208. Dire per quali valori di α la funzione

$$\frac{x^2y^\alpha}{1-\cos y+\sin^2 x}$$

è sommabile nel triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$.

209.* Dimostrare che se $u:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ è misurabile, e $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ è un diffeomorfismo (una funzione invertibile e di classe C^1 assieme alla sua inversa), allora $u\circ f$ è misurabile.

Capitolo 6
Curve e superfici

1 Generalità

Cominciamo col richiamare alcune definizioni che abbiamo introdotto nel capitolo 7 delle *Lezioni*.

Una *curva* in $\mathbf{R}^n$ è un'applicazione φ di un intervallo $[a,b]$ in $\mathbf{R}^n$. La curva si dirà *continua* [o differenziabile, o in generale di classe C^k] se è tale la funzione φ. Essa si dice poi *regolare* se è differenziabile e la derivata φ' non si annulla mai in (a,b). Infine, la curva φ si dice *regolare a tratti* se è continua e se è possibile dividere l'intervallo (a,b) in un numero finito di intervalli, in ognuno dei quali la curva è regolare.

Se φ è una curva regolare e $t_0\in(a,b)$ (o anche se φ è regolare a tratti, e t_0 è interno a uno degli intervalli di regolarità), il vettore $\varphi'(t_0)$ non è nullo, e definisce una direzione $\tau(t_0)=\varphi'(t_0)/|\varphi'(t_0)|$, tangente alla curva nel punto $\mathbf{x}_0=\varphi(t_0)$. La curva $\varphi(t_0)+t\,\varphi'(t_0)$, $-\infty<t<+\infty$, è una retta, tangente a φ in $\mathbf{x}_0=\varphi(t_0)$. Un punto $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$ appartiene alla tangente se e solo se $\mathbf{x}=\varphi(t_0)+t\varphi'(t_0)$, ovvero se il vettore $\mathbf{x}-\mathbf{x}_0$ è proporzionale a $\varphi'(t_0)$.

Nel caso di due variabili, indicheremo con $x(t)$, $y(t)$ le componenti del vettore $\varphi(t)$. In questo caso, se $\mathbf{x}=(x,y)$ è un punto posto sulla retta tangente alla curva φ nel punto $(x_0,y_0)=(x(t_0),y(t_0))$, risulta $x-x_0=tx'(t_0)$ e $y-y_0=ty'(t_0)$, e quindi la retta tangente ha equazione

$$y'(t_0)(x-x_0)=x'(t_0)(y-y_0).$$

Similmente, la retta normale alla curva avrà equazione

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)=0.$$

Esempio 1.1

La cicloide, di equazione parametrica

$$\begin{cases} x(t)=t-\sin t \\ y(t)=1-\cos t \end{cases}\qquad (0\le t\le 2\pi)$$

è una curva regolare, dato che il vettore $\varphi'(t) = (1-\cos t, \sin t)$ non si annulla mai in $(0, 2\pi)$. Essa non sarebbe tale se la considerassimo ad esempio nell'intervallo $[0, 4\pi]$, dato che $\varphi'(2\pi) = 0$. ■

Esempio 1.2

La curva di equazione

$$\begin{cases} x(t) = t(1-t) \\ y(t) = 1 + t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2)$$

è regolare, in quanto $y' \equiv 1$ non si annulla mai. La retta tangente nel punto $(0, 2)$, corrispondente al valore $t_0 = 1$, ha equazione $x = 2 - y$; mentre la retta $y - 2 - x = 0$ è normale a φ nello stesso punto. ■

Analogamente, in tre dimensioni, indicando con $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ le componenti della curva $\varphi(t)$, la retta tangente ha equazione parametrica $\mathbf{x} = \varphi(t_0) + t\varphi'(t_0)$. Di qui, eliminando il parametro t:

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}\,.$$

Il corrispondente piano normale avrà allora equazione

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0.$$

Esercizi

Trovare l'equazione della retta tangente e della retta (o del piano) normale alle curve seguenti, nei punti indicati a lato.

