr{L}_5 : \mathbf{r}(t) = [\cos t]\mathbf{i} + [\sin t]\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $t \in [0, 2\pi]$ *(elica cilindrica)*.

Soluzione

Una curva

$$\mathscr{L} : \mathbf{r}(t) = [x(t)]\mathbf{i} + [y(t)]\mathbf{j} + [z(t)]\mathbf{k}, \qquad t \in [a, b]$$

si dice *chiusa* se il punto iniziale e il punto finale coincidono: $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$; si dice *semplice* se non passa più volte per uno stesso punto (fatta eccezione, eventualmente, per il punto iniziale e finale nel caso di una curva chiusa):

$$\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2), \quad \forall t_1, t_2 \in (a, b);$$

si dice *regolare* se $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ sono derivabili e

$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2 \neq 0, \quad \forall t \in (a, b).$$

Controllare se una curva sia chiusa e regolare è immediato, controllare che sia semplice può essere più difficile.

① Osserviamo che

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{r}(4) = 4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 16\mathbf{k},$$

quindi la curva non è chiusa, inoltre

$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2 = 1 + 4 + 4t^2 \neq 0 \quad \forall t \in (0, 4),$$

quindi la curva è regolare; per mostrare che la curva è semplice possiamo ad esempio notare che la componente in x, ossia $x(t) = t$, è una funzione *strettamente crescente* del parametro t, pertanto due valori diversi di t non possono corrispondere a punti aventi la stessa ascissa, e quindi non possono corrispondere allo stesso punto.

② Osserviamo che

$$\mathbf{r}(-\pi) = -\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}, \qquad \mathbf{r}(\pi) = -\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k},$$

quindi $\mathscr{L}_2$ è chiusa; $\mathscr{L}_2$ non è regolare, infatti $y(t) = \pi - |t|$ non è derivabile in $(-\pi, \pi)$, poiché però l'unico punto di non derivabilità corrisponde a $t = 0$, per $t \neq 0$ abbiamo

$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2 = \sin^2 t + 1 + \cos^2 t = 2 \quad \forall t \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi);$$

poiché l'intervallo in cui $\mathscr{L}_2$ non è regolare è stato scomposto in due intervalli ove invece essa è regolare, si dice che $\mathscr{L}_2$ è *regolare a tratti*. Per controllare se $\mathscr{L}_2$ è semplice, cominciamo col vedere se una delle sue componenti può assumere lo stesso valore con diversi valori di t, in corrispondenza dei valori trovati controlleremo poi le componenti restanti; $\cos(t_1) = \cos(t_2)$ se e solo se $t_2 = -t_1$; pensiamo allora che $t_1 = \gamma$ sia positivo, o meglio $0 < \gamma < \pi$ (γ dev'essere diverso da π perché $\gamma = \pi$ indica il punto finale, e dev'essere diverso da 0, perché altrimenti $t_2 = -t_1 = 0$), ponendo $t_2 = -\gamma$ nella rappresentazione di $\mathscr{L}_2$ troviamo

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\gamma) &= [\cos\gamma]\mathbf{i} + [\pi - \gamma]\mathbf{j} + [\sin\gamma]\mathbf{k} \\ \mathbf{r}(-\gamma) &= [\cos(-\gamma)]\mathbf{i} + [\pi - |-\gamma|]\mathbf{j} + [\sin(-\gamma)]\mathbf{k} \\ &= [\cos\gamma]\mathbf{i} + [\pi - \gamma]\mathbf{j} + [-\sin\gamma]\mathbf{k} \end{aligned}$$

la prima e la seconda componente sono uguali, mentre per ogni $\gamma \in (0, \pi)$ abbiamo $\sin(\gamma) \neq -\sin(\gamma)$, quindi $\mathscr{L}_2$ è semplice.

③ Osserviamo che $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(2\pi) = \mathbf{i} + 0\mathbf{j}$, quindi la curva è chiusa, inoltre $\forall t \in (0, 2\pi)$

$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 = \sin^2 t + 4\cos^2(2t) = 4 - 15\sin^2 t + 16\sin^4 t > 0,$$

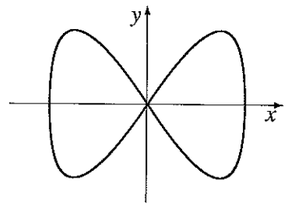
quindi $\mathscr{L}_3$ è regolare. Per controllare se $\mathscr{L}_3$ è semplice, serviamoci della stessa tecnica del punto precedente, poiché $t \in (0, 2\pi)$, $\cos(t_1) = \cos(t_2)$ se e solo se $t_2 = 2\pi - t_1$, quindi ponendo rispettivamente $t = \gamma$ e $t = 2\pi - \gamma$ troviamo (osservando che $\sin(4\pi - 2\gamma) = -\sin 2\gamma$)

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\gamma) &= [\cos\gamma]\mathbf{i} + [\sin 2\gamma]\mathbf{j} \\ \mathbf{r}(2\pi - \gamma) &= [\cos(2\pi - \gamma)]\mathbf{i} + [\sin 2(2\pi - \gamma)]\mathbf{j} \\ &= [\cos\gamma]\mathbf{i} + [-\sin 2\gamma]\mathbf{j} \end{aligned}$$

l'equazione $\sin(2\gamma) = -\sin(2\gamma)$ implica $\sin(2\gamma) = 0$ e per $\gamma \in (0, 2\pi)$ ammette come soluzioni $\gamma = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$, ricordando che $t_1 = \gamma$, $t_2 = 2\pi - \gamma$ abbiamo

$$\gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{\pi}{2} \\ t_2 = \frac{3}{2}\pi \end{cases}, \quad \gamma = \pi \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \pi \\ t_2 = \pi \end{cases}, \quad \gamma = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{3}{2}\pi \\ t_2 = \frac{\pi}{2} \end{cases};$$

nel primo caso leggiamo che $\mathbf{r}(\frac{\pi}{2}) = \mathbf{r}(\frac{3}{2}\pi)$, nel secondo caso $t_1 = t_2$, quindi non corrisponde ad alcun punto doppio, il terzo caso corrisponde al primo; concludendo, la curva ha un punto doppio: $\mathbf{r}(\frac{\pi}{2}) = \mathbf{r}(\frac{3}{2}\pi) = \mathbf{0}$. Il grafico di $\mathscr{L}_3$ è il seguente:



④ Poiché t varia in $\mathbb{R}$, la curva non è chiusa, inoltre

$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 = (2t\mathrm{Sh}\, t + t^2\mathrm{Ch}\, t)^2 + (-2te^{-t^2})^2,$$

ossia, raccogliendo t^2,

$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 = t^2\left[4e^{-2t^2} + (2\mathrm{Sh}\, t + t\mathrm{Ch}\, t)^2\right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0;$$

