1. Si calcoli l'area della superficie ottenuta per rotazione dalla curva, detta *catenaria*,

$$f(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad z \in [a,b].$$

2. Si calcoli l'area della porzione di grafico del parabolide di equazione $f(x,y) = x^2 + y^2$ con $(x,y) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leqslant r^2\right\}$.
Vederla come superficie cartesiana e anche come superficie di rotazione**.**

3. Si calcoli l'area della superficie della sfera di raggio r.
Usare le coordinate sferiche con raggio costante, le coordinate cilindriche e vedere la sfera come superficie di rotazione**.**

4. Si calcoli l'area della superficie ottenuta intersecando la superficie della sfera $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2 = r^2\right\}$ con il cilindro $C = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leqslant r^2\right\}$**.**

5. Si calcoli l'integrale di superficie

$$\int_S \frac{z + y^2}{\sqrt{1 + 4(x^2+y^2)}}\, d\sigma$$

dove S è la porzione di superficie di equazione $z = x^2 - y^2$ che si proietta sull'insieme $T = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \geqslant 1, x^2 + 4y^2 \leqslant 4\right\}$**.**

6. Si calcoli l'area del grafico della funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{a}x^2 + \frac{1}{b}y^2$$

definita nell'insieme $E = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$**.**

7. Si calcoli l'integrale di superficie

$$\int_S \frac{1}{z^4}\, d\sigma$$

dove S è la superficie $\left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, 1 \leqslant z \leqslant 2\right\}$.

8. Si calcoli l'integrale di superficie

$$\int_S xy\, d\sigma$$

dove S è la superficie $\left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}\,, x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2 + y^2 \leqslant 4\right\}$.

9. Si calcoli l'integrale di superficie

$$\int_S \sqrt{1 + e^{2x} + e^{2z}}\, d\sigma$$

dove S è la superficie parametrizzata da

$$\varphi(u,v) = \big(\log u, u - v, \log v\big), \qquad u \in [1,e], v \in [1,u].$$

Nella pagina seguente sono proposte alcune figure che rappresentano superfici. Per quanto riguarda gli iperboloidi si suggerisce di tenere presente la catenoide, ottenute nell'esercizio **1.** e riportata nella figura che segue.

Catenaria

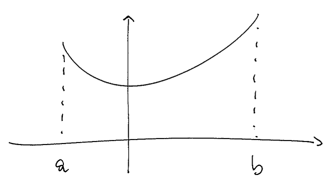
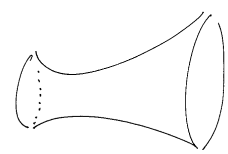


grafico di $f(z) = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$

Catenoide

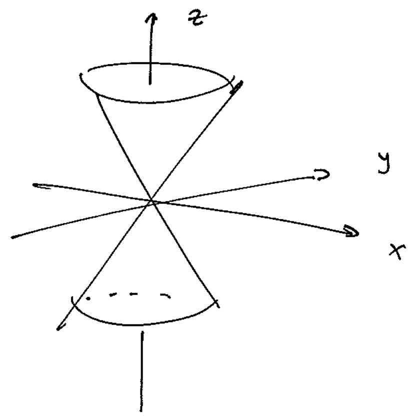


$a \le z \le b$

$a < 0$
$b > 0$

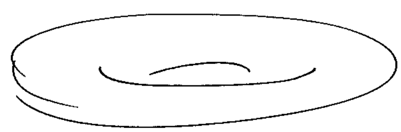
Parametrizzare le seguenti superfici:

- porzione di cono con $z \in [-h, h]$, $h > 0$, di equazione $x^2 + y^2 = z^2$



(verificare che è singolare nell'origine)

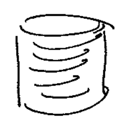
- toro



- ellissoide di equazione $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(adattare la parametrizzazione della sfera)

- cilindro



- iperboloidi (ad una falda) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(a due falde) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(Sugg. si veda l'eq. della catenoide)