1. $x(t) = t^2$, $y(t) = t^3$ $(1, 1)$

2. $x(t) = \sin t$, $y(t) = \pi - t$ $(0, 0)$

3. $x(t) = e^{2t}$, $y(t) = t + \ln(t + 1)$ $(1, 0)$

4. $x(t) = \sin t \cos t - t$, $y(t) = \cos^2 t + \dfrac{1}{\sin t}$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$

5. $x(t) = \ln(1 - t)$, $y(t) = t - t^2$ $(0, 0)$

6. $x(t) = \sin^{2/3} t$, $y(t) = \cos^{2/3} t$ $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}, \sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}\right)$

7. $x(t) = 1 - \operatorname{arctg} t$, $y(t) = 1 - t^2$ $\left(1 - \dfrac{\pi}{4}, 0\right)$

8. $x(t) = t$, $y(t) = t^2$, $z(t) = \dfrac{1}{t^3}$ $(1, 1, 1)$.

2 Lunghezza di una curva

Sia $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ una curva regolare a tratti. Si definisce lunghezza di φ la quantità (*Lezioni*, cap. 7, § 2)

$$L(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(t)|\, dt.$$

Esempio 2.1

Calcoliamo la lunghezza della cicloide (Esempio 1.1). Si ha

$$|\varphi'(t)| = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2 - 2\cos t} = 2 \sin \frac{t}{2},$$

e dunque

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{t}{2}\, dt = 8. \ ■$$

Esempio 2.2

In maniera analoga si trova la lunghezza della curva dell'Esempio 1.2. Si ha $\varphi'(t) = (1 - 2t, 1)$, e dunque

$$L(\varphi) = \int_0^2 \sqrt{(2t-1)^2 + 1}\, dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^3 \sqrt{u^2 + 1}\, du =$$

$$= \frac{3\sqrt{10}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{4}\ln(3 + \sqrt{10}) - \frac{1}{4}\ln(\sqrt{2} - 1). \ ■$$

Esercizi

Calcolare la lunghezza delle seguenti curve:

9. $x = e^t - 1$, $y = e^{2t} + 1$ $(0 \le t \le 1)$

10. $x = \arccos t$, $y = \ln t$ $(1/2 \le t \le 1)$

11. $x = \sin t - t\cos t$, $y = t \sin t + \cos t$ $\left(0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}\right)$

12. $x = \sin t - t\cos t$, $y = t \sin t + \cos t + \dfrac{t^2}{2}$ $\left(0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}\right)$

13. $x = \cos^2 t,\ \ y = \cos t \sin t\ \ \left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$

14. $x = \arcsin t,\ \ y = \ln(1+t)\ \ (0 \le t \le 1)$

15. $x = \frac{\cos 2t}{4},\ \ y = \cos^3 t,\ \ z = \sin^3 t\ \ \left(-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$

16. $x = 3t^2 + 10t,\ \ y = 4t^2 + 5t\ \ (-1 \le t \le 1)$

17. $x = t^3,\ \ y = t^2\ \ (0 \le t \le 1)$

18. $x = a \cosh t \cos t,\ \ y = a \cosh t \sin t,\ \ z = at\ \ (0 \le t \le 1)$.

(a) Curve cartesiane

Non di rado l'equazione della curva è data prendendo una delle coordinate (ad esempio la x) come parametro. Si ha allora l'equazione parametrica

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases} \quad (a \le t \le b)$$

o più semplicemente

$$y = f(x).$$

In questo caso la lunghezza di φ è data dall'integrale

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Esempio 2.3

Calcolare la lunghezza della curva $y = \ln(1 - x^2)$ tra due estremi a, b, con $-1 < a < b < 1$.