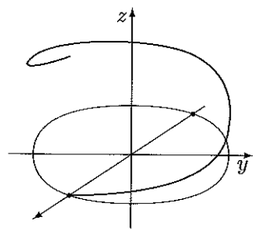
ne segue che $\mathscr{L}_4$ è regolare a tratti, su $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Inoltre $\mathscr{L}_4$ è semplice, infatti $e^{-t_1^2} = e^{-t_2^2}$ se e solo se, posto $t_1 = \tau$, $t_2 = -\tau$, ma $(-\tau)^2\mathrm{Sh}\,(-\tau) = -\tau^2\mathrm{Sh}\,\tau$ e

$$(-\tau)^2\mathrm{Sh}\,(-\tau) = -\tau^2\mathrm{Sh}\,\tau \quad \Rightarrow \quad \tau = 0.$$

⑤ Osserviamo che $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i}$ mentre $\mathbf{r}(2\pi) = \mathbf{i} + 2\pi\mathbf{k}$, quindi $\mathscr{L}_5$ non è chiusa, inoltre

$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2 = \sin^2 t + \cos^2 t + 1 = 2 \quad \forall t \in (0, 2\pi),$$

quindi $\mathscr{L}_5$ è regolare. Infine, la sua componente rispetto a z: $z(t) = t$ è monotona crescente, quindi $\mathscr{L}_5$ è semplice.



Esercizio 4.3 — Curve piane — Rappresentazione cartesiana

Scrivere una rappresentazione parametrica delle seguenti curve:

① $\mathscr{L}_1$: *ramo di parabola* $y = x^2 - 1$, $\quad x \in [-2, 4]$;

② $\mathscr{L}_2$: *semicirconferenza* $y = \sqrt{1 - x^2}$, $\quad x \in [-1, 1]$;

date le seguenti curve in forma parametrica, scriverne (ove possibile) la rappresentazione cartesiana, altrimenti spiegare perché non è possibile:

③ $\mathscr{L}_3 : \mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + [\cos 2t]\mathbf{j}$, $\quad t \in [0, 2\pi]$;

④ $\mathscr{L}_4 : \mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + [\sin 2t]\mathbf{j}$, $\quad t \in [-2\pi, 2\pi]$;

⑤ $\mathscr{L}_5 : \mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + [\cos 2t]\mathbf{j}$, $\quad t \in [0, \pi]$;

⑥ $\mathscr{L}_6 : \mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + [\sin 2t]\mathbf{j}$, $\quad t \in [-\pi, \pi]$.

Soluzione

Una curva piana è detta in *forma cartesiana* se è descritta come $y = f(x)$, con $x \in [a, b]$, ovviamente una curva in forma cartesiana può essere sempre riscritta in forma parametrica, ponendo $x(t) = t$ e $y(t) = f(t)$. Viceversa, una curva in forma parametrica non sempre può essere scritta in forma cartesiana, dev'essere possibile esprimere $y(t)$ in funzione di $x(t)$.

① ② Ponendo $x = t$, abbiamo immediatamente:

$$\mathscr{L}_1 : \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + [t^2 - 1]\mathbf{j}, \qquad t \in [-2, 4];$$

$$\mathscr{L}_2 : \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \left[\sqrt{1 - t^2}\right]\mathbf{j}, \quad t \in [-1, 1].$$

③ Esprimendo t in funzione di x, ricaviamo

$$\begin{cases} x = t^3 \\ t \in [0, 2\pi] \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t = \sqrt[3]{x} \\ x \in [0, 8\pi^3] \end{cases};$$

pertanto $y(t) = \cos 2t$ diventa $y(t(x)) = f(x) = \cos 2\sqrt[3]{x}$, e l'espressione cartesiana cercata è

$$\mathscr{L}_3 : y = \cos 2\sqrt[3]{x}, \qquad x \in [0, 8\pi^3].$$

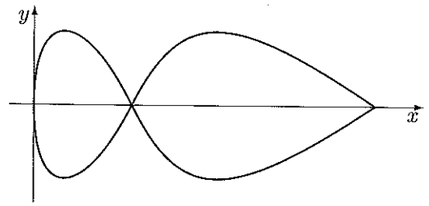
④ Ci troviamo nella stessa situazione del punto precedente, l'unica differenza consiste nel campo di variazione della x: da $x = t^3$ con $t \in [-2\pi, 2\pi]$ troviamo $t = \sqrt[3]{x}$ con $x \in [-8\pi^3, 8\pi^3]$, pertanto l'espressione cartesiana è

$$\mathscr{L}_4 : y = \sin 2\sqrt[3]{x}, \qquad x \in [-8\pi^3, 8\pi^3].$$

⑤ Anche in questo caso possiamo seguire la strada degli esempi precedenti: da $x = t^2$ con $t \in [0, \pi]$ ricaviamo $t = \sqrt{x}$ con $x \in [0, \pi^2]$, pertanto l'espressione cartesiana è

$$\mathscr{L}_5 : y = \cos 2\sqrt{x}, \qquad x \in [0, \pi^2].$$

⑥ In questo caso, l'espressione $x = t^2$ con $t \in [-\pi, \pi]$ non è invertibile, e quindi non v'è modo di esprimere la curva $\mathscr{L}_6$ in forma cartesiana. In effetti il suo grafico non è il grafico di alcuna funzione:



Esercizio 4.4 — Curve piane — Rappresentazione polare

Scrivere una rappresentazione parametrica delle seguenti curve:

① $\mathscr{L}_1 : \varrho = k\vartheta$ $\qquad \vartheta \in [0, 4\pi]$, *(spirale di Archimede)*;

② $\mathscr{L}_2 : \varrho = \vartheta(2\pi - \vartheta)$, $\quad \vartheta \in [0, 2\pi]$;

date le seguenti curve in forma parametrica, scriverne (ove possibile) la rappresentazione polare, altrimenti spiegare perché non è possibile:

③ $\mathscr{L}_3 : \mathbf{r}(t) = [2\cos^2 t]\mathbf{i} + [\sin 2t]\mathbf{j}$, $\quad t \in [0, \pi]$;

④ $\mathscr{L}_4 : \mathbf{r}(t) = [t\sqrt{1 - t^2}]\mathbf{i} + [t^2]\mathbf{j}$, $\quad t \in [0, 1]$;

⑤ $\mathscr{L}_5 : \mathbf{r}(t) = [\cos^3 t]\mathbf{i} + [\sin^3 t]\mathbf{j}$, $\quad t \in [0, 2\pi]$ *(astroide)*.

