Curve: qualche esercizio

Dire se le seguenti curve sono semplici, chiuse, regolari. Se non fossero semplici trovare nel o nei punti di non iniettività i vettori tangenti e dire con che angolo si intersecano gli eventuali rami della curva:

1. $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\gamma(t) = (2 \cos t, \sin 2t)$;
2. $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (t^2 \sinh t, e^{-t^2})$.

Scrivere in forma parametrica le seguenti curve scritte come luogo di zeri di funzioni di due variabili o in forma cartesiana:

3. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x|^{2/3} + |y|^{2/3} - 1 = 0\}$; (suggerimento: si veda l'esercizio 10.)
4. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y - x^2 - 1 = 0, x \in [-1, 2]\}$;
5. il grafico della funzione $x \mapsto \sin x$, $x \in [0, 2\pi]$.

Dire se le seguenti curve sono grafici di funzioni e in tal caso scriverle, se possibile, in forma cartesiana:

6. $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\gamma(t) = (t^3, \cos 2t)$,
7. $\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\gamma(t) = (t^2, \cos 2t)$,
8. $\gamma : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\gamma(t) = (t^2, \sin 2t)$,
9. $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (t^2 \sinh t, e^{-t^2})$.

Scrivere come luogo di zeri di una funzione di due variabili la seguente curva scritta in forma parametrica:

10. $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$;

Scrivere in forma parametrica le seguenti curve scritte in forma polare:

11. $\rho = k \vartheta$, k parametro positivo;
12. $\rho = \vartheta(2\pi - \vartheta)$.

Scrivere in forma polare le seguenti curve scritte in forma parametrica:

13. $\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\gamma(t) = (2 \cos^2 t, \sin 2t)$;

14. $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\gamma(t) = (t\sqrt{1-t^2}, t^2)$.

Scrivere la retta tangente alle seguenti curve nei corrispondenti punti indicati a fianco della rappresentazione:

15. $\gamma(t) = (2e^t, -t^2 - \log t)$ in $P = (2e^2, -4 - \log 2)$;

16. $\rho = 2\vartheta$ in $P = (0, \pi)$ (il punto è espresso in coordinate cartesiane);

17. $\gamma(t) = (2 \cos t, t \sin t, t^2)$ in $P = (\sqrt{3}, \pi/12, \pi^2/36)$.

Ricordiamo che per una curva in $\mathbf{R}^2$ scritta in forma cartesiana $(x, f(x))$ il modulo della derivata prima è

$$\sqrt{1 + f'(x)^2}.$$

Per una curva in forma polare $\rho = f(\vartheta)$ è

$$\sqrt{\rho(\vartheta)^2 + \rho'(\vartheta)^2}.$$

Calcolare la lunghezza delle seguenti curve:

18. $\gamma(t) = (e^t - 1, e^{2t} - 1)$ per $t \in [0, 1]$;

19. (*) $\gamma(t) = (\arccos t, \log t)$ per $t \in [1/2, 1]$;

20. $y = \log(1 - x^2)$ per $x \in [a, b]$ dove $-1 < a < b < 1$;

21. $y = \log(\cos x)$ per $x \in [0, \pi/3]$;

22. (**) $y = \sqrt{1 + 2x}$ per $x \in [0, 3/2]$;

23. $\rho = \vartheta$, $0 < a \leq \vartheta \leq b$;

24. $\rho = 1 - \cos \vartheta$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$ (cardioide);

25. $\vartheta \mapsto (\cos \vartheta, \sin \vartheta, \vartheta)$ $a \leq \vartheta \leq b$ (elica cilindrica)

(*) Si osservi che la curva γ può essere riparametrizzata ponendo $s = \arccos t$, che è strettamente monotona. Si ottiene un'altra curva data da

$$\tilde{\gamma}(s) = (s, \log \cos s), \quad s \in [0, \pi/3].$$

Si confronti poi con l'esercizio 21.

(**) Data una curva cartesiana $\gamma(x) = (x, f(x))$ con $x \in [a, b]$ si ha che la sua lunghezza è data da

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Si osservi che se f è strettamente monotona (quindi invertibile) la curva γ ha lo stesso sostegno della curva

$$\eta(y) = (f^{-1}(y), y), \quad y \in [f(a), f(b)]$$

per cui $l(\gamma) = l(\eta)$. Nell'esercizio 22 la lunghezza della curva è data da

$$\int_0^{3/2} \sqrt{1 + \frac{1}{1+2x}} dx.$$

Più semplice però risulta il calcolo della lunghezza della curva

$$y \mapsto \left(\frac{y^2 - 1}{2}, y \right), \quad y \in [1, 2]$$

ottenuta invertendo $f(x) = \sqrt{1+2x}$ ponendo $y = \sqrt{1+2x}$. Per cui

$$\int_0^{3/2} \sqrt{1 + \frac{1}{1+2x}} dx = \int_1^2 \sqrt{1+y^2} dy.$$

Calcolare i seguenti integrali curvilinei:

26. $\int_{\gamma} x^2 ds$, $y = \log x$, $1 \leq x \leq 2$;

27. $\int_{\gamma} \sqrt{1-y^2} ds$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi]$;

28. $\int_{\gamma} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} ds$, $t \mapsto (\cos^3 t, \sin t \cos^2 t)$, $t \in [0, \pi/2]$;

29. $\int_{\gamma} \sqrt{x^2+y^2} ds$, $\rho = \vartheta$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$;

30. $\int_{\gamma} \sqrt{z} ds$, $t \mapsto (\cos t, \sin t, t^2)$, $t \in [0, \pi]$.

Scrivere in forma parametrica le seguenti curve scritte come intersezione di superfici:

31. $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z - x^2 - y^2 = 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z + x^2 + y^2 - 8 = 0\}$.
Cosa sono le due superfici?

32. $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 5x - 2y + z = 4\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.
Cosa sono le due superfici?

33. $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 - x = 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
Cosa sono le due superfici?

34. $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x - z = 3\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z^3 - 2x^2 - y^3 + 3x + xz = 0\}$.
Cos'è la prima superficie? Cos'è l'intersezione delle due superfici?