Si ha

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2}}\, dx = \int_a^b \frac{1+x^2}{1-x^2}\, dx$$

e quindi

$$L(\varphi) = \ln \frac{(1+b)(1-a)}{(1-b)(1+a)} - b + a. \ \blacksquare$$

Esercizi

Calcolare le lunghezze delle seguenti curve

19. $y = \sqrt{1+2x}\ \ \left(0 \le x \le \frac{3}{2}\right)$

20. $y = \frac{3}{4}x + \frac{11}{4}e^x\ \ \left(\ln\frac{7}{33} \le x \le \ln\frac{3}{5}\right)$

21. $y = \ln \cos x\ \ \left(0 \le x \le \frac{\pi}{3}\right)$

22. $y = \sqrt{\frac{x^3}{2a - x}}\ \ \left(0 \le x \le \frac{5a}{3}\right)$

23. $y = \left(\frac{4}{3} + x\right)^{3/2}\ \ (0 \le x \le 1)$

24. $y = x + 2\sqrt{x}\ \ (0 \le x \le 1)$

25. $y = 2 - 2\sqrt{x}\ \ (1 \le x \le 4)$

26. $y = \cosh x\ \ (-1 \le x \le 1)$

27. $y = x^{3/2}\ \ \left(0 \le x \le \frac{1}{4}\right)$

28. $y = \ln x\ \ \left(\frac{3}{4} \le x \le \frac{4}{3}\right)$

29. $y = x^2\ \ (a \le x \le b)$

30. $y = \sqrt{1 - x}\ \ (0 \le x \le 1)$

31. $y = x + e^x\ \ (0 \le x \le \ln 2)$

32. $\sqrt{2}y = \ln \sin x\ \ \left(\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$

33. $y = (3 + 2x)^{3/2}\ \ (0 \le x \le 2)$

34. $y = 2^x\ \ (0 \le x \le 1)$

35. $y = \frac{3}{4}x + \ln x\ \ \left(\frac{18}{25} \le x \le \frac{51}{25}\right)$

36. $y = 2\sqrt{x},\ \ z = \ln x\ \ (1 \le x \le 2)$.

(b) Coordinate polari

In alcuni casi l'equazione della curva φ è data in coordinate polari, assegnando il raggio vettore ϱ in funzione dell'angolo ϑ : $\varrho = \varrho(\vartheta)$, con $a \le \vartheta \le b$. Il passaggio all'equazione parametrica non è difficile; si ha infatti

$$\begin{cases} x = \varrho(\vartheta) \cos \vartheta \\ y = \varrho(\vartheta) \sin \vartheta. \end{cases}$$

Per tale curva si ha

$$x'(\vartheta)^2 + y'(\vartheta)^2 = \varrho(\vartheta)^2 + \varrho'(\vartheta)^2,$$

e dunque la lunghezza di φ è data dall'integrale

$$\int_a^b \sqrt{\varrho(\vartheta)^2 + \varrho'(\vartheta)^2}\, d\vartheta.$$

Esempio 2.4

La spirale ha equazione $\varrho = \vartheta$ in coordinate polari. La sua lunghezza è quindi

$$\int_a^b \sqrt{1+\vartheta^2}\,d\vartheta = \frac{1}{2}\left[b\sqrt{1+b^2} + \ln(b+\sqrt{1+b^2}) - a\sqrt{1+a^2} - \ln(a+\sqrt{1+a^2})\right]. \blacksquare$$

Esempio 2.5

La spirale logaritmica ha equazione $\varrho = e^\vartheta$. La sua lunghezza è quindi

$$\int_a^b \sqrt{2}e^\vartheta\,d\vartheta = \sqrt{2}\,(e^b - e^a). \blacksquare$$

L'uso di coordinate polari o cilindriche è spesso utile per calcolare la lunghezza di curve in tre dimensioni, che abbiano il sostegno contenuto su una sfera o su un cilindro. Un tipico esempio è dato dall'elica cilindrica, di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \cos\vartheta \\ y = \sin\vartheta \\ z = \vartheta \end{cases} \qquad (a \le \vartheta \le b)$$