Soluzione

Si dice rappresentazione *polare* di una curva $\mathscr{L}$ una scrittura della forma $\varrho = f(\vartheta)$ ($\vartheta \in [\alpha, \beta]$), ove ϱ e ϑ sono le cooordinate polari del piano. Il legame tra coordinate cartesiane e polari $x = \varrho\cos\vartheta$, $y = \varrho\sin\vartheta$, consente, nel caso di una curva in forma polare, di scriverne immediatamente la forma parametrica:

$$\begin{array}{l} \varrho = f(\vartheta), \\ \Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \vartheta \in [\alpha, \beta]. \\ \mathbf{r}(\vartheta) = [f(\vartheta)\cos\vartheta]\mathbf{i} + [f(\vartheta)\sin\vartheta]\mathbf{j}, \end{array}$$

Invece, data una curva in forma parametrica, è possibile scriverne la forma polare unicamente se le espressioni $x(t)$ e $y(t)$ si possono fattorizzare come il prodotto della stessa funzione $f(t)$ rispettivamente per $\cos t$ e $\sin t$.

① Ponendo $f(\vartheta) = k\vartheta$, abbiamo immediatamente:

$$\mathscr{L}_1 : \mathbf{r}(\vartheta) = [k\vartheta\cos\vartheta]\mathbf{i} + [k\vartheta\sin\vartheta]\mathbf{j}, \qquad \vartheta \in [0, 4\pi].$$

② Ponendo $f(\vartheta) = \vartheta(2\pi - \vartheta)$, abbiamo immediatamente:

$$\mathscr{L}_2 : \mathbf{r}(\vartheta) = [\vartheta(2\pi - \vartheta)\cos\vartheta]\mathbf{i} + [\vartheta(2\pi - \vartheta)\sin\vartheta]\mathbf{j}, \qquad \vartheta \in [0, 2\pi].$$

③ La curva $\mathscr{L}_3$ è esprimibile in forma polare se è possibile scrivere le sue componenti nella forma

$$[f(\vartheta)\cos\vartheta], \qquad [f(\vartheta)\sin\vartheta];$$

poiché $\sin 2t = 2\sin t\cos t$, raccogliendo $2\cos t$ possiamo scrivere:

$$[2\cos^2 t]\mathbf{i} + [\sin 2t]\mathbf{j} = 2\cos t\big[\cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}\big],$$

e quindi l'equazione polare di $\mathscr{L}_3$ è $\varrho = 2\cos t$, con $t \in [0, \pi]$.

④ $\mathscr{L}_4$ è esprimibile in coordinate polari, se infatti raccogliamo t nella sua espressione ricaviamo

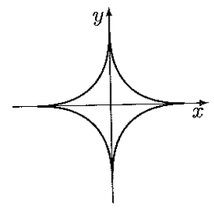
$$[t\sqrt{1 - t^2}]\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} = t\left[\sqrt{1 - t^2}\mathbf{i} + t\mathbf{j}\right],$$

ponendo $t = \sin\vartheta$ e quindi $\sqrt{1 - t^2} = \cos\vartheta$, se $t \in [0, 1]$ allora $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e quindi

$$\mathscr{L}_4 : \mathbf{r}(\vartheta) = \sin\vartheta\,[\cos\vartheta\mathbf{i} + \sin\vartheta\mathbf{j}], \qquad \vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right];$$

e l'equazione polare cercata è $\varrho = \sin\vartheta$, con $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

⑤ La curva $\mathscr{L}_5$ non è immediatamente esprimibile in forma polare: infatti raccogliendo $\cos t$ nella prima componente e $\sin t$ nella seconda non rimane la stessa funzione. Tuttavia, il grafico di $\mathscr{L}_5$ è il seguente:



e, sebbene sia evidente che ad ogni $\vartheta \in [0, 2\pi]$ corrisponda un solo valore di ϱ, questo legame non è di immediata scrittura.

Esercizio 4.5 — Curve intersezione di due superfici

Scrivere una rappresentazione parametrica delle seguenti curve:

① $\mathscr{L}_1$*: intersezione del piano* $5x - 2y + z = 4$ *con il cilindro* $x^2 + y^2 = 1$;

② $\mathscr{L}_2$*: intersezione del piano* $2x - z = 3$ *con la superficie* $z^3 - 2x^2 - y^3 + xz = 0$;

③ $\mathscr{L}_3$: *intersezione del cilindro* $x^2 + y^2 - x = 0$ *con la sfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (*curva di Viviani*).

Soluzione

Per trovare una rappresentazione parametrica di una curva intersezione di due superfici, può essere utile incominciare a identificare un parametro, del quale servirsi poi per descrivere la curva.

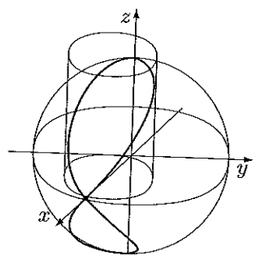
① L'intersezione del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con il piano $5x - 2y + z = 4$ è un'ellisse, i suoi punti sono in corrispodenza biunivoca con i punti della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ nel piano xy, parametrizziamo allora questa circonferenza con $(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$, al punto sulla circonferenza, di coordinate $x = \cos\vartheta$, $y = \sin\vartheta$ corrisponde sul piano (e quindi sull'intersezione di piano e cilindro) il punto di quota $z = 4 - 5x + 2y = 4 - 5\cos\vartheta + 2\sin\vartheta$, pertanto un'espressione parametrica di $\mathscr{L}_1$ è

$$\mathscr{L}_1 : \mathbf{r}(t) = [\cos\vartheta]\mathbf{i} + [\sin\vartheta]\mathbf{j} + [4 - 5\cos\vartheta + 2\sin\vartheta]\mathbf{k}, \qquad \vartheta \in [0, 2\pi].$$

② Anche in questo caso, iniziamo a identificare un possibile parametro: dall'equazione del piano possiamo esprimere z in funzione di x: $z = 2x - 3$, poiché poi l'equazione della superficie permette di esprimere tutto in funzione di y: $y^3 = z^3 - x^2 + xz$ ossia $y = \sqrt[3]{z^3 - x^2 + xz}$, possiamo porre direttamente $x = t$, con $t \in \mathbb{R}$ e scrivere

$$\mathscr{L}_2 : \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \left[\sqrt[3]{(2t-3)^3 - t^2 + t(2t-3)}\right]\mathbf{j} + [2t - 3]\mathbf{k}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

③ L'intersezione del cilindro, avente asse verticale in corrispondenza del punto $(\frac{1}{2}, 0)$ e raggio $\frac{1}{2}$, con la sfera di raggio unitario centrata nell'origine è rappresentata da una curva "a otto" che si depone per metà sull'emisfero superiore e per l'altra metà sull'emisfero inferiore.



