Funzioni implicite: funzioni scalari di due variabili.

1. Dire se il luogo degli zeri della seguente funzione $f(x,y) = e^{x-y} + x^2 - y^2 - e(x+1) + 1$ definisce implicitamente una funzione $y(x)$ in un intorno di $(0,-1)$. Si dimostri che $x = 0$ è punto di minimo relativo per y.

2. Dire se il luogo degli zeri della seguente funzione $f(x,y) = x^2y + e^{x+y} + 4 - e$ definisce implicitamente una funzione $y(x)$ in un intorno di $(2,-1)$. Si trovi la retta tangente al grafico della funzione y in tale punto.

3. Sia g una funzione in $C^2(\mathbf{R})$ tale che $g(0) = 0$, $g'(0) = g''(0) = 2$. Si verifichi che l'insieme di livello 1 di
$$f(x,y) = y^3 + y + \lambda g(x) + 1 \qquad \lambda \in \mathbf{R}$$
è una curva cartesiana $(x, y(x))$ in un intorno del punto $(0,0)$. Si scriva poi il polinomio di Taylor fino al secondo ordine di $y(x)$ in 0.

4. Data la funzione $f(x,y) = x^2 + \log(1+xy) + ye^{2y}$ dire se $f(x,y) = 0$ definisce una funzione implicita $y(x)$ in un intorno di $(0,0)$. Dire se $x = 0$ risulta essere critico per la funzione y ed eventualmente quale sia la sua natura.

5. Data la funzione $f(x,y) = x + x^6 + y^2\sqrt{y^2+1}$ dire se $f(x,y) = 0$ definisce una funzione implicita $x(y)$ in un intorno di $(0,0)$. Dire se $y = 0$ risulta essere critico per la funzione x ed eventualmente quale sia la sua natura.

6. Data la funzione $f(x,y) = (x+y)e^{xy} + xy - 1$ dire se $f(x,y) = 0$ definisce una funzione implicita $y(x)$ in un intorno di $(0,1)$. Se ne calcoli lo sviluppo di Taylor al secondo ordine.

7. Dopo aver mostrato che l'espressione $xy^2 + y + \operatorname{sen}(xy) + a(e^x - 1) = 0$ definisce una funzione implicita $y(x)$ in un intorno di $(0,0)$ per qualunque $a \in \mathbf{R}$ si calcoli
$$\lim_{x\to 0} \frac{y(x) + ax}{x^2}\,.$$

8. Disegnare il grafico qualitativo (localmente) della funzione implicita $y(x)$ definita da $e^{xy} + x - y - e = 0$ intorno al punto $(1,1)$.
Dire se se è possibile definire una funzione implicita $x(y)$ ed eventualmente disegnarne localmente intorno a $y = 1$ il grafico.

9. Disegnare il grafico qualitativo (localmente) della funzione implicita $y(x)$ definita da $3xy^2 - x^3y + 3xy - 48 = 0$ intorno al puto $(2,3)$.

10. Disegnare il grafico qualitativo (localmente) della funzione implicita $y(x)$ definita da $y^2 + \log(x,y) + \frac{4}{\pi}\operatorname{sen}(\pi x) - 1 = 0$ intorno a $(1,1)$.

11. Verificare che l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $g(x)$ con $f(x,y) = xe^y + ye^x$ in un intorno di $(0,0)$. Scrivere lo sviluppo di Taylor al second'ordine per g in 0.

12. Verificare che, detto Γ_c l'insieme di livello c della funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da $f(x, y) = x^3+y^3-3xy$ è, almeno localmente, una curva regolare per ogni $c \in \mathbf{R}$, tranne al più due valori. Trovare i due valori.

****

Funzioni implicite: funzioni scalari di tre variabili.

13. Si verifichi che il luogo degli zeri della funzione

$$f(x, y, z) = \cosh(zx) + \cos(xy) - yz$$

definisce implicitamente una funzione $z(x, y)$ in un intorno del punto $(0, 1, 2)$. Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico di tale z nel punto $(0, 1)$. Detta $p = p(x, y)$ la funzione il cui grafico è il piano tangente, dire se esiste un intorno di $(0, 1)$ nel quale $z \geqslant p$ oppure $z \leqslant p$.

14. Si verifichi che il luogo degli zeri della funzione

$$f(x, y, z) = \operatorname{senh}(z - 1) - e^x + e^y + xz - y$$

definisce implicitamente una funzione $z(x, y)$ in un intorno del punto $(0, 0, 1)$. Si scriva lo sviluppo di Taylor al secondo ordine.

15. Si verifichi che il luogo degli zeri della funzione

$$f(x, y, z) = x^2 + 2x + e^y + y - 2z^3$$

definisce una superficie di equazione $y = g(x, z)$ in un intorno del punto $(-1, 0, 0)$. Si scriva l'equazione del piano tangente in $(-1, 0, 0)$.

****

Funzioni implicite: sistemi di due equazioni in tre variabili.

16. Si verifichi che il sistema

$$\begin{cases} e^z + 3x - \cos y + y = 0 \\ e^x - x - z + y - 1 = 0 \end{cases}$$

definisce implicitamente in un intorno del punto $(0, 0, 0)$ una curva in $\mathbf{R}^3$ di equazione parametrica $(x, y(x), z(x))$ (o se si preferisce, ponendo $x = t$, $(t, y(t), z(t))$). Si scrivano le equazioni della retta tangente e del piano normale alla curva in $(0, 0, 0)$.

17. Date le due funzioni $f(x,y,z) = 2\log x + xz - y^2$ e $g(x,y,z) = \log y - x^2 + z^3$ e dato il punto $P = (1,1,1)$

a) si verifichi che $f(x,y,z) = 0$ definisce univocamente una superficie del tipo $x = x(y,z)$ in un intorno di P e si scriva l'equazione del piano tangente alla superficie in P;

b) si verifichi che il sistema

$$\begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

definisce una curva del tipo $(x(t), y(t), t)$. Si scriva l'equazione della retta tangente alla curva in P;

c) si verifichi che $g(x,y,z) = 0$ definisce univocamente una superficie del tipo $y = y(x,z)$ in un intorno di P e si scriva l'equazione del piano tangente alla superficie in P.

In realtà l'equazione $g(x,y,z) = 0$ è evidentemente risolubile rispetto ad y: si ha infatti $y(x) = e^{x^2 - z^3}$.
Domanda: basterebbero questa osservazione e quanto verificato al punto a) per poter affermare che il sistema è univocamente risolubile rispetto a x e y in un intorno di P, evitando i calcoli del punto b)?