Con semplici calcoli si trova in questo caso

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{2}\,d\vartheta = \sqrt{2}\,(b-a).$$

In generale, se la curva ha equazione

$$x = \varrho(\vartheta)\cos\vartheta,\ \ y = \varrho(\vartheta)\sin\vartheta,\ \ z = f(\vartheta),$$

la sua lunghezza è data dall'integrale

$$\int_a^b \sqrt{\varrho(\vartheta)^2 + \varrho'(\vartheta)^2 + f'(\vartheta)^2}\,d\vartheta.$$

Esempio 2.6

Si calcoli la lunghezza della curva formata dall'intersezione del cilindro $x^2+y^2 = 4$ con il grafico della funzione $z = \ln y$, contenuta nel semispazio $y \ge 1$.

L'equazione parametrica della curva in questione è data in coordinate cilindriche da

$$\begin{cases} x = 2\cos\vartheta \\ y = 2\sin\vartheta \\ z = \ln(2\sin\vartheta). \end{cases}$$

Poiché $y \ge 1$, sarà $\sin\vartheta \ge \frac{1}{2}$, e dunque $\frac{\pi}{6} \le \vartheta \le \frac{5\pi}{6}$. Si ha allora

$$L(\varphi) = 2\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\vartheta}\,d\vartheta = 2\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} = 4\ln(2+\sqrt{3}). \blacksquare$$

Esercizi

Calcolare la lunghezza delle curve seguenti:

37. $\varrho = 1 - \cos\vartheta$ $(0 \le \vartheta \le 2\pi)$ (cardioide) **38.** $\varrho = \vartheta^2$ $\left(0 \le \vartheta \le \frac{3}{2}\right)$ (spirale quadratica)

39. $\varrho = \vartheta^3$ $(0 \le \vartheta \le 4)$ (spirale cubica) **40.** $\varrho = e^\vartheta$, $z = \varrho^2(\vartheta)$ $(0 \le \vartheta \le \ln 2)$.

Esempio 2.7

Si può dare una formula generale per le spirali di ogni potenza: $\varrho = \vartheta^m$. Si ha

$$\varrho'^2 + \varrho^2 = \vartheta^{2m-2}(m^2+\vartheta^2),$$

e dunque la lunghezza è

$$\int \vartheta^{m-1}\sqrt{m^2+\vartheta^2}\,d\vartheta.$$

Siamo quindi ricondotti a un integrale binomio, cioè del tipo

$$\int \vartheta^r(a+b\vartheta^s)^q\,d\vartheta$$

(vedi *Esercizi* I, cap. 7, § 4), con $r = m-1$, $s = 2$ e $q = \frac{1}{2}$.

Se m è pari $(m = 2k)$, si può eseguire la sostituzione $t^2 = m^2 + \vartheta^2$, con la quale l'integrale diventa

$$\int t^2(t^2-m^2)^{k-1}\,dt.$$

Se invece m è dispari ($m = 2k - 1$), si dovrà ricorrere alla sostituzione $m^2\vartheta^{-2} + 1 = t^2$, che conduce all'integrale

$$- m^{2k} \int \frac{t^2}{(t^2-1)^{k+1}}\, \mathrm{d}t. \;\blacksquare$$

(c) Integrali curvilinei

Insieme alla lunghezza di una curva, si può definire l'integrale di una funzione lungo una curva. Sia $\varphi : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ una curva regolare a tratti, e sia $f(\mathbf{x})$ una funzione continua in un aperto A che contiene il sostegno di φ. Si definisce *integrale di f lungo la curva φ*:

$$\int_\varphi f\, \mathrm{d}s =: \int_a^b f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\, \mathrm{d}t.$$

Esempio 2.8

Calcolare l'integrale

$$\int_\varphi x\, \mathrm{d}s,$$

dove φ è la curva $y = x^2$ $(0 \le x \le a)$.