Per descriverla tutta, è necessario effettuare due interi giri sulla circonferenza di base del cilindro, se per questa circonferenza usiamo la parametrizzazione usuale:

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\alpha, \qquad y = \frac{1}{2}\sin\alpha$$

possiamo porre $\alpha \in [0, 4\pi]$: per $\alpha = 0, 2\pi, 4\pi$ ci troviamo in corrispondenza dell'incrocio, stabiliamo allora che se $\alpha \in [0, 2\pi]$ percorriamo l'anello superiore, mentre se $\alpha \in [2\pi, 4\pi]$ percorriamo l'anello inferiore. Osserviamo che, poiché la metà superiore della sfera ha equazione $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ mentre la metà inferiore ha equazione $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, la parametrizzazione di $\mathscr{L}_3$ sarà allora

$$\mathscr{L}_3 : \mathbf{r}(\alpha) = \begin{cases} \left[\frac{1+\cos\alpha}{2}\right]\mathbf{i} + \left[\frac{\sin\alpha}{2}\right]\mathbf{j} + \left[\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\right]\mathbf{k} & \alpha \in [0, 2\pi] \\ \left[\frac{1+\cos\alpha}{2}\right]\mathbf{i} + \left[\frac{\sin\alpha}{2}\right]\mathbf{j} + \left[-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\right]\mathbf{k} & \alpha \in (2\pi, 4\pi] \end{cases};$$

grazie alle formule di bisezione[a], possiamo allora scrivere un'espressione più agevole:

$$\mathscr{L}_3 : \mathbf{r}(\alpha) = \left[\frac{1+\cos\alpha}{2}\right]\mathbf{i} + \left[\frac{\sin\alpha}{2}\right]\mathbf{j} + \left[\sin\frac{\alpha}{2}\right]\mathbf{k}, \qquad \alpha \in [0, 4\pi].$$

Esercizio 4.6 — Vettore tangente a un curva

Scrivere l'equazione della retta tangente alle curve qui sotto elencate, nel punto indicato:

① $\mathscr{L}_1 : \mathbf{r}(t) = 2e^t\mathbf{i} - [t^2 + \log t]\mathbf{j}$, $P_1(2e^2, -4 - \log 2)$;

② $\mathscr{L}_2 : \varrho = 2\vartheta$, $P_2(0, \pi)$;

③ $\mathscr{L}_3 : \mathbf{r}(t) = [2\cos t]\mathbf{i} + [t\sin t]\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, $P_3\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi^2}{36}\right)$.

Soluzione

Data la curva $\mathscr{L} : \mathbf{r}(t)$, il vettore tangente a essa in corrispondenza del generico valore di t è dato da[b]

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}.$$

Per scrivere l'equazione della retta tangente a $\mathscr{L}$ in un certo punto $\bar{P}$, è sufficiente conoscere il valore di $\mathbf{r}'(\bar{t})$ (ove $\bar{t}$ è il valore del parametro corrispondente al punto $\bar{P}$).

---

[a] Infatti

$$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \begin{cases} \sin\frac{\alpha}{2} & \alpha \in [0, 2\pi] \\ -\sin\frac{\alpha}{2} & \alpha \in (2\pi, 4\pi] \end{cases}.$$

[b] Possiamo allora reinterpretare la definizione di curva regolare in (a, b): la curva $\mathscr{L}$ è regolare in (a, b) se $|\mathbf{r}'(t)| \neq 0$ pr ogni $t \in (a, b)$.

① Il punto $P_1(2e^2, -4 - \log 2)$ corrisponde al valore $t = 2$, infatti dalla prima componente abbiamo $2e^t = 2e^2$, pertanto $t = 2$, controllando nella seconda componente:

$$-t^2 - \log t \overset{t=2}{=} -4 - \log 2;$$

inoltre, poiché

$$\mathbf{r}'(t) = 2e^t\mathbf{i} - \left[2t + \frac{1}{t}\right]\mathbf{j}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}'(2) = 2e^2\mathbf{i} - \left[\frac{9}{2}\right]\mathbf{j};$$

pertanto la retta cercata è

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^2 \\ -4 - \log 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 4e^2 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

② Esprimiamo innanzitutto $\mathscr{L}_2$ in forma parametrica:

$$\mathscr{L}_2 : \mathbf{r}(t) = [2\vartheta \cos \vartheta]\mathbf{i} + [2\vartheta \sin \vartheta]\mathbf{j},$$

operando come sopra, osserviamo che P_2 corrisponde a $\vartheta = \frac{\pi}{2}$; inoltre

$$\mathbf{r}'(t) = [2\cos\vartheta - 2\vartheta \sin\vartheta]\mathbf{i} + [2\sin\vartheta + 2\vartheta\cos\vartheta]\mathbf{j}, \Rightarrow \mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi\mathbf{i} + 2\mathbf{j};$$

e pertanto la retta cercata è

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \pi \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\pi \\ 2 \end{bmatrix}.$$

③ Osserviamo che P_3 corrisponde a $t = \frac{\pi}{6}$. Dopodiché

$$\mathbf{r}'(t) = [-2\sin t]\mathbf{i} + [\sin t + t\cos t]\mathbf{j} + 2t\mathbf{k},$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}\mathbf{i} + \left[\frac{\pi + 4\sqrt{3}}{12}\right]\mathbf{j} + \frac{\pi}{3}\mathbf{k};$$

e pertanto la retta tangente è (moltiplicando $\mathbf{r}'(\frac{\pi}{6})$ per 12)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ \pi/12 \\ \pi^2/36 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -12\sqrt{3} \\ \pi + 4\sqrt{3} \\ 4\pi \end{bmatrix}.$$

Esercizio 4.7 — Curvatura Cerchio osculatore — Piano osculatore

Per ciascuna delle curve qui sotto elencate, determinare il raggio di curvatura nel punto indicato:

① $\mathscr{L}_1 : \mathbf{r}(t) = [3t + t^3]\mathbf{i} + [2t^2 + t^4]\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $P_1(4, 3, 1)$;

② $\mathscr{L}_2$: *parabola* $y = x^2$, $P_2(1, 1)$;

③ $\mathscr{L}_3 : \varrho = (1 + \cos\vartheta)$, $P_3\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\sqrt{3}\right)$.

per la curva $\mathscr{L}_1$ scrivere l'equazione del piano osculatore, per le curve $\mathscr{L}_2$ e $\mathscr{L}_3$, scrivere l'equazione del cerchio osculatore.

Soluzione

Data $\mathscr{L} : \mathbf{r}(t)$, dalla teoria sappiamo che la curvatura $\kappa(t)$ di $\mathscr{L}$ nel punto corrispondente al generico t è data da

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}.$$

Sappiamo inoltre che $\mathbf{r}''(t)$ punta verso l'"interno" della curva $\mathscr{L}$, ossia dalla parte da cui si trova il *cerchio osculatore*, il cui raggio (*raggio di curvatura*) è dato da $R = \frac{1}{\kappa(t)}$; inoltre, se $\mathscr{L} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r}'(t)$ e $\mathbf{r}''(t)$ individuano il *piano osculatore* della curva nel punto corrispondente a t.

