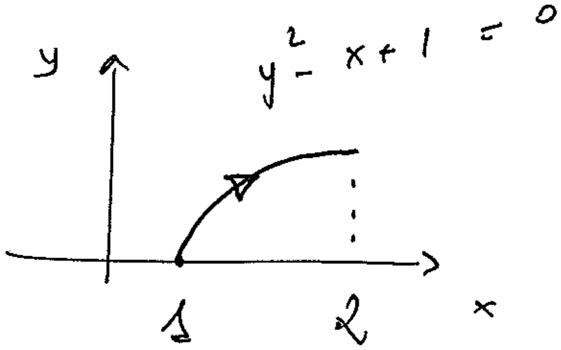
Calcolare quali dei seguenti campi ammettono potenziale (ove sono definiti) ed eventualmente calcolarli:

- $F(x,y) = (1+y\ ,\ 1+x)$
- $F(x,y) = (2xy + y^2 + 2xy^2\ ,\ x^2 + 2xy + 2x^2y)$
- $F(x,y) = (e^x \cos y\ ,\ -e^x \operatorname{sen} y)$
- $F(x,y) = \left(\dfrac{e^x}{y}\ ,\ -\dfrac{e^x}{y^2}\right)$
- $F(x,y) = \left(\dfrac{2x+y}{(x^2+xy)^{2/3}}\ ,\ \dfrac{x}{(x^2+xy)^{2/3}} + 2y\right)$
- $F(x,y,z) = \left(y^\alpha z^\alpha\ ,\ z^\alpha x^\alpha\ ,\ x^\alpha y^\alpha\right)$

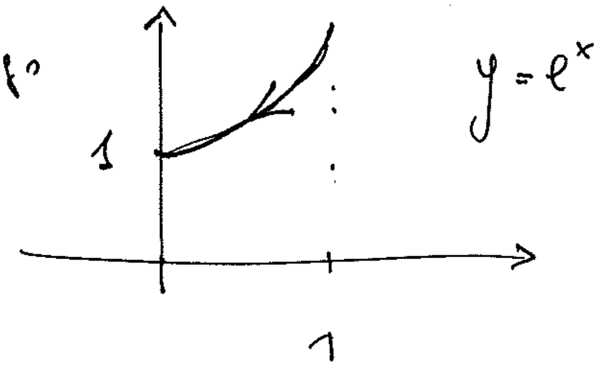
  al variare di $\alpha$ $(\alpha > 0)$

Si integrino:

- $F(x,y) = (y, \log x)$ lungo

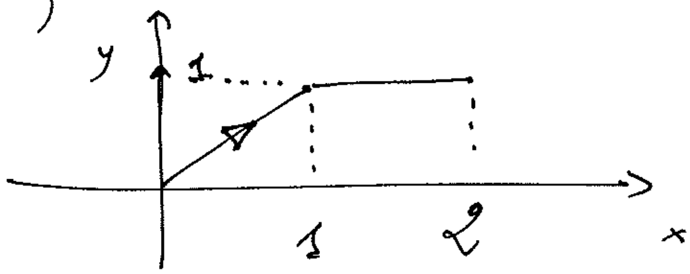



- $F(x,y) = \left(xy, \; -\dfrac{1}{1+y}\right)$ lungo

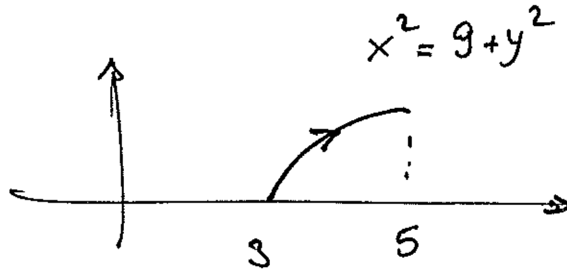



- $F(x,y) = (e^y, \; y \operatorname{sen} x)$

lungo

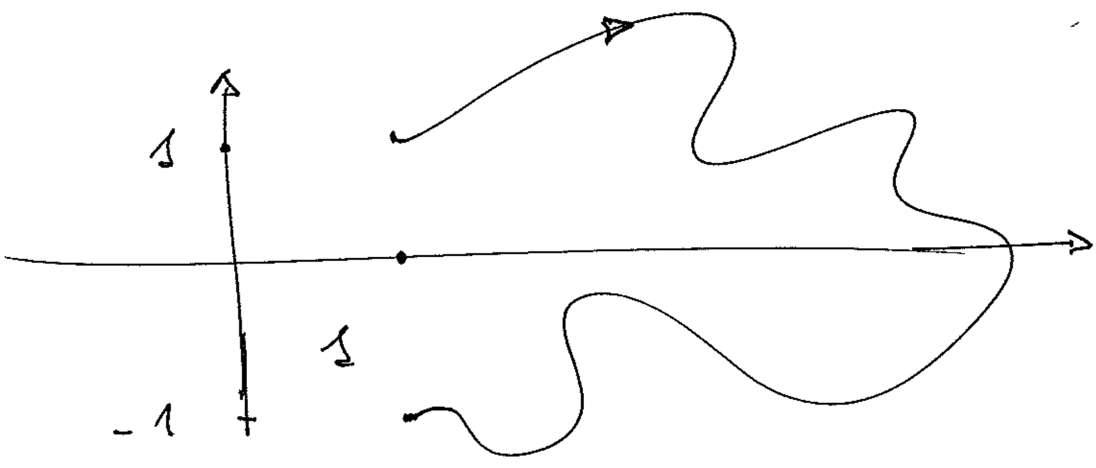



- $F(x,y) = \left(-\dfrac{y}{x}, \; 1\right)$ lungo

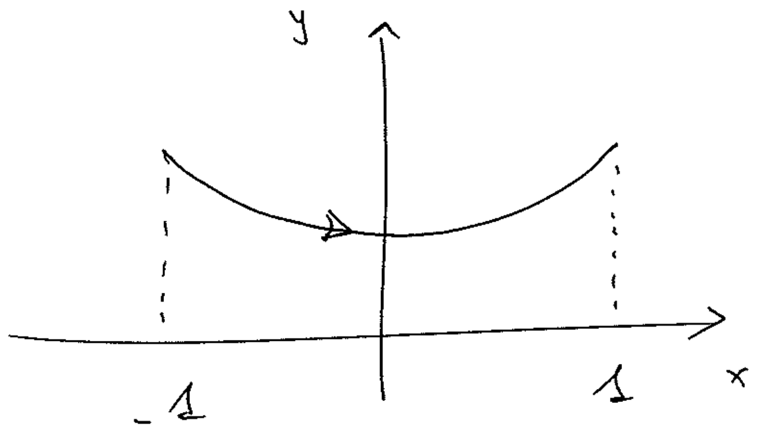



- $F(x,y) = \cancel{\left(x^2, \; -x+1\right)}$ $\quad (x^2 - y, \; 1 - x)$

lungo



• $F(x,y) = (x,y)$ lungo




$(x, \cosh x)$

Si "disegni" il campo $F$ (alcuni vettori nel piano)

Si può evitare di fare il calcolo diretto ?

• Si dica per quali valori dei parametri reali $a_j, b_j, c_j$, $j = 1,2,3$ il campo

$$F(x,y,z) = \left( \frac{a_1 x + a_2 y + a_3 z}{x^2+y^2+z^2}, \frac{b_1 x + b_2 y + b_3 z}{x^2+y^2+z^2}, \frac{c_1 x + c_2 y + c_3 z}{x^2+y^2+z^2} \right)$$

ammette potenziale in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$

- Dato il campo

$$F(x,y) = \left( \log(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2} \, , \; \frac{2xy}{x^2+y^2} \right)$$

si verifichi che ammette un potenziale in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ che può essere esteso a tutto $\mathbb{R}^2$ in maniera continua.

- Si determini il massimo aperto di $\mathbb{R}^3$ nel quale il seguente campo è conservativo:

$$F(x,y,z) = \left( \frac{z}{x^2+z^2} \, , \; \frac{z}{y^2+z^2} \, , \; -\frac{x}{x^2+z^2} - \frac{y}{x^2+z^2} \right)$$

e se ne trovi un potenziale.

- Si determini il massimo aperto di $\mathbb{R}^3$ nel quale il seguente campo è conservativo.

$$F(x,y,z) = \left( -\frac{xz}{(x^2+y^2)^{1/2}(x^2+y^2+z^2)} \, , \; -\frac{yz}{(x^2+y^2)^{1/2}(x^2+y^2+z^2)} \, , \; \frac{(x^2+y^2)^{1/2}}{x^2+y^2+z^2} \right)$$

e se ne trovi un potenziale.