Si ha

$$\int_\varphi x\, \mathrm{d}s = \int_0^a x\sqrt{1+4x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{12}\left\{(1+4a^2)^{3/2} - 1\right\}. \;\blacksquare$$

Esercizi

Calcolare i seguenti integrali curvilinei:

41. $\displaystyle\int_\gamma x^2\, \mathrm{d}s,\ \ \gamma =: y = x^2 + \ln x\ \ (1 \le x \le 2)$

42. $\displaystyle\int_\gamma \sqrt{1-y^2}\, \mathrm{d}s,\ \ \gamma =: x = \cos t,\ \ y = \sin t\ \ (0 \le t \le \pi)$

43. $\displaystyle\int_\gamma \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, \mathrm{d}s,\ \ \gamma =: x = \cos^3 t,\ \ y = \cos^2 t \sin t\ \ (0 \le t \le \pi/2)$

44. $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{d}s}{y},\ \ \gamma =: x = t^2,\ \ y = t^3\ \ \left(\frac{1}{2} \le t \le \frac{8}{5}\right)$

45. $\displaystyle\int_\varphi \sqrt{x^2+y^2}\, \mathrm{d}s,\ \ \varphi =: \varrho = \vartheta\ \ (0 \le \vartheta \le 2\pi)$

46. $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{d}s}{x},\ \ \gamma =: y = x \ln x\ \ (1 \le x \le 2)$

47. $\displaystyle\int_\gamma y^2\, \mathrm{d}s,\ \ \gamma =: y = e^x\ \ (0 \le x \le \ln 2)$

48. $\displaystyle\int_\varphi y\, \mathrm{d}s,\ \ \varphi =: x = t - \sin t,\ \ y = 1 - \cos t\ \ (0 \le t \le 2\pi)$

49. $\displaystyle\int_\gamma \sqrt{z}\, \mathrm{d}s,\ \ \gamma =: x = \cos t,\ \ y = \sin t,\ \ z = t^2\ \ (0 \le t \le \pi)$

50. $\displaystyle\int_\varphi y\, \mathrm{d}s,\ \ \varphi =: y = \sqrt{1+x^2}\ \ (0 \le x \le 1)$

51. $\displaystyle\int_\gamma \frac{x}{1+y^2}\, \mathrm{d}s,\ \ \gamma =: x = \cos t,\ \ y = \sin t\ \ \left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right).$

3 Curve rettificabili

Sia $\varphi : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ una curva, e sia P una partizione dell'intervallo $[a,b]$, effettuata mediante i punti

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = b.$$

Alla partizione P corrisponde la poligonale di vertici $\varphi(t_0), \varphi(t_1), \ldots, \varphi(t_{N-1}), \varphi(t_N)$, la cui lunghezza è data dalla formula

$$L(P) = \sum_{k=0}^{N-1} |\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)|.$$

Indichiamo ora con $V(\varphi)$ l'estremo superiore di questa quantità, al variare di P fra tutte le partizioni dell'intervallo $[a,b]$. Abbiamo visto nelle *Lezioni* (cap. 7, §2) che se φ è una curva regolare a tratti si ha

$$V(\varphi) = L(\varphi) =: \int_a^b |\varphi'(t)|\, \mathrm{d}t.$$

D'altra parte, mentre la quantità $L(\varphi)$ ha senso solo per curve di classe C^1, o al più di classe C^1 a tratti, la $V(\varphi)$ si può definire per una qualsiasi curva, in particolare per ogni curva continua. Possiamo allora porre la seguente

Definizione 3.1 *Una curva* $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ *si dice* rettificabile *se risulta* $V(\varphi) < +\infty$.