① P_1 corrisponde a $t = 1$, inoltre

$$\mathbf{r}'(t) = [3 + 3t^2]\mathbf{i} + [4t + 4t^3]\mathbf{j} + \mathbf{k}, \qquad \mathbf{r}''(t) = 6t\mathbf{i} + [4 + 12t^2]\mathbf{j};$$

pertanto $\mathbf{r}'(1) = 6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{r}''(1) = 6\mathbf{i} + 16\mathbf{j}$. Nel punto P_1 la curvatura e il raggio di curvatura sono dati da

$$\kappa = \frac{|-16\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 48\mathbf{k}|}{|6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + \mathbf{k}|^3} = \sqrt{\frac{2596}{101^3}}, \qquad R = \sqrt{\frac{101^3}{2596}}.$$

Il piano osculatore di $\mathscr{L}_1$ nel punto P_1 ha come vettore perpendicolare $\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t)$, ossia $-16\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 48\mathbf{k}$, la sua equazione è pertanto

$$-16x + 6y + 48z = 2, \quad \text{ossia} \quad 8x - 3y - 24z = -1.$$

② Parametrizziamo la parabola $\mathscr{L}_2 : \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, poiché $P_2(1, 1)$ corrisponde a $t = 1$ troviamo che

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j}, \ \mathbf{r}''(t) = 2\mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}'(1) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}, \quad \mathbf{r}''(1) = 2\mathbf{j};$$

pertanto la curvatura e il raggio di curvatura quando $t = 1$ valgono[c]

$$\kappa = \frac{|2\mathbf{k}|}{|\mathbf{i} + 2\mathbf{j}|^3} = \frac{2}{25}\sqrt{5}, \qquad R = \frac{5}{2}\sqrt{5}.$$

Il cerchio osculatore di $\mathscr{L}_2$ ha raggio R, il suo centro si trova a distanza $\frac{5}{2}\sqrt{5}$ da P_2 nella direzione perpendicolare alla retta tangente, ossia nella direzione perpendicolare a $\mathbf{r}'$, nel verso delle y (crescenti in accordo con il verso di $\mathbf{r}''$), questa direzione è individuata dal vettore $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j}$; per trovare il centro è sufficiente aggiungere alle coordinate di P_2 un vettore come $\mathbf{v}$, di lunghezza pari a R:

$$[x_C, y_C] = [1, 1] + \frac{5}{2}\sqrt{5}\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \left[-4, \frac{7}{2}\right]$$

il cerchio osculatore ha quindi centro in $(-4, \frac{7}{2})$ e raggio $R = \frac{5}{2}\sqrt{5}$, l'equazione è

$$(x+4)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\sqrt{5}\right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + y^2 + 8x - 7y = 3.$$

③ Esprimiamo $\mathscr{L}_3$ in forma parametrica

$$\mathbf{r}(t) = (1 + \cos t)\big[\cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}\big],$$

e osserviamo che P_3 corrisponde a $t = \frac{\pi}{3}$, poiché

$$\mathbf{r}'(t) = [-\sin t - 2\cos t \sin t]\mathbf{i} + [\cos t + \cos^2 t - \sin^2 t]\mathbf{j},$$

$$\mathbf{r}''(t) = [-\cos t - 2\cos^2 t + 2\sin^2 t]\mathbf{i} + [-\sin t - 4\cos t \sin t]\mathbf{j},$$

e quindi

$$\mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}\mathbf{i} \quad \mathbf{r}''\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}; \quad \mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{3}\right) \wedge \mathbf{r}''\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{9}{2}\mathbf{k},$$

pertanto la curvatura e il raggio di curvatura quando $t = \frac{\pi}{3}$ valgono

$$\kappa = \frac{\left|\frac{9}{2}\mathbf{k}\right|}{|-\sqrt{3}\mathbf{i}|^3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad R = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

[c] Si può dimostrare che, se la curva $\mathscr{L}$ è data in forma cartesiana, allora la curvatura nel punto $(x, y(x))$ è data da

$$\kappa = \frac{|y''(x)|}{|1 + [y'(x)]^2|^{(3/2)}}.$$

Il centro del cerchio osculatore è pertanto posto sulla verticale del punto P_3, verso il basso (concordemente con $\mathbf{r}''$) a distanza $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ da P_3, e cioè nel punto

$$(x_C, y_C) = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\sqrt{3} - \frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{12}\right),$$

e la sua equazione è

$$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{12}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2,$$

ossia $12x^2 + 12y^2 - 18x - 2\sqrt{3}y = 9$.

Osservazione importante: *Cerchi osculatori nello spazio*
Anche in $\mathbb{R}^3$ è possibile parlare di cerchi osculatori; tuttavia, a differenza di quanto accade nel piano, la loro equazione si può scrivere sotto forma di intersezione tra il piano osculatore e la sfera che ha lo stesso centro e lo stesso raggio del cerchio osculatore.

Esercizio 4.8 — Terna intrinseca

Data la linea

$$\mathscr{L}: \mathbf{r}(t) = [t^2 + 1]\mathbf{i} + [t^3 - 2]\mathbf{j} + [2t]\mathbf{k},$$

scrivere la terna intrinseca relativa al punto $P(5, 6, 4)$.

Soluzione

Data la generica linea regolare $\mathscr{L}: \mathbf{r}(t)$, è detta *terna intrinseca* nel punto $P \in \mathscr{L}$ la terna di versori $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ ove

- $\mathbf{T}$ è il *versore tangente* a $\mathscr{L}$ in P, diretto come $\mathbf{r}'(t)$ e di lunghezza unitaria, pertanto

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|};$$

- $\mathbf{N}$ è il *versore normale* a $\mathscr{L}$ in P, $\mathbf{N}$ punta nella direzione del centro del cerchio osculatore a $\mathscr{L}$ in P, pertanto $\mathbf{T}$ e $\mathbf{N}$ individuano il piano osculatore, inoltre

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|};$$

- $\mathbf{B}$ è il *versore binormale* a $\mathscr{L}$ in P, forma con $\mathbf{T}$ e $\mathbf{N}$ una terna destrorsa, quindi

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \wedge \mathbf{N}(t).$$

Osserviamo che, se la linea $\mathscr{L}$ ha una generica parametrizzazione in t, una volta calcolato $\mathbf{T}$ è più comodo calcolare $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t)|},$$

e da questo ricavare $\mathbf{N} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{T}$ (sfruttando le proprietà della terna destrorsa). Nel nostro caso, P corrisponde a $t = 2$. Poiché

$$\mathbf{r}'(t) = [2t]\mathbf{i} + [3t^2]\mathbf{j} + [2]\mathbf{k}, \qquad |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{9t^4 + 4t^2 + 4},$$

troviamo che

$$\mathbf{T}(t) = \frac{[2t]\mathbf{i} + [3t^2]\mathbf{j} + [2]\mathbf{k}}{\sqrt{9t^4 + 4t^2 + 4}}, \quad \mathbf{T}(2) = \frac{4\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{164}} = \frac{2}{\sqrt{41}}\mathbf{i} + \frac{6}{\sqrt{41}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{41}}\mathbf{k};$$

inoltre $\mathbf{r}''(t) = 2\mathbf{i} + 6t\mathbf{j}$, pertanto $\mathbf{r}'(t) \wedge \mathbf{r}''(t) = [-12t]\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6t^2\mathbf{k}$, e

$$\mathbf{B}(t) = \frac{[-12t]\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6t^2\mathbf{k}}{\sqrt{36t^4 + 144t^2 + 16}}, \qquad \mathbf{B}(2) = -\frac{6}{\sqrt{73}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{73}}\mathbf{j} + \frac{6}{\sqrt{73}}\mathbf{k}.$$

