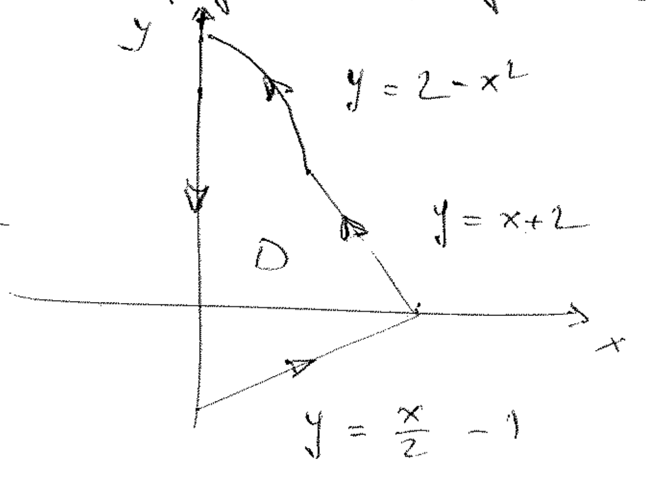
- Si determinino tutte le funzioni $F \in C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$ soluzioni di

$$\begin{cases} D_x F(x,y,z) = \dfrac{y^2 - x^2 + 1}{(x^2+y^2+1)^2} \\ D_y F(x,y,z) = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2+1)^2} \\ D_z F(x,y,z) + F(x,y,z) = e^{-x}(3z^2+1) \end{cases}$$

- Si calcoli l'area della ~~figura~~ regione D indicata in figura utilizzando la formula



$$mis_2(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial^+ D} (-y\,dx + x\,dy)$$

- Si calcoli l'integrale curvilineo ~~$\oint_\gamma F \cdot dx$~~

~~dove $F(x_1, x_2, x_3) =$~~

$$\int_\gamma F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz \qquad \text{dove}$$

$$F(x,y,z) = (y+z,\ x+z,\ x-y)$$

e γ l'intersezione tra la superficie sferica di equazione $x^2+y^2+z^2=1$ e il piano $x=y$ sia direttamente che applicando il teorema di Stokes. (scegliendo un'orientazione per γ).

- si calcoli il flusso attraverso

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geq 0\}$$

(considerando la normale indicata in figura)

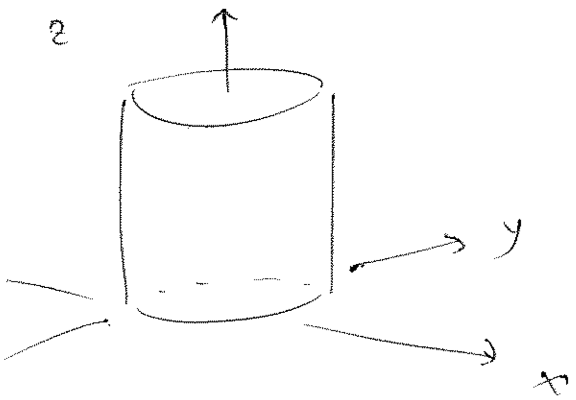
del campo

$$F(x,y,z) = \left(z^2 \cosh y,\ x^{\sqrt{z^4+\log(x+5)}},\ y\right)$$

- Si calcoli il flusso del campo

$$\bar{F}(x,y,z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2} \, , \, \frac{x}{x^2+y^2} \, , \, 0 \right)$$

attraverso la superficie chiusa



$$\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2 = 1 \, , \; 0 \le z \le h \right\}$$

- Dato il campo di vettori in $\mathbb{R}^n$ definito da $(\alpha > 0)$

$$\bar{F}(x_1, x_2, \dots x_n) = \frac{1}{|x|^\alpha} (x_1, x_2, \dots x_n)$$

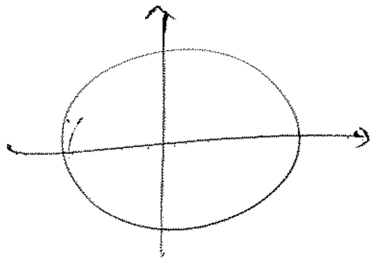
si dica per quali valori di α vale

$$\operatorname{div} \bar{F} = 0$$

• Si calcoli il flusso uscente del campo

$$F(x,y) = \frac{(x,y)}{(x^2+y^2)}$$

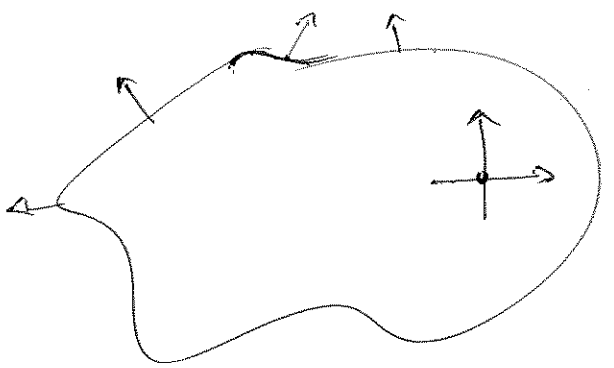
attraverso le curve chiuse



$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = r^2\}$$

(è 2π indipendentemente dal raggio !)