La quantità $V(\varphi)$ si chiama *variazione totale* dell'applicazione φ. Se φ è una curva rettificabile, si dice anche che φ, considerata come funzione da $[a, b]$ in $\mathbf{R}^n$, è *a variazione limitata*. È evidente da quanto detto sopra, che una funzione di classe C^1 è a variazione limitata. In generale il viceversa non sussiste, come risulta chiaro dal seguente esempio.

Esempio 3.1

Ogni funzione $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, crescente e limitata, è a variazione limitata, e si ha $V(f) = f(b) - f(a)$.

Risulta infatti per ogni partizione dell'intervallo $[a, b]$

$$\sum_{k=0}^{N-1} |f(t_{k+1}) - f(t_k)| = \sum_{k=0}^{N-1} (f(t_{k+1}) - f(t_k)) = f(b) - f(a).$$

Allo stesso modo si dimostra che una funzione decrescente è a variazione limitata. ■

Se f è a variazione limitata, la curva φ di equazione $x = t$, $y = f(t)$, o più brevemente $y = f(x)$, è rettificabile, ed essendo

$$|\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)| = \sqrt{(t_{k+1} - t_k)^2 + [f(t_{k+1}) - f(t_k)]^2} \leq$$

$$\leq |t_{k+1} - t_k| + |f(t_{k+1}) - f(t_k)|,$$

risulterà

$$V(\varphi) \leq b - a + V(f).$$

Viceversa, se φ è rettificabile, f è a variazione limitata, e si ha $V(f) \leq V(\varphi)$.

Un caso non privo di interesse si ha quando $f(x)$ è la funzione di Cantor (*Lezioni*, cap. 5, Esempio 3.4). Per quanto appena visto, la curva φ di equazione $y = f(x)$, che ha per sostegno il grafico di f, è rettificabile, e si ha $V(\varphi) \leq 2$, pur non essendo regolare a tratti, dato che la funzione f non è derivabile in nessun punto dell'insieme di Cantor.

Esempio 3.2

La curva di equazione $y = x \sin \dfrac{1}{x}$ non è rettificabile in $[0, 1]$. In altre parole, la funzione $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ non è a variazione limitata. Se infatti si prendono i punti $x_k = 2/k\pi$, risulta

$$f(x_{2s}) = 0, \quad f(x_{2s+1}) = \frac{(-1)^s 2}{(2s+1)\pi},$$

e dunque

$$\sum_{k=1}^{N} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \sum_{s=1}^{N} \frac{2}{(s+1)\pi}.$$

Si avrà pertanto

$$V(f) \geq \sum_{s=1}^{N} \frac{2}{(s+1)\pi}$$

e quindi, per l'arbitrarietà di N,

$$V(f) \geq \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2}{(s+1)\pi} = +\infty. \ ■$$

Esercizi

52. Dimostrare che ogni funzione $f : E \to \mathbf{R}^n$, a variazione limitata in un insieme $E \subset \mathbf{R}$, è limitata.

53.* Sia $\varphi_\nu : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ una successione di curve rettificabili (ovvero, il che è lo stesso, di funzioni a variazione limitata), convergente puntualmente in $[a, b]$ a una curva φ. Dimostrare che

$$V(\varphi) \leq \min \lim_{\nu \to \infty} V(\varphi_\nu).$$

In particolare, se la successione $V(\varphi_\nu)$ è limitata, la curva φ è rettificabile.

54. Dimostrare che se f e g sono due funzioni a variazione limitata, la funzione $f+g$ è a variazione limitata, e si ha $V(f+g) \leq V(f)+V(g)$. Inoltre, per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$ la funzione λf è a variazione limitata, e $V(\lambda f) = |\lambda| V(f)$. Lo spazio delle funzioni a variazione limitata in $[a, b]$ è dunque uno spazio vettoriale, che si indica con $BV([a, b])$ (dall'inglese *Bounded Variation*).

55.* Dimostrare che la quantità

$$\|f\|_{BV} = \|f\|_\infty + V(f)$$

è una norma in $BV([a, b])$, e che $BV([a, b])$ è uno spazio di Banach.