Infine, $\mathbf{N} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{T}$ e quindi

$$\mathbf{N}(2) = -\frac{35}{\sqrt{2993}}\mathbf{i} + \frac{18}{\sqrt{2993}}\mathbf{j} - \frac{38}{\sqrt{2993}}\mathbf{k}.$$

Esercizio 4.9 — Lunghezza di una curva

Calcolare la lunghezza delle seguenti curve:

① $\mathscr{L}_1 : \mathbf{r}(t) = \left[t^3 + \frac{1}{t} + 2\right]\mathbf{i} + \left[3 + 2\sqrt{3}t\right]\mathbf{j}$, $t \in [1, 4]$;

② $\mathscr{L}_2$: *parabola* $y = x^2$, $x \in [-1, 1]$;

③ $\mathscr{L}_3 : \varrho = e^{\vartheta}$, $\vartheta \in [0, \pi]$;

④ $\mathscr{L}_4 : \mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} - \sqrt{2}t\mathbf{k}$, $t \in [0, 2]$.

Soluzione

Data una curva $\mathscr{L}$: $\mathbf{r}(t)$ con $t \in [a, b]$, la lunghezza di $\mathscr{L}$ è data dalla formula

$$\text{lunghezza } (\mathscr{L}) = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\, \mathrm{d}t.$$

Si può osservare che, nel caso di una curva scritta in forma cartesiana $y = f(x)$ ($x \in [a, b]$) e nel caso di una curva scritta in forma polare $\varrho = g(\vartheta)$ ($\vartheta \in [\alpha, \beta]$), l'espressione $|\mathbf{r}'(t)|$ diventa

$$|\mathbf{r}'(t)|\, \mathrm{d}t = \begin{cases} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, \mathrm{d}x & \text{in forma cartesiana} \\ \sqrt{[g(\vartheta)]^2 + [g'(\vartheta)]^2}\, \mathrm{d}\vartheta & \text{in forma polare} \end{cases};$$

e quindi, nei due casi, l'integrale diventa

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, \mathrm{d}x, \qquad \int_\alpha^\beta \sqrt{[g(\vartheta)]^2 + [g'(\vartheta)]^2}\, \mathrm{d}\vartheta.$$

① Abbiamo

$$\mathbf{r}'(t) = \left[3t^2 - \frac{1}{t^2}\right]\mathbf{i} + \left[2\sqrt{3}\right]\mathbf{j}$$

da cui

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{\left(3t^2 - \frac{1}{t^2}\right)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9t^4 - 6 + \frac{1}{t^4} + 12}$$
$$= \sqrt{\left(3t^2 + \frac{1}{t^2}\right)^2} = 3t^2 + \frac{1}{t^2}$$

pertanto

$$\text{lunghezza } (\mathscr{L}_1) = \int_1^4 \left(3t^2 + \frac{1}{t^2}\right)\, \mathrm{d}t = 64 - \frac{1}{4}.$$

② Usando la formula più sopra citata, abbiamo $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{1 + 4x^2}$ e pertanto

$$\text{lunghezza } (\mathscr{L}_2) = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + 4x^2}\, \mathrm{d}x = 2\int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\, \mathrm{d}x,$$

quest'integrale si calcola per sostituzione[d]:

$$2\int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\, \mathrm{d}x = \left[\begin{smallmatrix} 2x = \mathrm{Sh}\, t \\ 2\,\mathrm{d}x = \mathrm{Ch}\, t\, \mathrm{d}t \end{smallmatrix}\right] = \int_0^{\bar{t}} \sqrt{1 + \mathrm{Sh}^2 t}\, \mathrm{Ch}\, t\, \mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{\bar{t}} \mathrm{Ch}^2 t\, \mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_0^{\bar{t}} \left(e^t + e^{-t}\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}e^{2t} + 2t - \frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^{\log[2+\sqrt{5}]}$$

in definitiva

$$\text{lunghezza}(\mathscr{L}_2) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}e^{2t} + 2t - \frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^{\log[2+\sqrt{5}]} = \sqrt{5} + \frac{\log\left[2 + \sqrt{5}\right]}{2}.$$

③ Usando anche in questo caso la formula scritta sopra, poiché $g(\vartheta) = g'(\vartheta) = e^{\vartheta}$ abbiamo $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{[e^{\vartheta}]^2 + [e^{\vartheta}]^2} = \sqrt{2}e^{\vartheta}$, e quindi

$$\text{lunghezza}(\mathscr{L}_3) = \int_0^\pi \sqrt{2}e^{\vartheta}\, \mathrm{d}\vartheta = \sqrt{2}\left(e^\pi - 1\right).$$

[d] Da $2 = \mathrm{Sh}\, \bar{t}$ si ricava $\bar{t} = \log[2 + \sqrt{5}]$.

④ In questo caso $\mathbf{r}'(t) = e^t\mathbf{i} - e^{-t}\mathbf{j} - \sqrt{2}\mathbf{k}$ e quindi

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2} = \sqrt{(e^t + e^{-t})^2} = e^t + e^{-t},$$

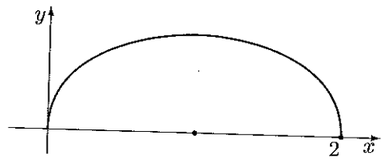
pertanto

$$\text{lunghezza}(\mathscr{L}_4) = \int_0^2 \left(e^t + e^{-t}\right) \mathrm{d}t = e^2 - e^{-2} = 2\mathrm{Sh}\,2.$$

Esercizio 4.10 — Ascissa curvilinea

Determinare la parametrizzazione in termini dell'ascissa curvilinea s della curva seguente (cicloide):

$$\mathscr{L}: \mathbf{r}(t) = [t - \sin t]\mathbf{i} + [1 - \cos t]\mathbf{j}, \quad t \in [0, 2\pi].$$



Soluzione

Data $\mathscr{L}: \mathbf{r}(t)$ con $t \in [a, b]$, l'ascissa curvilinea $s(t)$ rappresenta la lunghezza dell'arco compreso tra $\mathbf{r}(a)$ e $\mathbf{r}(t)$, ossia

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(\tau)| \, \mathrm{d}\tau.$$

Per riparametrizzare $\mathscr{L}$ in termini di s, è necessario[e] determinare t in funzione di s e scrivere $\mathbf{r}$ in funzione di s.
Poiché

$$\mathbf{r}'(t) = [1 - \cos t]\mathbf{i} + [\sin t]\mathbf{j}$$

e quindi $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2 - 2\cos t}$, usando le formule di bisezione ($t \in [0, 2\pi]$, quindi $\frac{t}{2} \in [0, \pi]$) abbiamo

