Per ognuno dei seguenti campi di vettori si dica se ammette potenziale (ove è definito) e in caso affermativo si determini tale potenziale:

1. $F(x,y) = (1+y, 1+x)$

2. $F(x,y) = (y^2 + 2xy + 2xy^2, x^2 + 2xy + 2x^2y)$

3. $F(x,y) = (e^x \cos y, -e^x \operatorname{sen} y)$

4. $F(x,y) = \left(\dfrac{e^x}{y}, -\dfrac{e^x}{y^2}\right)$

5. $F(x,y) = \left(\dfrac{2x+y}{(x^2+xy)^{2/3}}, \dfrac{x}{(x^2+xy)^{2/3}} + 2y\right)$

6. $F(x,y,z) = (y^\alpha z^\alpha, z^\alpha x^\alpha, x^\alpha y^\alpha)$ al variare di $\alpha > 0$

Si integri

7. $F(x,y) = (y, \log x)$ lungo la curva in figura a

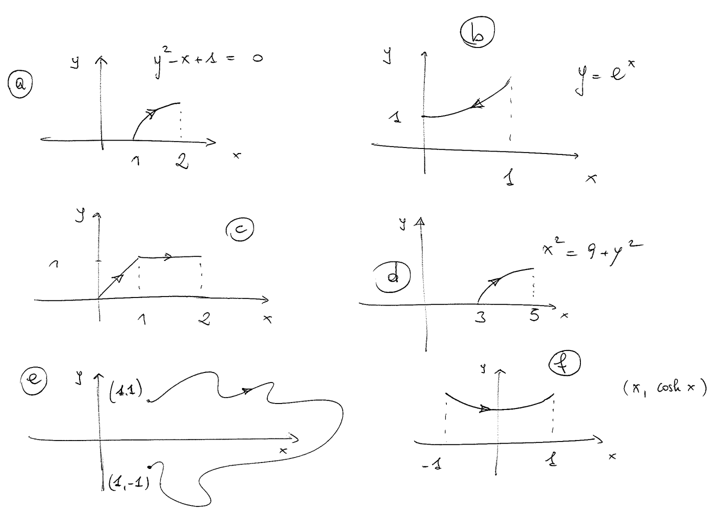
8. $F(x,y) = \left(xy, -\dfrac{1}{1+y}\right)$ lungo la curva in figura b

9. $F(x,y) = (e^y, y \operatorname{sen} x)$ lungo la curva in figura c

10. $F(x,y) = \left(-\dfrac{y}{x}, 1\right)$ lungo la curva in figura d

11. $F(x,y) = \left(x^2 - y, 1 - x\right)$ lungo la curva in figura e

12. $F(x,y) = (x,y)$ lungo la curva in figura f
Si "disegni" il campo F. Si poteva evitare di fare il calcolo diretto?



13. Si dica per quali valori dei parametri reali $a_j, b_j, c_j,\ j = 1, 2, 3$, il campo $F(x, y, z) = \left(\dfrac{a_1x + a_2y + a_3z}{x^2 + y^2 + z^2}, \dfrac{b_1x + b_2y + b_3z}{x^2 + y^2 + z^2}, \dfrac{c_1x + c_2y + c_3z}{x^2 + y^2 + z^2}\right)$ ammette potenziale in $\mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

14. Dato il campo $F(x, y) = \left(\log(x^2 + y^2) + \dfrac{2x^2}{x^2 + y^2}, \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}\right)$ si verifichi che ammette un potenziale in $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ che può essere esteso a tutto $\mathbf{R}^2$ in maniera continua.

15. Si determini il massimo aperto di $\mathbf{R}^3$ nel quale il seguente campo è conservativo

$$F_1(x, y, z) = -\frac{xz}{(x^2 + y^2)^{1/2}(x^2 + y^2 + z^2)}$$

$$F_2(x, y, z) = -\frac{yz}{(x^2 + y^2)^{1/2}(x^2 + y^2 + z^2)}$$

$$F_3(x, y, z) = -\frac{(x^2 + y^2)^{1/2}}{x^2 + y^2 + z^2}$$

e se ne trovi un potenziale.

16. Si calcoli l'integrale del campo $F(x, y) = \left(\dfrac{2x}{x^2 + y^2 - 1}, \dfrac{2y}{x^2 + y^2 - 1}\right)$ lungo i seguenti cammini:

- la circonferenza centrata nell'origine e di raggio $1/2$;

- la porzione della circonferenza centrata nell'origine e di raggio $1/2$ che sta nel semipiano $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \geqslant 0\}$;

- il segmento che unisce i due punti $(-3, 3)$ e $(3, 3)$