Si conclude che il flusso uscente da qualunque curva chiusa intorno all'origine è sempre 2π.



- Si calcoli il flusso uscente dalla superficie sferica

$$\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = r^2 \}$$

del campo

$$F(x,y,z) = \frac{(x, y, z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

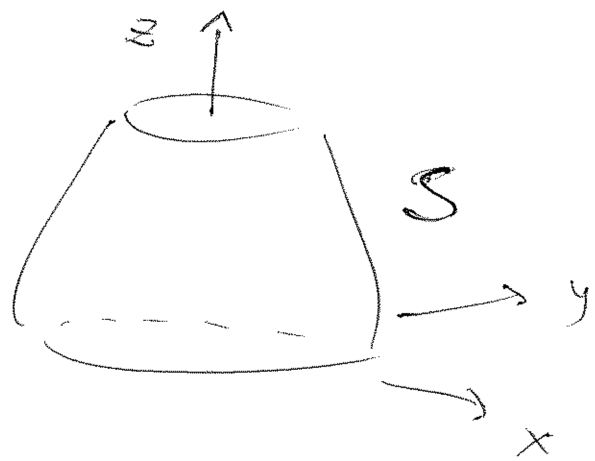
- Dato il campo

$$F(x,y,z) = (z^2, 2xy+x, x^2)$$

e S la porzione di paraboloide

$$z = 4-x^2-y^2, \quad 0 \le z \le 3$$

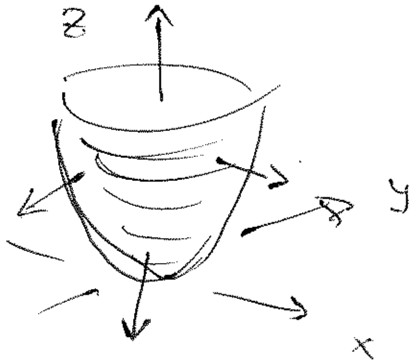
si verifichi il teorema di Stokes.



• Si calcoli il flusso ~~nella dire~~ attraverso la superficie

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2+y^2,\ z \in [0,1]\}$$

orientata come in figura



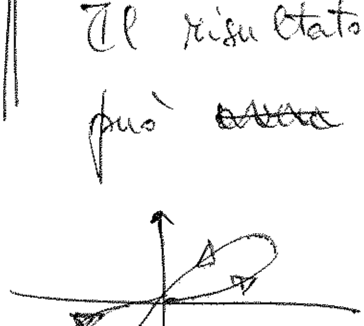
del campo di vettori

$$F(x,y,z) = (yz,\ xz,\ -2xy)$$

• Si calcoli l'area (utilizzando le formule di Gauss-Green) della figura racchiusa dalla curva

$$\begin{cases} x(t) = \operatorname{sen} t \cos t \\ y(t) = \cos t \operatorname{sen}^2 t \end{cases} \qquad 0 \le t \le \pi$$

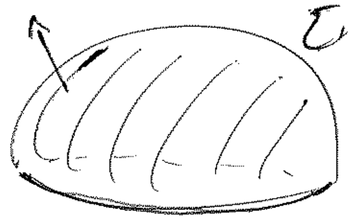
[Il risultato è zero! Anche se un'area non può ~~avere~~ essere nulla. La curva è quella disegnata in figura.



Poiché le due figure

distinte che sono racchiuse dalle curve hanno area uguale, ma la parte nel primo quadrante è una curva orientata positivamente mentre la parte nel terzo è orientata negativamente il risultato è nullo. $\lrcorner$

Si osservi come, se F è un campo t.c. $F = \mathrm{rot}\, G$ per qualche altro campo G, si ha che il flusso



attraverso una superficie Σ compatta con bordo $\partial\Sigma$ dipende solo da G

$$\iint_{\Sigma} (F, \nu)\, d\sigma = \iint_{\Sigma} (\mathrm{rot}\, G, \nu)\, d\sigma =$$

$$\overset{\text{stokes}}{=} \int_{\partial\Sigma^+} (G_1 dx + G_2 dy + G_3 dz)$$

Si conclude che se $F = \text{rot}\, G$ il flusso attraverso qualunque superficie Σ' che ha come bordo $\partial\Sigma$ (orientato positivamente) è lo stesso!

- Dato il campo $G(x,y,z) =$

$$= \left(y^2z - 2xyz \, , \, z^2 - zx^2 + x^3y \, , \, 0 \right)$$

se ne calcoli il rotore e si calcoli il flusso ~~di rot G attraverso~~ uscente dalla superficie sferica

$$\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = r^2 \}$$

del campo $\text{rot}\, G = F$.

Dopodiché si calcoli $\text{div}(\text{rot}\, G)$.

Esistono altri campi che hanno lo stesso rotore di G? Se sì, se ne esibisca un esempio.

• ⊛ Dato il campo

$$F(x,y,z) = \left(-\log x \ , \ y-1 \ , \ \frac{z}{x} - z \right)$$

si calcoli la divergenza di F, dopodiché si dica se esiste un campo G t.c.

$$\mathrm{rot}\, G = F$$

(ci si provi anche se non è stato visto a lezione)

•