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2 - 2\cos t} = 2\sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}} = 2\sin\frac{t}{2},$$

[e]Dal punto di vista teorico ciò è sempre possibile, infatti s è una funzione crescente in t; non è sempre possibile effettuare esplicitamente questa trasformazione nei casi particolari.

pertanto

$$s(t) = \int_0^t 2\sin\frac{\tau}{2} \, \mathrm{d}\tau = 4\left(1 - \cos\frac{t}{2}\right);$$

quindi

$$s = s(t) = 4\left(1 - \cos\frac{t}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad t = t(s) = 2\arccos\frac{4 - s}{4}.$$

La riparametrizzazione cercata è allora

$$\mathscr{L}: \mathbf{r}(s) = \left[2\arccos\frac{4-s}{4} - \sin\left(2\arccos\frac{4-s}{4}\right)\right]\mathbf{i} + \left[1 - \cos\left(2\arccos\frac{4-s}{4}\right)\right]\mathbf{j},$$

con $s \in [0, 8]$.

Esercizio 4.11 — Integrali di linea di prima specie

Calcolare i seguenti integrali di linea:

① $\displaystyle\int_{\mathscr{L}_1} \frac{x}{y}\,\mathrm{d}s, \qquad \mathscr{L}_1 : \mathbf{r}(t) = [e^{3t}]\mathbf{i} + [e^{4t}]\mathbf{j}, \qquad t \in [0, 1];$

② $\displaystyle\int_{\mathscr{L}_2} x\,\mathrm{d}s, \qquad \mathscr{L}_2 : \textit{ parabola } y = x^2, \qquad x \in [0, 3];$

③ $\displaystyle\int_{\mathscr{L}_3} \frac{yz}{2x+1}\,\mathrm{d}s, \quad \mathscr{L}_3 : \mathbf{r}(t) = [t^2]\mathbf{i} + [2t]\mathbf{j} + [\log t]\mathbf{k}, \quad t \in [1, e].$

Soluzione

Data la curva

$$\mathscr{L}: \mathbf{r}(t) = [x(t)]\mathbf{i} + [y(t)]\mathbf{j} + [z(t)]\mathbf{k}, \qquad t \in [a, b];$$

e data una funzione $f(x, y, z)$ definita in tutti i punti di $\mathscr{L}$, l'integrale di f lungo $\mathscr{L}$ si calcola trasformando x, y, z e anche s in funzione di t:

$$\mathrm{d}s = |\mathbf{r}'(t)|\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathscr{L}} f(x, y, z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f\big(x(t), y(t), z(t)\big)|\mathbf{r}'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Questa tipologia di integrali è detta *integrali di linea di prima specie*, si distinguono dagli integrali di seconda specie, di cui parleremo più avanti, per la variabile d'integrazione: nel caso degli integrali di prima specie, la variabile è l'ascissa curvilinea s, nel caso degli integrali di seconda specie le variabili d'integrazione sono le coordinate x, y e z.

① Abbiamo

$$\mathbf{r}'(t) = 3e^{3t}\mathbf{i} + 4e^{4t}\mathbf{j}, \qquad |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{9e^{6t} + 16e^{8t}} = e^{3t}\sqrt{9 + 16e^{2t}},$$

inoltre

$$\frac{x}{y} = \frac{e^{3t}}{e^{4t}} = \frac{1}{e^t};$$

pertanto

$$\int_{\mathscr{L}_1} \frac{x}{y}\,\mathrm{d}s = \int_0^1 \frac{1}{e^t} e^{3t}\sqrt{9 + 16e^{2t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 e^{2t}\sqrt{9 + 16e^{2t}}\,\mathrm{d}t$$
$$= \left[\begin{array}{c} e^{2t} = u \\ 2e^{2t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int_0^{e^2} \sqrt{16u + 9}\,\mathrm{d}u = \ldots = \frac{\sqrt{(16e^2 + 9)^3} - 27}{48}.$$

② In questo caso, poiché anche $|\mathbf{r}'| = \sqrt{1 + 4x^2}$ può essere scritto in funzione di x, scriviamo tutto l'integrale in funzione di x:

$$\int_{\mathscr{L}_2} x\,\mathrm{d}s = \int_0^3 x\sqrt{1 + 4x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} 4x^2 = u \\ 8x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \end{array}\right]$$
$$\frac{1}{8}\int_0^{36} \sqrt{1 + u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{12}\left[\sqrt{(1 + u)^3}\right]_0^{36} = \frac{\sqrt{37^3} - 1}{12}.$$

③ Calcoliamo $\mathbf{r}'$:

$$\mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \frac{1}{t}\mathbf{k}, \qquad |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{4t^2 + 4 + \frac{1}{t^2}} = \sqrt{\left(2t + \frac{1}{t}\right)^2},$$

$t \in [1, e]$ implica $2t + \frac{1}{t} > 0$, quindi

$$|\mathbf{r}'(t)| = 2t + \frac{1}{t} = \frac{2t^2 + 1}{t};$$

infine

$$\frac{yz}{2x + 1} = \frac{2t\log t}{2t^2 + 1},$$

pertanto

$$\int_{\mathscr{L}_3} \frac{yz}{2x + 1}\,\mathrm{d}s = \int_1^e \frac{2t\log t}{2t^2 + 1}\frac{2t^2 + 1}{t}\,\mathrm{d}t = 2\int_1^e \log t\,\mathrm{d}t$$
$$= 2\big[t\log t - t\big]_1^e = 2.$$

Esercizio 4.12 — Integrali di linea di prima specie Interpretazione fisica

Calcolare la massa e le coordinate del baricentro della linea $\mathscr{L}$: $\mathbf{r}(t) = 3t^2\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $t \in [1, 4]$, *la cui densità lineare vale*

$$\delta(x, y, z) = \frac{x + z}{3y}.$$

Soluzione

Se si interpreta la curva $\mathscr{L}$ come un filo avente densità lineare $\delta(x, y, z)$, allora la massa M e l'ascissa del baricentro sono date dagli integrali di linea[f]

$$M = \int_{\mathscr{L}} \delta(x, y, z)\,\mathrm{d}s, \qquad x_B = \frac{1}{M}\int_{\mathscr{L}} x\,\delta(x, y, z)\,\mathrm{d}s.$$

Nel nostro caso $\mathbf{r}'(t) = 6t\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$, quindi

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{36t^2 + 36 + 9t^4} = \sqrt{9(t^2 + 2)^2} = 3(t^2 + 2);$$

inoltre

$$\delta\big(x(t), y(t), z(t)\big) = \frac{x + z}{3y} = \frac{3t^2 + t^3}{18t} = \frac{1}{18}(3t + t^2),$$

pertanto

$$M = \int_1^4 \frac{1}{18}(3t + t^2)\,3(t^2 + 2)\,\mathrm{d}t = \frac{3219}{40}.$$

inoltre

$$x_B = \frac{1}{M}\int_1^4 \frac{1}{18}3t^2(3t + t^2)\,3(t^2 + 2)\,\mathrm{d}t = \frac{40}{3219}\cdot\frac{181287}{70} = \frac{241716}{7511};$$
$$y_B = \frac{1}{M}\int_1^4 \frac{1}{18}6t(3t + t^2)\,3(t^2 + 2)\,\mathrm{d}t = \frac{40}{3219}\cdot\frac{7749}{5} = \frac{20664}{1073};$$
$$z_B = \frac{1}{M}\int_1^4 \frac{1}{18}t^3(3t + t^2)\,3(t^2 + 2)\,\mathrm{d}t = \frac{40}{3219}\cdot\frac{1661871}{560} = \frac{553957}{15022}.$$

Esercizio 4.13 — Integrali di linea di prima specie Interpretazione geometrica

Calcolare l'area A della superficie a generatrici parallele all'asse z compresa tra la linea $\mathscr{L}$: $y = \sin x$, $x \in [0, \pi]$ *e la superficie di equazione* $z = f(x, y) = x\sqrt{2 - y^2}$.

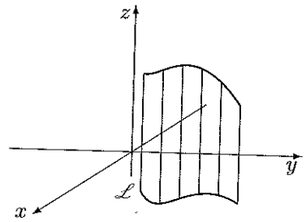
[f] Valgono ovviamente formule analoghe per ordinata e quota del baricentro:

$$y_B = \frac{1}{M}\int_{\mathscr{L}} y\,\delta(x, y, z)\,\mathrm{d}s, \qquad z_B = \frac{1}{M}\int_{\mathscr{L}} z\,\delta(x, y, z)\,\mathrm{d}s.$$

Soluzione
Data una linea $\mathscr{L}$ nel piano xy e data una funzione $f(x, y)$ definita e non negativa in corrispondenza dei punti di $\mathscr{L}$, l'integrale

$$\int_{\mathscr{L}} f(x, y)\, ds$$

può essere visto come l'area della superficie verticale compresa tra la linea $\mathscr{L}$ nel piano xy e la superficie $z = f(x, y)$:



Nel nostro caso, (usando direttamente la parametrizzazione in x)

$$|\mathbf{r}'| = \sqrt{1 + \cos^2 x}, \qquad f(x, \sin x) = x\sqrt{2 - \sin^2 x},$$

pertanto

$$A = \int_{\mathscr{L}} f(x, y)\, ds = \int_0^{\pi} x\sqrt{2 - \sin^2 x}\,\sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx = \int_0^{\pi} x(1 + \cos^2 x)\, dx$$

e, usando le formule di bisezione,

$$\int_0^{\pi} x(1 + \cos^2 x)\, dx = \int_0^{\pi} x\left(1 + \frac{1 + \cos 2x}{2}\right) dx = \ldots = \frac{3}{2}\pi^2.$$

Esercizio 4.14 — Integrali di linea di seconda specie

Calcolare i seguenti integrali di linea:

① $\displaystyle\int_{\mathscr{L}_1} [xy\, dx + dy]$, $\quad \mathscr{L}_1 : \begin{cases} \mathbf{r}(t) = [e^{-t}]\mathbf{i} + [te^{2t}]\mathbf{j} \\ \textit{percorsa da } (1, 0) \textit{ a } (e^{-1}, e^2) \end{cases}$;

② $\displaystyle\int_{\mathscr{L}_2} \left[x\, dx + \frac{y+1}{x+2}\, dy\right]$, $\quad \mathscr{L}_2 : \begin{cases} \textit{parabola } y = x^2, \\ \textit{percorsa da } (0, 0) \textit{ a } (2, 4) \end{cases}$;

③ $\displaystyle\int_{\mathscr{L}_3} [xyz\, dx - xz\, dz]$, $\quad \mathscr{L}_3 : \begin{cases} \mathbf{r}(t) = [t^2]\mathbf{i} + [2t]\mathbf{j} + [\log t]\mathbf{k}, \\ \textit{percorsa da } (e^2, 2e, 1) \textit{ a } (1, 2, 0). \end{cases}$

Soluzione
Come per gli integrali di prima specie, anche per gli integrali di seconda specie le variabili che compaiono nell'integrale vengono trasformate nel parametro della linea $\mathscr{L}$; mentre nel caso degli integrali di prima specie ds diventava $|\mathbf{r}'(t)|\, dt$, ora negli integrali compaiono dx, dy e dz, che diventano rispettivamente

$$dx = x'(t)\, dt, \qquad dy = y'(t)\, dt, \qquad dz = z'(t)\, dt.$$

① Osserviamo innanzitutto che nella parametrizzazione data per $\mathscr{L}_1$ il parametro t varia da $t = 0$ a $t = 1$, inoltre

$$dx = -e^{-t}\, dt, \qquad dy = (e^{2t} + 2te^{2t})\, dt;$$

pertanto

$$\int_{\mathscr{L}_1} [xy\, dx + dy] = \int_0^1 \left[te^t(-e^{-t})\, dt + (e^{2t} + 2te^{2t})\, dt\right]$$
$$= \int_0^1 \left[-t + e^{2t} + 2te^{2t}\right] dt = \left[-\frac{1}{2}t^2 + te^{2t}\right]_0^1 = e^2 - \frac{1}{2}.$$

② Usando x come parametro, x varia da $x = 0$ a $x = 2$, inoltre $dy = d(x^2) = 2x\, dx$, pertanto

$$\int_{\mathscr{L}_2} \left[x\, dx + \frac{y+1}{x+2}\, dy\right] = \int_0^2 \left[x\, dx + \frac{x^2+1}{x+2} 2x\, dx\right]$$
$$= \int_0^2 \left[x + \frac{x^2+1}{x+2} 2x\right] dx = \int_0^2 \left[\frac{2x^3 + x^2 + 4x}{x+2}\right] dx$$
$$= \int_0^2 \left[2x^2 - 3x + 10 - \frac{20}{x+2}\right] dx = \ldots = \frac{58}{3} - 20\log 2.$$

③ Osserviamo innanzitutto che nella parametrizzazione data per $\mathscr{L}_3$, concordemente al verso di percorrenza prescelto, il parametro t varia da $t = e$ a $t = 1$, inoltre (dy non compare nella formula)

$$dx = 2t\, dt, \qquad dz = \frac{1}{t}\, dt;$$

pertanto (attenzione agli estremi d'integrazione...)

$$\int_{\mathscr{L}_3} [xyz\, dx - xz\, dz] = \int_e^1 \left[2t^3 \log t \cdot (2t)\, dt - t^2 \log t \cdot \frac{1}{t}\, dt\right]$$
$$= -\int_1^e \left[4t^4 - t\right] \log t\, dt = \text{ integrando per parti } = \frac{9 + 25e^2 - 64e^5}{100}.$$